Perspektivdeutung einer speziellen hyperbolischen oder parabolischen Netzprojektion

Von Dr. AURELIAN TĂNĂSESCU (Bucureşti)

a) Einleitung

Im vorliegenden Beitrag werden wir eine Perspektivinterpretation einer besonderen Netzprojektion angeben, die durch eine Regelstrahlfläche zweiter Ordnung mit Leitebene (Ψ, S, D) definiert wurde, und die aus einer speziellen Biaxialprojektion mittels Durchführung einer topologischen Wandlung Ψ_A zwischen den Punkten zweier disjunkten Linearräumen S und D abgeleitet wurde [1].

In dieser Weise wurde einerseits eine ein-eindeutige Korrespondenz zwischen den Punkten der allgemeinen Geraden D und dem Netz von Parabeln Γ_A, andererseits zwischen den Punkten derselben allgemeinen Geraden D und dem Netz von Hyperbolen Γ_A erzielt, die durch topologische Wandlung (Ψ_A, θ) definiert ist, wobei θ das Winkelmodul des Risses ist.

Diese Netze Γ_A von Parabeln oder von Hyperbolen wurden als Schnitte in den kegeligen Flächen $(A_s C_A)$, die durch den Punkt A_S, also vom Zentrum des speziellen Linearkomplexes und von den Leitkurven C_A — das Kreisbündel $C_A = (s, d, D_A^\pi)$ — definiert wurden, erzeugt mit den Grundpunkten s und d (die Spuren der Linearräume auf eine nicht parallele und nicht senkrechte Bezugsebene gegenüber der disjunkten Geraden S und D), wo die Gesamtheit der Spuren (d, D_A^Π) den Netzriss der allgemeinen Geraden D in topologischer Wandlung Ψ_A definieren ([2], [3]).

Gleichfalls wurden die zu diesen kegeligen Flächen (A_S, C_A) tangenten Ebenen T_A entlang der vom Netzstrahl G_A gebildeten Erzeugenden geführt.

b) Perspektivdeutung

Sei Ω der Gesichtspunkt und P_Ω der Hauptpunkt, d.h. die orthogonale Projektion auf der Perspektivtafel Π des Gesichtspunktes. Offensichtlich ist P_Ω der Mittelpunkt des Distanzkreises C_{Ω_0} dessen Radius gleich der Hauptdistanz ist. (Fig. 1).

Die Fluchtpunkte beider disjunkten Linearräume S und D (Stützgerade S und allgemeine Gerade D) werden s^* bzw. d^* sein. Sei gleichfalls P^{Ψ^*} die Fluchtlinie des Ebenenbündels P_A parallel zur Leitebene Ψ der Strahlfläche zweiter Ordnung, die vom hyperbolischen Paraboloid (Ψ, S, D) gebildet ist. Dieses hyperbolische

Paraboloid gestattet eine zweite Leitebene Ψ', für die wir die von uns in dieser Perspektivdeutung gemachten Überlegungen wieder aufnehmen könnten.

