Über den Raum der Δ^2-stetigen Funktionen

Von M. TASCHE (Rostock)

K. Bögel untersuchte in [1] reellwertige Funktionen zweier reeller Variabler und führte den Begriff der Δ^2-Stetigkeit ein.

Eine besonders einfache Darstellung unter den Δ^2-stetigen Funktionen gestatten die total-Δ^2-stetigen Funktionen, die im ersten Abschnitt der Arbeit betrachtet werden. Nachdem wir in Teil 2) die Banachräume $C^2(I)$ bzw. $T^2(I)$ aller Δ^2-stetigen bzw. total-Δ^2-stetigen Funktionen eingeführt haben, stellen wir im Hauptteil 3) verallgemeinerte Sätze von Arzelá—Ascoli in diesen Räumen auf. Dabei werden auch gleich die Arbeiten [4], [5] von E. Dobrescu und I. Sălăgean richtiggestellt. Am Ende machen wir noch eine Bemerkung zum Darstellungssatz für lineare Funktionale in einem Teilraum von $C^2(I)$.

1. Wir betrachten reellwertige Funktionen $f: R^2 \to R$ zweier reeller Variabler.

Definition. *Die Funktion $f: R^2 \to R$ heißt Δ^2-stetig im Punkt $(x_0, y_0) \in R^2$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß*

$$|f(x_0, y_0) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0 + h, y_0 + k)| < \varepsilon$$

für beliebige $h, k \in R$ mit $|h| < \delta$, $|k| < \delta$ gilt.

Wie K. Bögel in [1] zeigte, ist die Funktion f genau dann Δ^2-stetig im Punkt (x_0, y_0), wenn f sich in der Form

$$f(x, y) = g(x, y) + g_1(x) + g_2(y) \tag{1}$$

darstellen läßt, wobei $g(x, y)$ in (x_0, y_0) stetig ist und $g_1(x)$, $g_2(y)$ gewisse Funktionen einer Variablen sind.

Eine Funktion f, die in allen Punkten eines (zweidimensionalen) Intervalles Δ^2-stetig ist, läßt i.a. nicht die gleiche Zerlegung (1) für alle Punkte des Intervalles zu (Siehe [1], [7] S. 428). Ein Beispiel für solch eine Funktion ist

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & y \neq 0, \\ x & y = 0. \end{cases}$$

Es ergibt sich die Frage: Welche Δ^2-stetigen Funktionen gestatten eine Darstellung (1), in der g eine überall stetige Funktion ist?

Definition. *Die Funktion* $f: R^2 \to R$ *heißt total-*Δ^2*-stetig im Punkt* $(x_0, y_0) \in R^2$, *wenn es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $\delta > 0$ *gibt, so daß*

$$|f(x_0, y_0) - f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0+k) + f(x_0+h, y_0+k)| < \varepsilon$$

für beliebige $h, k \in R$ *mit* $|hk| < \delta$ *gilt.*

Eine total-Δ^2-stetige Funktion ist natürlich auch Δ^2-stetig.
Der folgende Satz beantwortet nun die gestellte Frage.

Satz 1. *Die Funktion* $f: R^2 \to R$ *ist genau dann in allen Punkten eines Intervalles* I *total-*Δ^2*-stetig, wenn* f *sich in der Form*

$$f(x, y) = g(x, y) + g_1(x) + g_2(y)$$

darstellen läßt, wobei $g(x, y)$ *in* I *stetig ist und* $g_1(x)$, $g_2(y)$ *gewisse Funktionen einer Variablen sind.*

Beweis. Es sei (a, b) ein fester, innerer Punkt von I und

$$g(x, y) = f(a, b) - f(x, b) - f(a, y) + f(x, y),$$
$$g_1(x) = f(x, b) + f(a, b),$$
$$g_2(y) = f(a, y).$$

Da $f(x, y) = g(x, y) + g_1(x) + g_2(y)$ ist, zeigen wir nun, daß g in jedem Punkt $(x_0, y_0) \in I$ stetig ist. Wir wollen annehmen, daß $x_0 \neq a$, $y_0 \neq b$ ist. (Anderenfalls kann der Beweis kürzer geführt werden.)

