Über die Funktionalgleichung $f(xy)+f(x+y-xy)=f(x)+f(y)$

Herrn Prof. Dr. O. Varga zum 60. Geburtstag gewidmet

Von Z. DARÓCZY (Debrecen)

0. Es bezeichne R die Menge der reellen Zahlen und es sei f: $R \to R$ eine Funktion, die der Funktionalgleichung

$$f(xy)+f(x+y-xy) = f(x)+f(y) \tag{1}$$

für alle $x, y \in R$ genügt. In einem Vortrag [1]) hat M. HOSSZÚ das Problem der *stetigen* Lösungen von (1) aufgeworfen. In der Arbeit [3] hat H. ŚWIATAK das folgenden Ergebnis bewiesen: *Ist* $f(x)$ *eine Lösung der Funktionalgleichung* (1), *die im Punkt* $x=0$, *oder im Punkt* $x=1$, *oder in den Punkten* $x=a$ $(a \neq 0)$ *und* $x = a+\frac{1}{a}-1$ *stetig ist, so gilt die Darstellung* $f(x) = Ax+B$ $(x \in R)$, *wobei* A *und* B *konstante Werte sind.* In der Arbeit [1] hat sich I. FENYŐ mit solcher Lösungen der Funktionalgleichung (1) befaßt, die Distributionen sind.

In dieser Arbeit werden wir uns mit den (L)-integrierbaren [2]) Lösungen der Funktionalgleichung (1) auf dem Intervall $(0, 1)$ beschäftigen. In unseren Untersuchungen werden wir drei Fälle unterscheiden:

A. Die Funktionalgleichung (1) gilt für alle $x, y \in (0, 1)$, $(f\colon (0, 1) \to R)$;

B. Die Funktionalgleichung (1) gilt für alle $x, y \in [0, 1]$, $(f\colon [0, 1] \to R)$;

C. Die Funktionalgleichung (1) gilt für alle $x, y \in R$, $(f\colon R \to R)$.

Wir bemerken, daß die Größen xy und $x+y-xy$ in dem Intervall $(0, 1)$ bzw. $[0, 1]$ liegen, wenn x und y aus $(0, 1)$ bzw. $[0, 1]$ gewählt sind. In **1.** betrachten wir die Fälle A. und B. In **2.** behandeln wir den Fall C.

1. Erstens betrachten wir die Funktionalgleichung

$$f(xy)+f(x+y-xy) = f(x)+f(y) \qquad x, y \in (0, 1), \tag{1. A}$$

wobei f : $(0, 1) \to R$ eine unbekannte Funktion ist.

---

[1]) Kolloquium über die Funktionalgleichungen, Zakopane, 1967.

[2]) Hier bedeutet die (L)-Integrierbarkeit die Integrierbarkeit im Lebesgueschen Sinne (S. [2]).

Satz 1. *Ist $f(x)$ eine auf dem Intervall $(0, 1)$ (L)-integrierbare Lösung der Funktionalgleichung (1. A), so gilt die Darstellung*

$$f(x) = Ax+B \qquad x\in(0, 1),$$

wobei A und B beliebige Konstanten sind.

Beweis. Integrieren wir die Gleichung (1. A) auf $(0, 1)$ nach y, so gilt

$$\int_0^1 f(xy)\,dy+\int_0^1 f(x+y-xy)\,dy = f(x)+\int_0^1 f(y)\,dy$$

für alle $x\in(0, 1)$. Daraus folgt mit den Substitutionen $xy=t$ bzw. $x+y-xy = t$

$$f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt+\frac{1}{1-x}\int_x^1 f(t)\,dt-\int_0^1 f(t)\,dt.$$

Es sei jetzt

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt \quad \text{falls} \quad x\in(0, 1) \quad \text{und} \quad a=\int_0^1 f(t)\,dt,$$

dann erhalten wir aus der obigen Gleichung

$$f(x) = \frac{1-2x}{x(1-x)}F(x)+\frac{ax}{1-x} \qquad x\in(0, 1). \tag{3}$$

Wegen der (L)-Integrierbarkeit von $f(t)$ ist $F(x)$ in $(0, 1)$ *stetig*; aber dann ist $f(x)$ in $(0, 1)$ wegen der Darstellung (3) auch *stetig*. Daraus ergibt sich, daß $F(x)$ in $(0, 1)$ *differenzierbar* ist und es gilt

$$F'(x)=f(x) \qquad x\in(0, 1). \tag{4}$$

Aus (4) und (3) erhalten wir die Differentialgleichung

$$F'(x)-\frac{1-2x}{x(1-x)}F(x) = \frac{ax}{1-x} \qquad x\in(0, 1) \tag{5}$$

für die Funktion $F(x)$. Es ist bekannt, daß die allgemeine Lösung der Gleichung (5)

$$F(x) = \frac{A}{2}x^2+Bx$$

ist. Daraus ergibt sich mit der Berücksichtigung von (4)

$$f(x) = F'(x) = Ax+B$$

für alle $x\in(0, 1)$, wobei A und B konstante Werte sind. Damit haben wir den Satz bewiesen.

Zweitens betrachten wir die Funktionalgleichung

$$f(xy)+f(x+y-xy) = f(x)+f(y) \qquad x, y\in[0, 1], \tag{1. B}$$

wobei $f:[0, 1]\to R$ eine unbekannte Funktion ist. Dann gilt der

Satz 2. *Ist $f(x)$ eine auf dem Intervall $(0, 1)$ (L)-integrierbare Lösung der Funktionalgleichung* (1. B), *so hat $f(x)$ die Form*

$$f(x)=\begin{cases} a & \textit{falls} \quad x=0 \\ Ax+B & \textit{falls} \quad x\in(0,1) \\ b & \textit{falls} \quad x=1, \end{cases} \tag{6}$$

wobei die Konstanten a, A, B und b beliebig wählbar sind.

