

Über die Äquivalenztheorie der verallgemeinerten Linienelementräume

Von P. T. NAGY (Szeged)

§ 1. Charakterisierung der verallgemeinerten Linienelementräume

Im folgenden werden wir die Äquivalenztheorie der verallgemeinerten Linienelementräume untersuchen. Diese Linienelementräume und ihre Übertragungstheorie hat A. MOÓR entwickelt [1].

Die Grundelemente (x^i, v^i) ($i=1, 2, \dots, n$) dieser \mathfrak{M}_n -Räume genügen den Transformationsformeln von der Form:

$$(1.1) \quad \begin{cases} \hat{x}^i = \hat{x}^i(x^1, x^2, \dots, x^n) \\ \hat{v}^i = \hat{v}^i(\bar{v}^1, \bar{v}^2, \dots, \bar{v}^n), \quad \bar{v}^j = \frac{\partial \hat{x}^j}{\partial x^r} v^r \end{cases}$$

$$(1.1a) \quad \text{Det} \left(\frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^k} \right) \neq 0,$$

$$(1.1b) \quad \text{Det} \left(\frac{\partial \hat{v}^i}{\partial \bar{v}^k} \right) \neq 0,$$

wo die Funktionen $\hat{v}^i(\bar{v}^1, \bar{v}^2, \dots, \bar{v}^n)$ in den \bar{v}^k homogen von erster Ordnung sein sollen.

Der erweiterte Tensorenbegriff ist in [1] durch die folgende Definition festgelegt:

Definition: Ein verallgemeinerter Tensor (kurz Tensor) im \mathfrak{M}_n -Raum ist die Gesamtheit der Funktionen $T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}(x, v)$, die bei einer Transformation (1. 1) dem Transformationsgesetz von der Form

$$(1.2) \quad \hat{T}_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}(\hat{x}, \hat{v}) = \frac{\partial \hat{v}^{i_1}}{\partial v^{a_1}} \dots \frac{\partial \hat{v}^{i_r}}{\partial v^{a_r}} \frac{\partial v^{b_1}}{\partial \hat{v}^{j_1}} \dots \frac{\partial v^{b_s}}{\partial \hat{v}^{j_s}} T_{b_1 \dots b_s}^{a_1 \dots a_r}(x, v)$$

genügen.

Ein Pseudotensor im \mathfrak{M}_n -Raum ist die Gesamtheit der Funktionen $F_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}(x, v)$, die bei einer Transformation (1. 1) dem Transformationsgesetz von der Form:

$$(1.3) \quad \hat{F}_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}(\hat{x}, \hat{v}) = \pi_{a_1}^{i_1} \dots \pi_{a_r}^{i_r} \varrho_{j_1}^{b_1} \dots \varrho_{j_s}^{b_s} F_{b_1 \dots b_s}^{a_1 \dots a_r}$$

genügen, wo die π_a^i bzw. q_j^b die Größen $\frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^a}$, $\frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^a}$ bzw. $\frac{\partial x^b}{\partial \hat{v}^j}$, $\frac{\partial v^b}{\partial \hat{v}^j}$ bedeuten können, so aber, daß die beiden Type der Faktoren, d.h. sowohl ∂x , als auch ∂v effektiv vorhanden seien.

Sind in (1. 3) nur die Faktoren ∂x vorhanden, d.h. gilt in (1. 3):

$$\pi_a^i = \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^a}, \quad q_j^b = \frac{\partial x^b}{\partial \hat{x}^j}$$

so sprechen wir von gewöhnlichen Tensoren, d.h. ein gewöhnlicher Tensor $F_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}(x, v)$ genügt dem Transformationsgesetz von der Form:

$$(1.4) \quad \hat{F}_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}(\hat{x}, \hat{v}) = \frac{\partial \hat{x}^{i_1}}{\partial x^{a_1}} \dots \frac{\partial \hat{x}^{i_r}}{\partial x^{a_r}} \frac{\partial x^{b_1}}{\partial \hat{x}^{j_1}} \dots \frac{\partial x^{b_s}}{\partial \hat{x}^{j_s}} F_{b_1 \dots b_s}^{a_1 \dots a_r}(x, v)$$

Das invariante Differential eines kontravarianten Vektors ist

$$(1.5) \quad DX^i \stackrel{\text{def}}{=} dX^i + M_{j^i k}^i X^j dv^k + L_{j^i k}^i X^j dx^k$$

wo die Übertragungsparameter $M_{j^i k}^i$ in den v^i homogen von (-1) -ter Ordnung sind, ferner

$$M_{0^i k}^i = 0 \quad \text{und} \quad M_{k^i 0}^i = 0$$

sind; die Übertragungsparameter $L_{j^i k}^i$ sind in den v^i homogen von nullter Ordnung. Der Index „0“ bedeutet jetzt und im folgenden Kontraktion mit v^j .