$\varepsilon > 0$ sei beliebig. Da f in (x_0, y_0) total-Δ^2-stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$, so daß für $(x, y) \in I$ mit $|x - x_0|\,|b - y_0| < \delta$, $|a - x_0|\,|y - y_0| < \delta$, $|x - x_0|\,|y - y_0| < \delta$ die Relationen

$$|f(x, b) - f(x_0, b) - f(x, y_0) + f(x_0, y_0)| < \varepsilon,$$
$$|f(a, y) - f(x_0, y) - f(a, y_0) + f(x_0, y_0)| < \varepsilon,$$
$$|f(x, y) - f(x_0, y) - f(x, y_0) + f(x_0, y_0)| < \varepsilon$$

gelten.

Ist $\delta_1 = \min\{|b - y_0|^{-1}\delta, |a - x_0|^{-1}\delta, \delta^{\frac{1}{2}}\}$, so gilt für $(x, y) \in I$ mit $|x - x_0| < \delta_1$, $|y - y_0| < \delta_1$ die Abschätzung

$$|g(x, y) - g(x_0, y_0)| =$$
$$= |-f(x, b) - f(a, y) + f(x, y) + f(x_0, b) + f(a, y_0) - f(x_0, y_0)| < 3\varepsilon.$$

Folglich ist g im Punkt (x_0, y_0) stetig.

2. Es sei I ein abgeschlossenes endliches Rechteck in R^2. Auf I seien reellwertige Funktionen $f: I \to R$ definiert. Wir betrachten die Menge $C^2(I)$ aller auf I beschränkten und Δ^2-stetigen Funktionen $f: I \to R$. Wie man leicht zeigt, bildet $C^2(I)$ mit $\|f\| = \sup\{|f(x)|;\, x \in I\}$ als Norm einen Banachraum (Siehe [3]).

Die Menge $T^2(I)$ der auf I total-Δ^2-stetigen und beschränkten Funktionen ist in $C^2(I)$ enthalten.

Satz 2. *Der Raum* $T^2(I)$ *ist abgeschlossen.*

Beweis. Es sei f ein Häufungspunkt von $T^2(I)$ und $\varepsilon > 0$ eine beliebig vorgegebene Zahl. Dann gibt es eine Funktion $f_1 \in T^2(I)$, so daß $\|f_1 - f\| < \varepsilon$ ist.

Es sei $(x_0, y_0) \in I$ ein beliebiger Punkt. Da f_1 in (x_0, y_0) total-Δ^2-stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$, so daß für $(x, y) \in I$ mit $|x - x_0|\,|y - y_0| < \delta$ die Ungleichung

$$|f_1(x_0, y_0) - f_1(x_0, y) - f_1(x, y_0) + f_1(x, y)| < \varepsilon$$

gilt. Dann ist aber

$$\begin{aligned}|f(x_0, y_0) - f(x_0, y) - f(x, y_0) + f(x, y)| &\leqq |f(x_0, y_0) - f_1(x_0, y_0)| + \\ + |f(x_0, y) - f_1(x_0, y)| + |f(x, y_0) - f_1(x, y_0)| &+ |f_1(x_0, y_0) - \\ - f_1(x_0, y) - f_1(x, y_0) + f_1(x, y)| &< 5\varepsilon\end{aligned}$$

für $(x, y) \in I$ mit $|x - x_0|\,|y - y_0| < \delta$, d.h., auch f ist in (x_0, y_0) total-Δ^2-stetig.

Folglich gehört f zur Menge $T^2(I)$.

Da es in $C^2(I)$ Funktionen gibt, die nicht zu $T^2(I)$ gehören, ergibt sich die

Folgerung 3. *Der Raum $T^2(I)$ liegt in $C^2(I)$ nicht dicht.*

3. Wir wollen uns nun mit dem Problem befassen, wann eine Teilmenge H von $C^2(I)$ relativ kompakt ist. Dabei werden wir eine Verallgemeinerung der bekannten Satzes von Arzelá—Ascoli (Siehe [2]) erhalten.