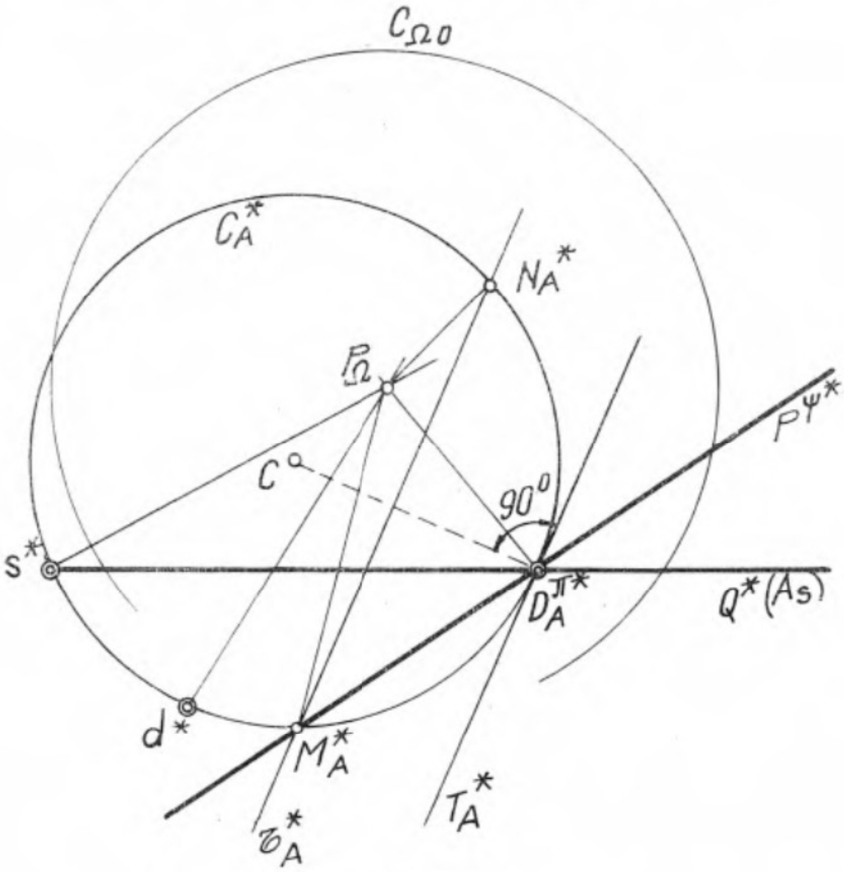

Fig. 1

Wir haben gezeigt, daß die Gesamtheit der Netzrisse der Punkte der allgemeinen Geraden D mit der Gesamtheit der Netzrisse G_A zusammenfallen. Unter diesen Umständen können wir folgendes formulieren:

Satz 1. *Die Fluchtlinie P^{Ψ^*} ist der geometrische Ort der Fluchtpunkte $D_A^{\Pi^*}$ für die Gesamtheit der Netzstrahlen G_A, durch die die topologische Wandlung (Ψ_A, θ) zwischen den disjunkten Linearräumen S und D festgestellt wird.*

Da der Netzriss D_A^{Π} des Netzstrahles G_A eindeutig bestimmt ist, wie auch der Punkt A_S eindeutig bestimmt ist, können wir den speziellen linearen Geradenkomplex betrachten, in dem der Mittelpunkt des Linearkomplexes A_S ist und die Unterlage des Linearkomplexes die Spur $Q(A_s)$ der von den Elementen (S, D_A^{Π}) definierten Ebene ist.

Demnach können wir wiederum formulieren:

Satz 2. *Die Fluchtlinie $Q^*(A_s)$ ist der geometrische Ort der Fluchtpunkte für die Gesamtheit des speziellen linearen Strahlenkomplexes des Mittelpunktes A_s und der Unterlage $Q(A_s)$.*

Für die kegeligen Flächen (A_S, C_A) die vom Mittelpunkt A_S des besonderen linearen Komplexes und des Kreisenbündels $C_A=(s, d, D_A^{\Pi})$ definiert sind, wird in der Tafel der Kreisenbündel $C_A^*=(s^*, d^*, D_A^{\Pi^*})$ entsprechen, der von den festen Fluchtpunkten s^* und d^* als Grundpunkte des Bündels definiert ist und durch den Fluchtpunkt $D_A^{\Pi^*}$ der unter den Bedingungen des oberen Satzes 1. veränderlich ist. Also:

Satz 3. *Der Kreisenbündel C_A^* ist der geometrische Ort der Fluchtpunkte für die Erzeugenden der kegeligen Flächen (A_S, C_A).*

Satz 4. *Die Fluchtlinie p^{Ψ^*} ist im allgemeinen eine Sekante für den Bündel von Kreisen C_A^*, wobei einer der Schnittpunkte $D_A^{\Pi^*}$ ist.*

Bezeichnen wir gleichfalls mit M_A^* den zweiten Schnittpunkt zwischen der Fluchtlinie P^{Ψ^*} und den Bündel von Kreisen C_A^*.

Betrachten wir gleichfalls die sichtbare kegelige Fläche (Ω, C_A^*), bei der die Radialebene T_A^* tangent entlang des sichtbaren Strahls $\Omega D_A^{\Pi^*}$ ist (Fig. 2).

Ziehen wir durch den Punkt M_A^* in der Zeichnungsebene eine Gerade τ_A^* parallel zur Fluchtlinie T_A^* der tangenten Radialebene. Bedeutet $\tau_A^* \| T_A^*$ eine Fluchtlinie