In diesem Raum sind zwei fundamentale kovariante Ableitungen definiert:

$$(1.6a) \quad \nabla_k X^i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial X^i}{\partial x^k} - \frac{\partial X^i}{\partial v^r} L^*_{o^r k} + L^*_{j^i k} X^j$$

$$(1.6b) \quad \overset{*}{\nabla}_k X^i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial X^i}{\partial v^k} + M_{j^i k}^i X^j,$$

wo

$$(1.7) \quad L^*_{j^i k} \stackrel{\text{def}}{=} L_{j^i k}^i - M_{j^i r}^i L_{o^r k}^i$$

ist. Das invariante Differential kann mit Hilfe der kovarianten Ableitungen in der Form

$$(1.8) \quad DX^i = \nabla_k X^i dx^k + \overset{*}{\nabla}_k X^i \omega^k(d)$$

geschrieben werden, wo

$$\omega^k(d) \stackrel{\text{def}}{=} dv^k + L_{o^r k}^i dx^r$$

ist.

Die von A. Moór in [1] entwickelte Übertragungstheorie ist die Verallgemeinerung der Theorie von O. VARGA [2]. Wenn die Transformationsformeln (1. 1) die Form

$$\hat{x}^i = \hat{x}^i(x), \quad \hat{v}^i = \bar{v}^i$$

haben, geht diese Theorie in die Theorie von O. Varga über.

§ 2. Das Äquivalenzproblem im affinen Falle

Die durch $M_{i'k}^j$ und $L_{i'k}^j$ bzw. $\hat{M}_{i'k}^j$ und $\hat{L}_{i'k}^j$ bestimmten Räume \mathfrak{M}_n bzw. $\hat{\mathfrak{M}}_n$ werden äquivalent genannt, wenn eine Transformation von der Form (1. 1) ihrer Grundelemente existiert, die die Grundgrößen vom \mathfrak{M}_n in die von $\hat{\mathfrak{M}}_n$ überführt. Die Lösung des Äquivalenzproblems ist somit mit der Bestimmung der Bedingungen der Lösbarkeit des folgenden Differentialgleichungssystems identisch:

$$(2.1a) \quad \hat{M}_{p'q}^{i'} = M_{j'k}^{s'} \frac{\partial v^j}{\partial \hat{v}^p} \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^s} \frac{\partial v^k}{\partial \hat{v}^q} + \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^s} \frac{\partial^2 v^s}{\partial \hat{v}^p \partial \hat{v}^q},$$

$$(2.1b) \quad \hat{L}_{j'k}^{i'} = L_{s'r}^{*t'} \frac{\partial v^s}{\partial \hat{v}^j} \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^t} \frac{\partial x^r}{\partial \hat{x}^k} + \frac{\partial^2 \hat{v}^i}{\partial v^s \partial v^t} L_{0'r}^{*s'} \frac{\partial v^s}{\partial \hat{v}^j} \frac{\partial x^r}{\partial \hat{x}^k} + \\ + \frac{\partial^2 \hat{v}^i}{\partial v^r \partial v^s} \frac{\partial v^s}{\partial \hat{v}^j} \frac{\partial v^r}{\partial \hat{x}^k} + \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^t} \frac{\partial^2 v^t}{\partial \hat{v}^j \partial \hat{x}^k},$$

$$(2.1c) \quad \hat{a}_j^a \frac{\partial v^i}{\partial \hat{v}^a} = \frac{\partial x^s}{\partial \hat{x}^j} a_s^i,$$

$$(2.1d) \quad M_{0'k}^{i'} = \hat{M}_{0'k}^{i'} = 0; \quad M_{j'0}^{i'} = \hat{M}_{j'0}^{i'} = 0.$$

(Vgl. [1], Formeln (3. 11) und (4. 6), bzw. (5. 1)).

Auf Grund von (2. 1 d) ist offenbar $L_{j'k}^{i'}$ mit $L_{j'k}^{*i'}$ gleichwertig. Es wird z.B.

$$(2.2) \quad L_{j'k}^{i'} = L_{j'k}^{*i'} + M_{j'r}^{i'} L_{0'k}^{*r'}$$

Die Integrabilitätsbedingungen der Differentialgleichungen solcher Typen haben J. M. THOMAS und O. VELEN in [3] bestimmt. Diese Bedingungen hat L. P. EISENHART in [4] für die Lösung des Äquivalenzproblems der Riemannschen und Nicht-Riemannschen Geometrien bzw. O. Varga in [2] für die Lösung des Äquivalenzproblems der affinzusammenhängenden Linienelementräume angewandt.