Definition. *Die Funktionen einer Teilmenge $H \subset C^2(I)$ heißen gleichgradig Δ^2-stetig auf I, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß für beliebige Punkte (x, y), $(x', y') \in I$ mit $|x - x'| < \delta$, $|y - y'| < \delta$ die Beziehung*

$$|f(x, y) - f(x', y) - f(x, y') + f(x', y')| < \varepsilon$$

für alle $f \in H$ gilt.

Satz 4. *Eine Teilmenge $H \subset C^2(I)$ ist genau dann relativ kompakt, wenn*

1. *die Funktionen von H gleichgradig Δ^2-stetig sind und*
2. *für jedes feste $(u, v) \in I$ die Funktionenmengen*

$$H_u = \{f(u, y);\ f \in H\} \subset C^2(I) \quad \text{und}$$

$$H_v = \{f(x, v);\ f \in H\} \subset C^2(I)$$

relativ kompakt sind.

Beweis. *Notwendig.* Wenn H relativ kompakt ist, existieren zu einem beliebig vorgegebenen $\varepsilon > 0$ endlich viele Funktionen $f_i \in H$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ derart, daß es zu jedem $f \in H$ eine Funktion f_k $(k \in \{1, 2, \ldots, n\})$ mit $\|f - f_k\| < \varepsilon$ gibt. Da für jeden Punkt $(u, v) \in I$ nun

$$\begin{aligned}&|f(u, y) - f_k(u, y)| < \varepsilon \quad \text{für alle } y,\\ &|f(x, v) - f_k(x, v)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x\end{aligned} \tag{2}$$

gilt, sind die Mengen H_u, $H_v \subset C^2(I)$ relativ kompakt. δ sei so beschaffen, daß für beliebige Punkte (x, y), $(x', y') \in I$ mit $|x - x'| < \delta$, $|y - y'| < \delta$ die Ungleichungen

$$|f_i(x, y) - f_i(x', y) - f_i(x, y') + f_i(x', y')| < \varepsilon \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{3}$$

bestehen. Da eine in I überall Δ^2-stetige Funktion auch gleichmäßig Δ^2-stetig in I ist (Siehe [1]), läßt. sich dies sicher erreichen.

Dann gelten wegen (2) und (3) für eine beliebige Funktion $f \in H$ und alle Punkte (x, y), $(x', y') \in I$ mit $|x-x'| < \delta$, $|y-y'| < \delta$ die Abschätzungen

$$|f(x, y)-f(x', y)-f(x, y')+f(x', y')| \leqq |f(x, y)-f_k(x, y)| +$$
$$+|f_k(x', y)-f(x', y)|+|f_k(x, y')-f(x, y')|+|f(x', y')-$$
$$-f_k(x', y')|+|f_k(x, y)-f_k(x', y)-f_k(x, y')+f_k(x', y')| < 5\varepsilon.$$

Folglich sind die Funktionen der relativ kompakten Menge H gleichgradig Δ^2-stetig.

Hinreichend. Da $C^2(I)$ ein vollständiger Raum ist, brauchen wir nur zu zeigen, daß sich zu H für jedes $\varepsilon > 0$ ein endliches ε-Netz konstruieren läßt.

Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wegen Bedingung 1 gibt es ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, so daß die Ungleichung

$$|f(x, y)-f(x', y)-f(x, y')+f(x', y')| < \varepsilon$$

für alle Funktionen $f \in H$ und alle Punkte (x, y), $(x', y') \in I$ mit $|x-x'| < \delta$, $|y-y'| < \delta$ erfüllt ist. Wir zerlegen I in endlich viele Rechtecke $I_1, I_2, \ldots, I_s$, wobei der Durchmesser jedes I_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$ kleiner als δ sein soll. Aus jedem Intervall I_i wählen wir einen Punkt (x_i, y_i). Nach Voraussetzung sind die Mengen H_{x_i} und H_{y_i} $(i = 1, 2, \ldots, s)$ relativ kompakt, also auch die Vereinigungsmengen $M = \bigcup H_{x_i}$ und $N = \bigcup_{i=1}^{s} H_{y_i}$. Es seien deshalb $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\} \subset C^2(I)$ endliche ε-Netze von M bzw. N.