Beweis. Nach dem Satz 1 ist $f(x)=Ax+B$ falls $x\in(0,1)$. Es sei $f(0)=a$ und $f(1)=b$. Dann hat $f(x)$ die Form (6). Andererseits kann man leicht prüfen, daß die Funktion (6) bei den beliebigen Konstanten a, A, B und b eine Lösung der Gleichung (1. B) ist.

Bemerkung. Aus der Lösung (6) folgt: Es existiert eine auf dem Intervall $(0, 1)$ (L)-integrierbare Lösung von (1. B), die in den Punkten $x=0$ und $x=1$ *nicht stetig* ist.

2. Wir betrachten jetzt die Funktionalgleichung

$$f(xy)+f(x+y-xy)=f(x)+f(y) \qquad x, y\in R, \tag{1. C}$$

wobei $f: R\to R$ eine unbekannte Funktion ist. Erstens beweisen wir das folgenden

Lemma. *Ist $f(x)$ eine Lösung der Funktionalgleichung* (1. C), *für die $f(x)=0$ falls $x\in(0,1)$ erfüllt ist, so gilt $f(x)=0$ für alle $x\in R$.*

Beweis. Wir führen die Funktion $\varphi(t)=t+\frac{1}{t}-1$ ein. Man kann leicht zeigen, daß die Funktion $\varphi(t)$ im Intervall $(1,\infty)$ *streng monoton wachsend* ist, und es gilt die Ungleichung $1<\varphi(t)<t$ für alle $t\in(1,\infty)$.

Es sei jetzt t, $t_0\in(1,\infty)(t<t_0)$ beliebig und wir setzen in (1. C) $x\in\left(0, \frac{1}{t_0}\right)$, $y=t_0$. Dann erhalten wir die Gleichung

$$f(x+t_0-xt_0)=f(x)+f(t_0)-f(xt_0)=f(t_0)$$

für alle $x\in\left(0, \frac{1}{t_0}\right)$. Mit der Bezeichnung $u=x+t_0-xt_0$ folgt dann

$$f(u)=f(t_0) \quad \text{falls} \quad u\in(\varphi(t_0), t_0). \tag{7}$$

Es gilt offenbar die Gleichung (1. C), auch für $u=t_0$.

Wir zeigen, daß (7) auch im Punkt $u=\varphi(t_0)$ richtig ist. Wir betrachten eine Zahl $\xi_0\in(\varphi(t_0), t_0)$, so gilt (7) für alle $u\in(\varphi(\xi_0), \xi_0)$, woraus — wegen $\varphi(t_0)\in\in(\varphi(\xi_0), \xi_0)$ —

$$f[\varphi(t_0)]=f(t_0)$$

folgt. Nun definieren wir die Folge $t_1, t_2, \dots$ durch die rekursive Formel

$$t_{n+1}=t_n+\frac{1}{t_n}-1=\varphi(t_n) \qquad (u=1, 2, \dots).$$

Diese Folge ist streng monoton abnehmend und es gilt — wegen der Eigenschaft von $\varphi(t)$ — $\lim_{n\to\infty} t_n=1$. Aus (7) folgt mit vollständiger Induktion

$$f(u)=f(t_0) \quad \text{falls} \quad u\in[t_n, t_0].$$

Wählt man eine natürliche Zahl n mit $t_n<t<t_0$, so gilt diese Behauptung auch für $u=t$; d.h., es ist $f(t)=f(t_0)$. Damit haben wir gezeigt, daß die Funktion $f(x)$ im Intervall $(1, \infty)$ *konstant* ist. Wir bezeichnen diese Konstante mit c. Setzen wir in (1. C) $x=2$ und $y\geqq 2$, so erhalten wir $f(y-2)=c$, woraus — mit der Bezeichnung $t=y-2$ — folgt $f(t)=c$ falls $t\in(-\infty, c]$. Mit den Substitutionen $x=2, y=\frac{1}{2}$; bzw. $x=-2$, $y=-\frac{1}{2}$ erhalten wir aus (1. C) $f(1)=c=0$. Damit haben wir die Gleichung $f(x)=0$ für alle $x\in R$ gezeigt.

Satz 3. *Ist $f(x)$ eine Lösung der Funktionalgleichung* (1. C), *und ist $f(x)$ auf dem Intervall* (0, 1) *(L)-integrierbar, so hat $f(x)$ die Gestalt*

$$f(x) = Ax+B \qquad x\in R,$$

wobei die Konstanten A und B beliebig wählbar sind.

Beweis. Nach dem Satz 1. gilt

$$f(x) = Ax+B$$

für alle $x\in(0, 1)$. Wir werden beweisen, daß diese Darstellung für alle $x\in R$ gilt.

Wir definieren die Funktion $g(x)=f(x)-Ax-B$ für alle $x\in R$. Dann ist $g(x)$ eine Lösung der Gleichung (1. C) und $g(x)=0$ falls $x\in(0, 1)$. Nach dem Lemma gilt dann, daß $g(x)$ identisch verschwindet; d.h. $f(x)=Ax+B$ für alle $x\in R$.

Literatur

[1] I. Fenyő, On the general solution of a functional equation in the domain of distributions. Aequationes Mathematicae (unter Druck).

[2] I. P. Natanson, Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen. *Berlin,* 1954.

[3] H. Świątak, On the functional equation $f(x+y-xy)+f(xy)=f(x)+f(y)$. *Mat. Vesnik* **5** (20), (1968), 177—182.

(Eingegangen am 22. Januar 1968.)