Im Falle, wenn in (1. 1) die \hat{v}^i homogen lineare Funktionen von \bar{v}^j und hiernach auch homogen lineare Funktionen von v^j sind, können die Äquivalenzbedingungen durch die Grundtensoren von \mathfrak{M}_n und $\hat{\mathfrak{M}}_n$ ausgedrückt werden. Im folgenden beschränken wir uns auf diesen linearen Fall, d.h. wir nehmen an, daß die Relationen

$$(2.3) \quad \hat{v}^i = \hat{p}_j^i \bar{v}^j \quad (\hat{p}_j^i = \text{Konstante})$$

bestehen. In einigen Fällen werden wir aber auch auf den allgemeinen Fall, in dem \hat{p}_j^i von \bar{v}^j abhängig ist, einige Verweisungen geben. Wir bemerken aber, daß im allgemeinen Fall, in dem also $\hat{v}^i(\bar{v})$ nicht linear ist, geben die Integrabilitätsbedingungen nicht unmittelbar Tensorrelationen zwischen den Grundtensoren von \mathfrak{M}_n und $\hat{\mathfrak{M}}_n$.

§ 3. Äquivalenzbedingungen

Von den Bedingungen (1. 1 a) und (1. 1 b) folgt, daß die inversen Transformationen von (1. 1) existieren und die Form

$$(3. 1) \quad \begin{aligned} x^i &= x^i(\hat{x}) \\ v^t &= \frac{\partial x^i}{\partial \hat{x}^s} \bar{v}^s(\hat{v}) \end{aligned}$$

haben. Es gilt nach (1. 1 a) und (1. 1 b) auch

$$(3. 1 a) \quad \text{Det} \left(\frac{\partial x^i}{\partial \hat{x}^j} \right) \neq 0,$$

$$(3. 1 b) \quad \text{Det} \left(\frac{\partial \bar{v}^i}{\partial \hat{v}^j} \right) \neq 0.$$

Wir werden jetzt die Gleichung (2. 1 b) etwas umformen. Auf Grund der Homogenität von \hat{v}^i wird nach einer Kontraktion mit \hat{v}^j

$$(3. 2) \quad \hat{L}^*_{0^i k} = L^*_{0^t r} \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^t} \frac{\partial x^r}{\partial \hat{x}^k} + \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^t} \frac{\partial v^t}{\partial \hat{x}^k}.$$

Mit Hilfe der Gleichung (3. 2) können wir in (2. 1 b) $L^*_{0^t r} \frac{\partial x^r}{\partial \hat{x}^k}$ eliminieren, und so bekommen wir:

$$(3. 3) \quad \hat{L}^*_{j^i k} = L^*_{s^t r} \frac{\partial v^s}{\partial \hat{v}^j} \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^t} \frac{\partial x^r}{\partial \hat{x}^k} + \frac{\partial^2 \hat{v}^i}{\partial v^s \partial v^t} \hat{L}^*_{0^r k} \frac{\partial v^t}{\partial \hat{v}^r} \frac{\partial v^s}{\partial \hat{v}^j} + \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^t} \frac{\partial^2 v^t}{\partial \hat{v}^j \partial \hat{v}^k}.$$

Wir substituieren in (3. 3) (vgl. [1], zweite Gleichung auf S. 270)*):

$$\frac{\partial^2 \hat{v}^i}{\partial v^s \partial v^t} \frac{\partial v^t}{\partial \hat{v}^r} \frac{\partial v^s}{\partial \hat{v}^j} = - \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^s} \frac{\partial^2 v^s}{\partial \hat{v}^j \partial \hat{v}^r},$$

so erhalten wir:

$$(3. 4) \quad \hat{L}^*_{j^i k} = L^*_{s^t r} \frac{\partial v^s}{\partial \hat{v}^j} \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^t} \frac{\partial x^r}{\partial \hat{x}^k} - \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^s} \frac{\partial^2 v^s}{\partial \hat{v}^j \partial \hat{v}^r} \hat{L}^*_{0^r k} + \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^t} \frac{\partial^2 v^t}{\partial \hat{v}^j \partial \hat{x}^k}.$$

Führen wir jetzt die folgenden Bezeichnungen ein:

$$(3. 5) \quad p_k^i(\hat{v}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial \hat{v}^k}, \quad q_k^i(\hat{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial x^i}{\partial \hat{x}^k}.$$

*) Die nächstfolgende Relation kann aus der Identität

$$\frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^s} \frac{\partial v^s}{\partial \hat{v}^j} = \delta_j^i$$

durch partielle Ableitung nach \hat{v}^r leicht berechnet werden.