Es sei Φ die (endliche) Menge aller Abbildungen φ, die jeder natürlichen Zahl $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ ein Zahlentupel $(\alpha(i), \beta(i))$ zuordnen, wobei $\alpha(i) \in \{1, 2, \ldots, m\}$ und $\beta(i) \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sind. Für jedes $\varphi \in \Phi$ bedeute L_φ die Menge aller Funktionen $f \in H$, für die die Ungleichungen

$$|f(x_i, y)-a_{\alpha(i)}| < \varepsilon \quad \text{für alle } y \text{ und } i = 1, 2, \ldots, s,$$
$$|f(x, y_i)-b_{\beta(i)}| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \text{ und } i = 1, 2, \ldots, s$$

erfüllt sind. Aus der Definition der Größen $a_1, a_2, \ldots, a_m$; $b_1, b_2, \ldots, b_n$ ergibt sich, daß H durch die Vereinigung aller L_φ überdeckt wird. (Einige Mengen L_φ können leer sein.) Zum Schluß beweisen wir nun noch, daß der Durchmesser jeder Menge L_φ kleiner als 8ε ist.

Es seien f und g zwei beliebige Funktionen aus L_φ. Zu einem beliebigen Punkt $(x, y) \in I$ gibt es einen Index i, so daß $(x, y) \in I_i$ ist. Nach unserer Konstruktion von I_i sind

$$|f(x_i, y_i)-f(x_i, y)-(x, y_i)+f(x, y)| < \varepsilon \tag{4}$$

und

$$|g(x_i, y_i)-g(x_i, y)-g(x, y_i)+g(x, y)| < \varepsilon.$$

Da f, $g \in L_\varphi$, gelten die Beziehungen

$$|f(x_i, y)-g(x_i, y)| < 2\varepsilon,$$
$$|f(x, y_i)-g(x, y_i)| < 2\varepsilon \tag{5}$$

und

$$|f(x_i, y_i)-g(x_i, y_i)|<2\varepsilon.$$

Aus den Relationen (4) und (5) folgt, daß

$$|f(x, y)-g(x, y)| \leqq |f(x, y)-f(x, y_i)-f(x_i, y)+f(x_i, y_i)|+$$

$$+|g(x, y)-g(x, y_i)-g(x_i, y)+g(x_i, y_i)|+$$

$$+|f(x_i, y)-g(x_i, y)|+|f(x, y_i)-g(x, y_i)|+$$

$$+|f(x_i, y_i)-g(x_i, y_i)|<8\varepsilon$$

ist.

Greifen wir also aus jeder der endlich vielen (nichtleeren) Mengen L_φ ein Element heraus, so bildet die Menge dieser Funktionen ein 8ε-Netz von H.

Mit denselben Schritten wie im vorigen Beweis können wir den folgenden Satz aufstellen.

Satz 5. *Eine Teilmenge $H\subset C^2(I)$ ist genau dann relativ kompakt, wenn*
1. *die Funktionen von H gleichgradig Δ^2-stetig sind und*
2. *für jedes feste $(u, v)\in I$ die Funktionenmenge*

$$H_{uv} = \{f(u, y)+f(x, v);\ f\in H\}\subset C^2(I)$$

relativ kompakt ist.

Wir erkennen sofort, daß in der Sätzen 4 und 5 besonders die Bedingung 2 sehr stark ist. Dort fordern wir, daß gewisse Mengen, die von einem aus I gewählten Punkt (u, v) abhängen, für *jedes* $(u, v)\in I$ relativ kompakt sind. Genügt es nicht schon, wenn wir nur voraussetzen, daß die Bedingung 2 für einen *einzigen* Punkt aus I erfüllt ist? Wie wir an einem Beispiel sehen werden, gelten bei solch einer Abschwächung der Bedingung 2 die Sätze 4 und 5 im Raum $C^2(I)$ nicht mehr.