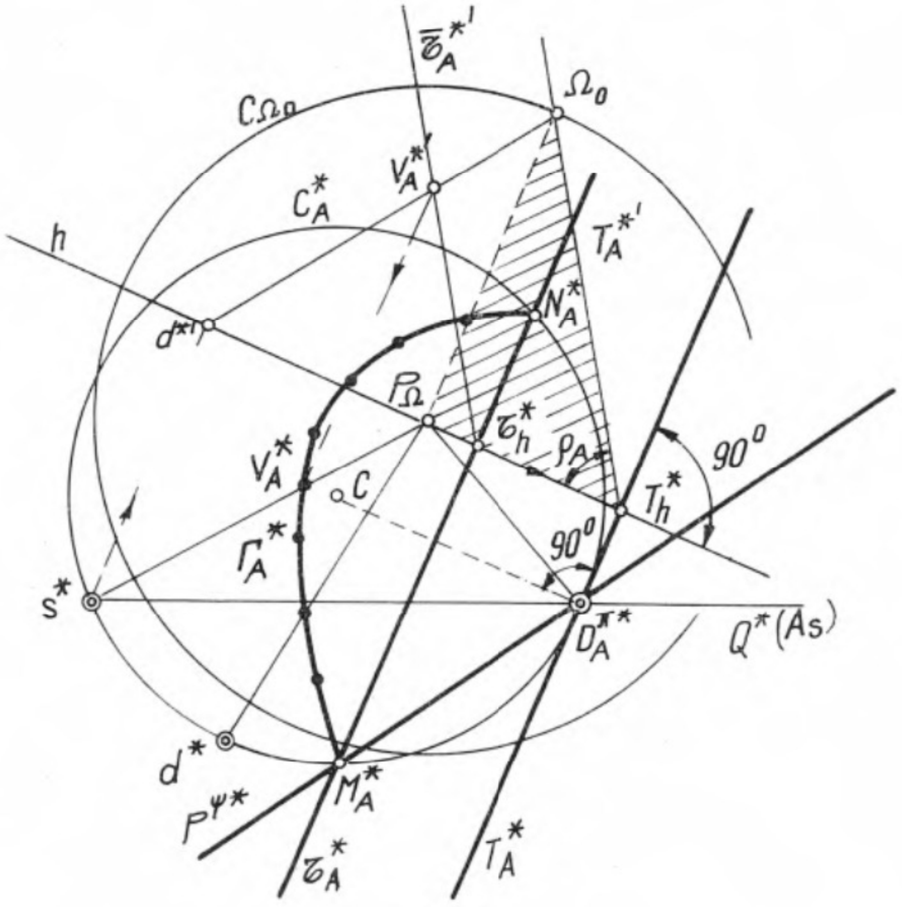

Fig. 2

dann, erscheint uns die Gerade als eine Fluchtlinie des Ebenenbündels, welches parallel zu den Erzeugenden $A_S M_A$ und $A_S N_A$ der kegeligen Flächen (A_S, C_A) ist.

Also $\tau_A^* \| T_A^*$ ist die durch den Fluchtpunkt M_A^* geführte Fluchtlinie der radialen Ebene. Diese radiale Ebene durchschneidet die sichtbare kegelige Fläche (Ω, C_A) nach den Erzeugenden ΩM_A^* und ΩN_A^*.

Sei ϱ_A der von der Fluchtlinie T_A^* definierte Winkel der Tangentialebene Zeichnungsebene, und sei $\bar{\tau}_A^*$ eine zu dieser Tangentialebene parallele Ebene mit der sichtbaren kegeligen Fläche, (Ω, C_A^*), deren Spur auf der Zeichnungebene auch τ_A^* sein soll. Die Ebene τ_A^* ist eindeutig bestimmt und durchschneidet die sichtbare kegelige Fläche (Ω, C_A^*) nach einer Parabel Γ_A^*. Also:

Satz 5. *Einem jeden Punkt A_D der allgemeinen Geraden D entspricht in topologischer Wandlung (Ψ_A, θ) eine Parabel Γ_A^* als ein Schnitt in der sichtbaren kegeligen Fläche (Ω, C_A^*).*

Die Überlegung, die uns zur Formulierung des Satzes 5 geführt hat, kann zur Formulierung einer anderen Schlußfolgerung führen, wenn wir anstatt der oben erwähnten Betrachtung der Ebene $\bar{\tau}_A^*$ feststellen, daß die Perspektivstrahlen Ωd^* und ΩD_A^{II*}, unter den Bedingungen des Satzes 2, durch die Fluchtlinie $Q^*(A_S)$ zwei