Somit bekommen wir für die Äquivalenzbedingungen von den Gleichungen (2. 1), (3. 2) und (3. 4) das folgende Differentialgleichungssystem:

$$(3. 6 a) \quad \frac{\partial \bar{v}^i}{\partial \bar{v}^k} = p_k^i(\bar{v}),$$

$$(3. 6 b) \quad \frac{\partial x^i}{\partial \hat{x}^k} = q_k^i(\hat{x}),$$

$$(3. 6 c) \quad \frac{\partial x^i}{\partial \bar{v}^k} = 0,$$

$$(3. 6 d) \quad \frac{\partial v^i}{\partial \hat{x}^k} = \frac{\partial^2 q_r^i}{\partial \hat{x}^k} \bar{v}^r = \hat{L}^*_{0^s k} p_s^c q_c^i - L^*_{0^i k} q_k^t,$$

$$(3. 6 e) \quad \frac{\partial v^i}{\partial \bar{v}^k} = q_r^i p_k^r,$$

$$(3. 6 f) \quad \frac{\partial q_j^i}{\partial \hat{x}^k} = \hat{L}^*_{a^b k} \hat{p}_j^a p_b^r q_r^i - L^*_{a^i b} q_j^a q_k^b + q_a^i \frac{\partial p_b^a}{\partial \bar{v}^r} \hat{p}_j^b \hat{L}^*_{0^r k},$$

$$(3. 6 g) \quad \frac{\partial q_j^i}{\partial \bar{v}^k} = 0,$$

$$(3. 6 h) \quad \frac{\partial p_j^i}{\partial \hat{x}^k} = 0,$$

$$(3. 6 j) \quad \frac{\partial p_j^i}{\partial \bar{v}^k} = \hat{M}_j^m p_m^i - M_r^s q_m^r p_j^m q_c^t p_k^c \hat{q}_s^i,$$

$$(3. 7 a) \quad \hat{p}_i^i p_j^i = \delta_j^i,$$

$$(3. 7 b) \quad \hat{q}_i^i q_j^i = \delta_j^i,$$

$$(3. 7 c) \quad \hat{a}_j^a p_a^b q_b^i = q_j^s a_s^i,$$

wo die bestimmenden Funktionen die x^i und v^i , ferner p_k^i und q_k^i sind. Wir bemerken, daß die Relationen (3. 6 a)—(3. 6 j) partielle Differentialgleichungen, ferner (3. 7 a), (3. 7 b) und (3. 7 c) skalare Relationen sind. Im Falle, wenn $p_j^i = \text{Konstante}$ ist, sind auch die Relationen (3. 6 j) skalare Relationen. (3. 7 a) und (3. 7 b) sind nur für die Bestimmung der inversen Größen \hat{p}_i^i und \hat{q}_i^i nötig, da diese auch in dem Gleichungssystem (3. 6) vorkommen. Selbstverständlich könnten die \hat{p}_j^i und \hat{q}_j^i von den Gleichungen (3. 6) mit Hilfe von (3. 7 a) und (3. 7 b) eliminiert werden, aber die Formeln wären in dieser Weise weniger durchsichtig.

Die a_j^i in der skalaren Relationen (3. 7 c) sind Pseudotensoren, mit deren Hilfe das invariante Differential der Pseudotensoren definiert ist.

§ 4. Integrabilitätsbedingungen im linearen Falle

Im folgenden werden wir die Integrabilitätsbedingungen des linearen Falles bestimmen. Wir bekommen die Integrabilitätsbedingungen, wenn wir die Vertauschungsformeln der Gleichungen (3. 6 a)—(3. 6 h) bilden. Die skalare Relationen, die wir im linearen Falle von (3. 6 j) bekommen, müssen mit den übrigen skalaren Relationen (3. 7 a)—(3. 7 c) unmittelbar nach \hat{x}^k und \hat{v}^k differenziert werden.

Bilden wir nun die Vertauschungsformeln von den Gleichungen (3. 6 a), d.h.

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial \hat{x}^k \partial \hat{x}^l} - \frac{\partial^2 x^i}{\partial \hat{x}^l \partial \hat{x}^k} = 0.$$

Es wird nach einer Kontraktion mit p_p^k und p_q^l

$$\frac{\partial q_k^i}{\partial \hat{x}^l} p_{[p}^k q_{q]}^l = 0.$$

Wenden wir die Gleichung (3. 6 f) an, die im linearen Falle die Form

$$(4. 1) \quad \frac{\partial q_j^i}{\partial \hat{x}^k} = \hat{L}^*_{r s k} \hat{p}_j^r p_s^c q_c^i - L^*_{r i} q_j^r p_k^i$$

hat, so bekommen wir

$$(4. 2) \quad p_{[q}^l L^*_{p] i} p_s^c q_c^i = L^*_{[r i]} q_a^r p_p^a q_b^l p_q^b.$$

Die Vertauschungsformeln von (3. 6 d) und (3. 6 e) sind Folgerungen der entsprechenden Vertauschungsformeln von (3. 6 f) und (3. 6 a), wie das leicht bestätigt werden kann.