Beispiel. Es sei $\{y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots\}$ die Menge der rationalen Zahlen, die im Intervall $[0, 1]$ liegen. Wir betrachten die Familie H der auf $I=[0, 1]\times[0, 1]$ definierten Funktionen

$$f_i(x, y)=\begin{cases} 0 & y \text{ irrational},\\ x & y \text{ rational},\ y\neq y_i,\\ \left.\begin{array}{ll} x & x\in[0, \frac{1}{2}) \\ 1-x & x\in[\frac{1}{2}, 0)\end{array}\right\} & y=y_i.\end{cases} \qquad (i=1, 2, 3, \ldots)$$

Die Menge H hat folgende Eigenschaften:

1. Die Funktionen von H sind auf I gleichgradig Δ^2-stetig, weil jede Funktion $f_i\in H$ und alle Punkte (x, y), $(x', y')\in I$ die Beziehung

$$|f_i(x, y)-f_i(x', y)-f_i(x, y')+f_i(x', y')|\leqq 2|x-x'|$$

erfüllen.

2. Es gibt Punkte (u, v) in I, so daß die Funktionenmengen $H_u=\{f_i(u, y); f_i\in H\}$

und $H_v = \{f_i(x, v); f_i \in H\}$ relativ kompakt sind. Betrachten wir z.B. den Punkt $\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ so bestehen die beiden Mengen jeweils nur aus einem Element:

$$f_i(\tfrac{1}{2}, y) = \begin{cases} 0 & y \text{ irrational} \\ \tfrac{1}{2} & y \text{ rational} \end{cases} \quad \text{für} \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

$$f_i\left(x, \frac{\pi}{4}\right) \equiv 0 \qquad \text{für} \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Folglich sind die beiden Mengen H_u und H_v trivialerweise kompakt.

3. Die Menge H ist nicht relativ kompakt, weil für beliebige, voneinander verschiedene Funktionen $f_i, f_j \in H$ stets $\| f_i - f_j \| = 1$ ist.

Im Raum $T^2(I)$ der total-Δ^2-stetigen Funktionen lassen sich nun einfachere Bedingungen für die Gültigkeit des verallgemeinerten Arzelaschen Satzes angeben.

Definition. *Die Funktionen einer Teilmenge $H \subset T^2(I)$ heißen gleichgradig total-Δ^2-stetig auf dem Intervall I, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß für beliebige Punkte (x, y), $(x', y') \in I$ mit $|x - x'|\,|y - y'| < \delta$ die Beziehung*

$$|f(x, y) - f(x', y) - f(x, y') + f(x', y')| < \varepsilon$$

für alle $f \in H$ gilt.

Satz 6. (Siehe [4]). *Eine Teilmenge $H \subset T^2(I)$ ist genau dann relativ kompakt, wenn*

1. *die Funktionen von H gleichgradig total-Δ^2-stetig und gleichmäßig beschränkt sind sowie*

2. *für ein gewisses $(a, b) \in I$ die Funktionenmengen*

$$H_a = \{f(a, y);\ f \in H\} \subset T^2(I)$$

und

$$H_b = \{f(x, b);\ f \in H\} \subset T^2(I)$$

relativ kompakt sind.

Beweis. Die *Notwendigkeit* läßt sich wie bei Satz 4 zeigen.

Hinreichend. Jede Funktion $f \in H$ läßt sich nach Satz 1 in der Form $f(x, y) = g(x, y) + g_1(x) + g_2(y)$ darstellen, wobei $g_1(x) = f(x, b) - f(a, b)$, $g_2(y) = f(a, y)$ sind und $g(x, y) = f(x, y) - f(x, b) - f(a, y) + f(a, b)$ in I stetig ist. Da die Funktionen von H gleichgradig total-Δ^2-stetig und gleichmäßig beschränkt sind, sind (wie wir aus dem Beweis von Satz 1 ersehen können) die Funktionen g gleichgradig stetig und gleichmäßig beschränkt. Nach dem Satz von Arzelá—Ascoli ist die Menge $G = \{g(x, y) = f(x, y) - f(x, b) - f(a, y) + f(a, b);\ f \in H\}$ relativ kompakt.