Bilden wir nun die Vertauschungsformeln von (3. 6 f). Auf Grund von (3. 6 g) wird:

$$\frac{\partial^2 q_j^i}{\partial \hat{x}^k \partial \hat{x}^l} - \frac{\partial^2 q_j^i}{\partial \hat{x}^l \partial \hat{x}^k} = 0.$$

Infolge der Gleichungen (4. 1) und (3. 6 g) geht unsere letzte Relation nach einer Kontraktion mit p_m^j in

$$(4. 3) \quad \frac{\partial \hat{L}^*_{j s k}}{\partial \hat{v}^l} p_s^c q_c^i = \frac{\partial L^*_{r i}}{\partial v^m} q_c^m p_l^c q_s^r p_j^s p_k^i$$

über. Die anderen Vertauschungsformeln von (4. 1), d.h.

$$\frac{\partial^2 q_j^i}{\partial \hat{x}^k \partial \hat{x}^l} - \frac{\partial^2 q_j^i}{\partial \hat{x}^l \partial \hat{x}^k} = 0$$

gehen in die Relationen

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \hat{L}^*_{r s k}}{\partial \hat{x}^l} \hat{p}_j^r p_s^c q_c^i + \hat{L}^*_{r s k} \hat{p}_j^r p_s^c \frac{\partial q_c^i}{\partial \hat{x}^l} - \frac{\partial L^*_{r i}}{\partial v^m} q_l^m q_j^r q_k^i - \\ & - \frac{\partial L^*_{r i}}{\partial v^m} \frac{\partial v^m}{\partial \hat{x}^l} q_j^r q_k^i - L^*_{r i} \frac{\partial q_j^r}{\partial \hat{x}^l} q_k^i - L^*_{r i} q_j^r \frac{\partial q_k^i}{\partial \hat{x}^l} - k/l = 0. \end{aligned}$$

über. Setzen wir in $\frac{\partial q_c^i}{\partial \hat{x}^l}$ bzw. $\frac{\partial q_j^r}{\partial \hat{x}^l}$ die Ableitungen nach (4. 1), so sieht man in Hinsicht auf (4. 2), daß

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \hat{L}^{*s}_{rk}}{\partial \hat{x}^l} \hat{p}_j^r p_s^c q_c^i + \hat{L}^{*s}_{rk} \hat{p}_j^r [\hat{L}^{*t}_{sl} p_t^b q_b^i - L^{*ib} q_c^a p_s^c q_c^i] - \frac{\partial L^{*i}_{rt}}{\partial x^m} q_t^m q_j^r q_k^i - \\ & - \frac{\partial L^{*i}_{rt}}{\partial v^m} \frac{\partial v^m}{\partial \hat{x}^l} q_j^r q_k^i - L^{*i}_{rt} [\hat{L}^{*b}_{al} \hat{p}_j^a p_b^c q_c^r - L^{*rb} q_r^a q_l^i] q_k^i - k/l = 0. \end{aligned}$$

Eliminieren wir $\frac{\partial v^m}{\partial \hat{x}^l}$ aus dieser Gleichung mittels (3. 6 d), und wenden wir die Relation (4. 3) an, so bekommen wir:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \hat{L}^{*s}_{jk}}{\partial \hat{x}^l} - \frac{\partial \hat{L}^{*s}_{jk}}{\partial \hat{v}^m} \hat{L}^{*m}_{ol} + \hat{L}^{*m}_{jk} \hat{L}^{*s}_{ml} - k/l \right) p_s^c q_c^i = \\ & = \left(\frac{\partial L^{*i}_{rt}}{\partial x^s} - \frac{\partial L^{*i}_{rt}}{\partial v^m} L^{*m}_{os} + L^{*m}_{rs} L^{*i}_{mt} - t/s \right) q_r^s p_j^a q_k^i q_l^s. \end{aligned}$$

Dies ist aber eben der Tensor R^{*j}_{ikl} (Vgl. in [1] (7. 6)); d.h.

$$(4. 4) \quad \hat{R}^{*s}_{jkl} p_s^c q_c^i = R^{*i}_{rts} q_r^a p_j^a q_k^i q_l^s.$$

Die Gleichungen der Äquivalenzbedingungen im linearen Falle sind also die folgenden:

$$\begin{aligned} & p_{[q}^l \hat{L}^{*s]} p_s^c q_c^i = L^{*i}_{[rt]} q_r^a p_p^a q_b^i p_q^b, \\ & \frac{\partial \hat{L}^{*s}_{jk}}{\partial \hat{v}^l} p_s^c q_c^i = \frac{\partial L^{*i}_{rt}}{\partial v^m} q_c^m p_l^c q_s^r p_j^s q_k^i, \\ & \hat{R}^{*s}_{jkl} p_s^c q_c^i = R^{*i}_{rts} q_r^a p_j^a q_k^i q_l^s, \\ & \hat{M}^{*m}_{jk} p_m^a q_a^i = M^{*i}_{rt} q_r^a p_j^a q_l^i p_k^c, \\ & \hat{a}_j^a p_a^b q_b^i = a_s^i q_a^s. \end{aligned} \quad (4. 5)$$

Satz. Die verallgemeinerten Linienelementräume \mathfrak{W}_n und $\hat{\mathfrak{W}}_n$ sind bezüglich der Transformationen (1. 1), wenn in diesen \hat{v}^i (\bar{v}) homogen linear sind, dann und nur dann äquivalent, wenn es eine Zahl N von der Art gibt, daß die N ersten aus den Relationen (4. 5) durch Ableitung nach \hat{x}^m bzw. nach \hat{v}^m folgenden Gleichungsketten ein verträgliches Gleichungssystem für die x^i, v^i, q_k^i als Funktion der \hat{x}^a, \hat{v}^a und die Konstanten p_k^i bilden, wo

$$x^i = x^i(\hat{x}); \quad v^i = q_s^i p_k^s \hat{v}^k$$

die Form haben, und daß jede Lösung dieses Systems die $(N+1)$ -te Gleichungskette identisch befriedigt.

§ 5. Bemerkungen für den allgemeinen Fall

Im allgemeinen Fall erhalten wir u.a. verschiedene tensorielle Relationen als Integrabilitätsbedingungen. Bei der Bildung der Vertauschungsformeln, in denen $\frac{\partial}{\partial \bar{v}^i}$ vorhanden sind, kommen aber eben diejenigen Tensoren bzw. Pseudotensoren vor, die in den gewöhnlichen Linienelementräumen als Folgerungen von anderen Integrabilitätsbedingungen erhaltbar sind. Vgl. unsere spätere Gleichungen (5. 4) und (5. 6) bzw. die Integrabilitätsbedingungen (4. 8) und (4. 14) in [2], d.h.

$$\begin{aligned}\bar{C}_{b\ c}^e p_e^i &= C_{k\ l}^i p_b^k q_c^l, \\ p_a^i \frac{\partial \bar{\Gamma}_{b\ c}^a}{\partial \bar{x}^d} &= \frac{\partial \Gamma_{k\ l}^{*i}}{\partial x^s} p_b^k p_c^l p_d^s,\end{aligned}$$

von denen dann in den gewöhnlichen Linienelementräumen die unseren Bedingungen (5. 4) und (5. 6) entsprechenden Gleichungen folgen. Wir gehen jetzt zur Bestimmung der $\frac{\partial}{\partial \bar{v}^i}$ enthaltenden Vertauschungsformeln über.

Zuerst wir die Vertauschungsformeln von (3. 6 a).

$$(5. 1) \quad \frac{\partial^2 \bar{v}^i}{\partial \bar{v}^k \partial \bar{v}^l} - \frac{\partial^2 \bar{v}^i}{\partial \bar{v}^l \partial \bar{v}^k} = 0.$$

Jetzt berücksichtigen wir die Gleichung (3. 6 j), somit bekommen wir

$$(5. 2) \quad \hat{M}_{[j\ k]}^m p_m^c q_c^i = M_{[r\ s]}^i q_r^m p_j^m q_c^t p_k^c.$$

Ferner bilden wir die Vertauschungsformeln von (3. 6 j)

$$(5. 3) \quad \frac{\partial^r p_j^i}{\partial \bar{v}^k \partial \bar{v}^l} - \frac{\partial^r p_j^i}{\partial \bar{v}^l \partial \bar{v}^k} = 0.$$

Substituieren wir $\frac{\partial p_j^i}{\partial \bar{v}^k}$ bzw. $\frac{\partial p_j^i}{\partial \bar{v}^l}$ von den Gleichungen (3. 6 j), differenzieren wir sie nach \bar{v}^l bzw. \bar{v}^k , so erhalten wir:

$$\begin{aligned}& \frac{\partial \hat{M}_{j\ k}^m}{\partial \bar{v}^l} p_m^i - \frac{\partial M_{r\ t}^s}{\partial v^m} q_a^m p_i^a q_b^r p_j^b q_c^t p_k^c q_s^i - \\ & - M_{r\ t}^s q_b^r \frac{\partial p_j^b}{\partial \bar{v}^l} q_c^t p_k^c q_s^i - M_{r\ t}^s q_b^r p_j^b q_c^t \frac{\partial p_k^c}{\partial \bar{v}^l} q_s^i - k/l = 0.\end{aligned}$$

Verwenden wir noch einmal $\frac{\partial p_j^b}{\partial \bar{v}^l}$ von der Gleichung (3. 6 j), und noch die Relation (5. 1), so bekommen wir

$$\begin{aligned}& \left(\frac{\partial \hat{M}_{j\ k}^m}{\partial \bar{v}^l} + \hat{M}_{j\ k}^c \hat{M}_{c\ l}^m - k/l \right) p_m^a q_a^i = \\ & = \left(\frac{\partial M_{r\ t}^i}{\partial v^s} + M_{r\ t}^c M_{c\ s}^i - t/s \right) q_a^r p_j^a q_b^t p_k^b q_c^s p_l^c.\end{aligned}$$