Laut Voraussetzung sind die Mengen $H_a = \{f(a, y); f \in H\}$, $H_b = \{f(x, b); f \in H\}$ und $K = \{f(a, b); f \in H\}$ relativ kompakt. Da nun auch die algebraische Summe $G + H_a + H_b - K$, die H enthält, relativ kompakt ist, ist H relativ kompakt.

Aus Satz 6 folgt sofort

Satz 7. (Siehe [5]). *Eine Teilmenge $H \subset T^2(I)$ ist genau dann relativ kompakt, wenn*

1. *die Funktionen von H gleichgradig total-Δ^2-stetig und gleichmäßig beschränkt sind und*

2. *für ein gewisses $(a, b) \in I$ die Funktionenmenge*

$$H_{ab} = \{f(a, y) + f(x, b);\ f \in H\} \subset T^2(I)$$

relativ kompakt ist.

Bemerkung. Die Sätze 6 und 7 wurden bereits von E. Dobrescu und I. Sâlâgean in ihren Arbeiten [4], [5] bewiesen. Dazu muß aber bemerkt werden, daß diese Sätze nicht, wie in [4], [5] behauptet wird, im Raum $C^2(I)$ gelten, sondern nur im Raum $T^2(I)$ richtig sind. Unser Beispiel demonstriert dies in sehr anschaulicher Form.

4. Eine Funktion $f: R^2 \to R$, die Δ^2-stetig im Intervall I ist, ist i.a. nicht meßbar. Ist z.B. $M \subset [0, 1]$ eine nicht meßbare Menge, so ist die Funktion $f: [0, 1] \times [0, 1] \to R$

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & x \notin M \\ 1 & x \in M \end{cases}$$

Δ^2-stetig und nicht meßbar.

Wie in [8] gezeigt wurde, gibt es aber eine Klasse von Δ^2-stetigen Funktionen, die, falls sie eine meßbare Majorante besitzen, stetig und somit meßbar sind.

Wir wollen nun den Raum $C^2_m(I)$ aller meßbaren Funktionen aus $C^2(I)$ betrachten und für die linearen Funktionale im Raum $C^2_m(I)$ eine analytische Darstellung finden.

Satz 7. (Siehe [6], S. 188—197.) *Die allgemeine Form eines linearen Funktionals φ im Raum $C^2_m(I)$ ist durch das Lebesgue—Stieltjes-Integral*

$$\varphi(f) = \int_I f \, d\Phi \qquad f \in C^2_m(I)$$

mit einer beliebigen Intervallfunktion Φ von beschränkter Variation gegeben. Dabei läßt sich Φ so wählen, daß

$$\|\varphi\| = \bar{\Phi}(I)$$

gilt, wobei $\bar{\Phi}(I)$ die totale Variation von Φ ist.

Literatur

[1] K. Bögel, Über die mehrdimensionale Differentation, *Jber. Deutsch. Math.-Verein.* **65** (1962), 45—71.

[2] J. Dieudonné, Foundations of Modern Analysis, *New York*, 1960.

[3] E. Dobrescu, Contributii la o analiză infinitezimală bidimensională, *Stud. Cerc. Mat.* **8** (1957), 103—130.

[4] E. Dobrescu—I. Sâlâgean, O extindere a criteriului de compacitate al lui Arzelá, *Com. Acad. Romîne, R. P.* **9** (1959), 216—221.

[5] E. Dobrescu—I. Sâlâgean, Asupra unui criteriu de compacitate pentru functiile hiperbolic continue, *Com. Acad. R. P.* **9** (1959), 419—424.

[6] L. W. Kantorowitsch—G. P. Akilow, Funktionalanalysis in normierten Räumen, *Berlin*, 1964.

[7] M. Nicolescu, Analiză matematică II, *Bucureşti*, 1957.

[8] M. Tasche, Über Funktionen, die Δ^2-stetig bzw. stetig von 2. Ordnung sind, in Vorbereitung.

(Eingegangen am 20. Februar, 1968.)