Das ist aber eben die Transformationsformel des Tensors $S_{i'kl}^j$ (vgl. die Gleichung (7. 5) in [1]); wir können diese Relation in folgender Weise schreiben:

$$(5. 4) \quad \hat{S}_{j'kl}^m \frac{\partial v^l}{\partial \hat{v}^m} = S_{r'rs}^i \frac{\partial v^r}{\partial \hat{v}^j} \frac{\partial v^s}{\partial \hat{v}^k} \frac{\partial v^s}{\partial \hat{v}^l}.$$

Jetzt gehen wir zur Bestimmung derjenigen Integrabilitätsbedingungen über, die aus den Vertauschungsformeln (3. 6 f) und (3. 6 g) entstehen. Da die Formel

$$\frac{\partial^2 q_j^i}{\partial x^k \partial v^l} - \frac{\partial^2 q_j^i}{\partial v^l \partial x^k} = 0$$

sich wegen (3. 6 g) auf

$$(5. 5) \quad \frac{\partial^2 q_j^i}{\partial x^k \partial v^l} = 0$$

reduziert, so bekommt man aus (5. 5), in Hinsicht auf (3. 6 f), (5. 4), ferner unter Beachtung der Vertauschungsformeln von (3. 6 h), (3. 6 j), d.h. die aus

$$\frac{\partial^2 p_j^i}{\partial \hat{v}^k \partial \hat{x}^l} - \frac{\partial^2 p_j^i}{\partial \hat{x}^l \partial \hat{v}^k} = 0$$

entstehenden Relationen, die folgenden Integrabilitätsbedingungen:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \hat{L}^{*j'k}}{\partial \hat{v}^l} - \nabla_k \hat{M}_j^{m_l} + \hat{M}_j^{m_t} \frac{\partial \hat{L}^{*s'k}}{\partial \hat{v}^l} \hat{v}^s \right) \frac{\partial v^i}{\partial \hat{v}^m} = \\ & = \left(\frac{\partial L^{*ab}}{\partial v^c} - \nabla_b M_a^{ic} + M_a^{it} \frac{\partial L^{*sb}}{\partial v^c} v^s \right) \frac{\partial v^a}{\partial \hat{v}^j} \frac{\partial v^b}{\partial \hat{v}^k} \frac{\partial v^c}{\partial \hat{v}^l}. \end{aligned}$$

Das ist aber eben die Transformationsformel des Pseudotensors $P_{i'kl}^j$ (vgl. (7. 5) in [1]), d.h. wir können schreiben:

$$(5. 6) \quad \hat{P}_{j'kl}^m \frac{\partial v^l}{\partial \hat{v}^m} = P_{a'bc}^i \frac{\partial v^a}{\partial \hat{v}^j} \frac{\partial v^b}{\partial \hat{x}^k} \frac{\partial v^c}{\partial \hat{v}^l}.$$

Bemerkung. Die Vertauschungsformeln (3. 6) geben im allgemeinen Fall nicht unmittelbar mit $R^{*j'kl}$ ausdrückbare Relationen. $R^{*j'kl}$ ist im allgemeinen Fall selbst kein Tensor (vgl. [1], (7. 6) und die nachfolgende Zeilen).

§ 6. Äquivalenzbedingungen im metrischen Fall

Der metrische \mathfrak{M}_n -Raum ist durch ein in i, k symmetrischer bzw. schief-symmetrischer Fundamentaltensor $g_{ik}(x, v)$ bzw. $f_{ik}(x, v)$ definiert. Für die Bestimmung der Übertragungsparameter aus g_{ik} und f_{ik} stellen wir die Forderungen

$$(6. 1) \quad Dg_{ik} = 0,$$

$$(6. 2) \quad Df_{ik} = 0.$$

Die erste dieser Forderungen sichert, daß bei einer parallelen Vektorenübertragung die Länge der verallgemeinerten Vektoren eine Invariante ist.

Die Übertragungsparameter $L^*{}^j{}_k$ hat A. Moór (vgl. die Gleichung (6. 16) in [1]) bestimmt:

$$(6. 3) \quad L^*{}_{ijk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial v^t} L^*{}^t{}_k \right) + \\ + \Psi^{ab}{}_{ij} \left\{ f^s{}_{[a} \delta^r]{}_{b]} \left(\frac{\partial g_{rs}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{rs}}{\partial v^t} L^*{}^t{}_k \right) + \frac{\partial f_{ab}}{\partial x^k} - \frac{\partial f_{ab}}{\partial v^t} L^*{}^t{}_k \right\}$$

(für die Definition des Tensors $\Psi^{ab}{}_{ij}$ vgl. (6. 14) in [1].)

Die Übertragungsparameter $M^j{}_k$ werden wir in ähnlicher Weise bestimmen. Offenbar können wir schreiben:

$$(6. 4) \quad M_{ijk} = M_{(ij)k} + M_{[ij]k}.$$

Der in i, j symmetrische Teil $M_{(ij)k}$ hat nach der Forderung

$$\overset{*}{\nabla}_k g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial v^k} - M_{ijk} - M_{jik} = 0$$

die Form:

$$(6. 5) \quad M_{(ij)k} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial v^k}.$$

Der in i, j schiefssymmetrische Teil kann nach der Forderung:

$$(6. 6) \quad \overset{*}{\nabla}_k f_{ij} = \frac{\partial f_{ij}}{\partial v^k} - f_{ir} M^r{}_j{}_k - f_{rj} M^r{}_i{}_k = 0$$

berechnet werden. Die Gleichung (6. 6) können wir wegen $f_{ij} = -f_{ji}$ in der Form

$$(f^s{}_j \delta^r{}_i - f^s{}_i \delta^r{}_j) M_{rsk} = \frac{\partial f_{ij}}{\partial v^k}$$

schreiben. Berücksichtigen wir (6. 4), so wird:

$$(6. 7) \quad \Phi^{rs}{}_{ij} M_{[rs]k} = (f^s{}_i \delta^r{}_j - f^s{}_j \delta^r{}_i) M_{(rs)k} + \frac{\partial f_{ij}}{\partial v^k},$$

wo

$$\Phi^{rs}{}_{ij} = f^{[s}{}_j \delta^r]{}_i - f^{[s}{}_i \delta^r]{}_j$$

bedeutet. Der inverse Tensor von $\Phi^{rs}{}_{ij}$ ist aber $\Psi^{ij}{}_{kl}$, so bekommt man aus (6. 7) nach ein Kontraktion mit $\Psi^{ij}{}_{lm}$

$$(6. 8) \quad M_{[lm]k} = \Psi^{ij}{}_{lm} \left\{ 2 f^s{}_{[i} \delta^r]{}_{j]} M_{(rs)k} + \frac{\partial f_{ij}}{\partial v^k} \right\}.$$

Aus (6. 4) und (6. 8) erhält man:

$$(6. 9) \quad M_{ijk} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial v^k} + \Psi^{ab}{}_{ij} \left\{ f^s{}_{[a} \delta^r]{}_{b]} \frac{\partial g_{rs}}{\partial v^k} + \frac{\partial f_{ab}}{\partial v^k} \right\}.$$

Vergleichen wir (6. 9) mit (6. 3), so

$$L^*_{ijk} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \Psi^{ab}_{ij} \left\{ f^s_{[a} \delta^r_{b]} \frac{\partial g_{rs}}{\partial x^k} + \frac{\partial f_{ab}}{\partial x^k} \right\} - M_{ijr} L^*_{o^r k}.$$

Somit bekommen wir wegen (2. 2):

$$(6. 10) \quad L_{ijk} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \Psi^{ab}_{ij} \left\{ f^s_{[a} \delta^r_{b]} \frac{\partial g_{rs}}{\partial x^k} + \frac{\partial f_{ab}}{\partial x^k} \right\}.$$

Im metrischen Fall ist die Bedingung der Äquivalenz mit der Lösbarkeit des Differentialgleichungssystems

$$(6. 11) \quad \hat{g}_{rs} = \frac{\partial v^k}{\partial \hat{v}^r} \frac{\partial v^t}{\partial \hat{v}^s} g_{kt}, \quad \hat{f}_{rs} = \frac{\partial v^k}{\partial \hat{v}^r} \frac{\partial v^t}{\partial \hat{v}^s} f_{kt}$$

ferner (2. 1 c) bezüglich

$$x^i = x^i(\hat{x}), \quad v^i = \frac{\partial x^i}{\partial \hat{x}^s} \hat{v}^s(\hat{v})$$

identisch. Aus (6. 11) können die Größen M^j_k und $L^*_{i^j k}$ bestimmt werden, die dann eben dieselbe Integrabilitätsbedingungen liefern, wie im vorigen Fall; es kommen aber jetzt zu diesen noch die skalaren Relationen (6. 11) hinzu.

Literatur

- [1] A. MOÓR, Übertragungstheorie bezüglich der allgemeinen Linienelementtransformationen, *Publ. Math. Debrecen* **13** (1966), 263—289.
- [2] O. VARGA, Über affinzusammenhängende Mannigfaltigkeiten von Linienelementen insbesondere deren Äquivalenz, *Publ. Math. Debrecen* **1** (1949), 7—19.
- [3] J. M. THOMAS—O. VEBLEN, Projective invariants of affine geometrie of paths, *Ann. of Math.*, **27** (1926), 279—296.
- [4] L. P. EISENHART, Non-Riemannian Geometry, *American Mathematical Society Colloquium Publications*, VIII (1927), 74—81.

(Eingegangen am 10. Dezember 1967.)