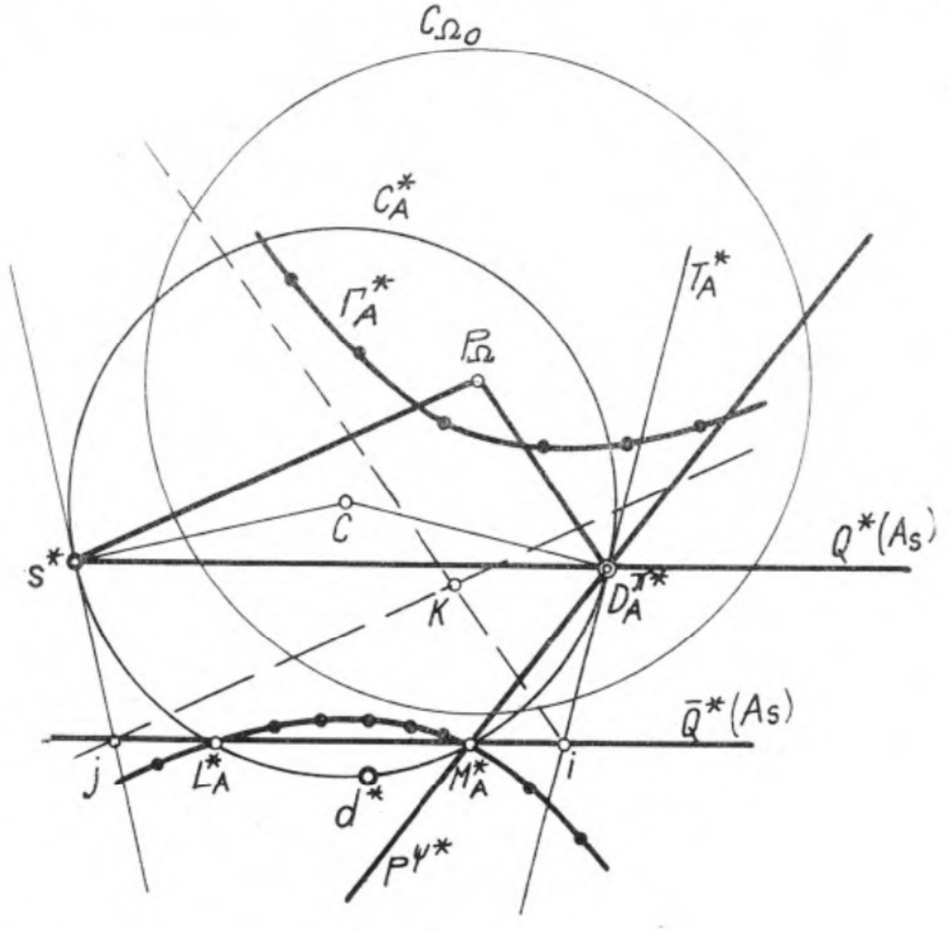

Fig. 3

in der sichtbaren kegeligen Fläche (Ω, C_A^*) assymptotische Leitlinien definieren (Fig. 3).

Unter diesen Umständen sei ε_A der Winkel der Zeichnungsebene und der Ebene die Gesamtheit der Strahlen des linearen Komplexes des Mittelpunktes A_S und der Unterlage $Q(A_S)$ enthält. Ziehen wir durch den Fluchtpunkt M_A^* die Ebene $\bar{Q}^*(A_S)$ parallel zur radialen Ebene, die durch den Satz 2. definiert ist. Diese Ebene $\bar{Q}^*(A_S)$ ist gleichfalls eindeutig bestimmt und durchschneidet die sichtbare kegelige Fläche (Ω, C_A^*) in einer Hyperbel Γ_A^*. Folglich können wir sagen:

Sazt 6. *Einem jeden Punkt A_D der allgemeinen Geraden D entspricht in topologischer Wandlung (Ψ_A, θ) eine Hyperbel Γ_A^* als Schnitt in der sichtbaren kegeligen Fläche (Ω, C_A^*).*

c) Die Verbindung mit der Methode der Paraspuren

Da die Methode der Paraspuren organisch an der Methode der Perspektivprojektion gebunden ist, werden wir natürlich eine Deutung auch aus diesen Gesichtspunkt für die in diesem Beitrag erörterten Dinge suchen [4]. Es behindert uns in diesem Sinn nichts im Gesichtspunkt Ω den Mittelpunkt des Darstellungssystem der Methode der Paraspuren zu betrachten. In diesem Fall kann die Konstante des Darstellungssystems, die im allgemeinen im Verhältniß zum Mittelpunkt beliebig gewählt werden kann, eben die Hauptdistanz sein, so daß unter diesen Umständen der Riß der Paraspuren der geometrischen Elemente selbst die Perspektivtafel ist. Selbstverständlich werden die Paraspuren der beiden disjunkten Linearräume S und D s^* bzw. d^* sein [5].

Die ersten vier oben festgestellten Sätze können in der neuen Auffassung auch folgendermassen formuliert werden:

Satz 1'. *Die Paraspur P^{Ψ^*} schließt die Paraspuren D_A^{Π} der Netzstrahlen G_A ein, durch die topologische Wandlung (Ψ_A, θ) zwischen den disjunkten Linearräumen S und D festgestellt wird.*

Satz 2'. *Die Paraspur des besonderen linearen Mittelpunktkomplexes A_S und der Unterlage $Q(A_S)$ ist $Q^*(A_S)$.*

Satz 3'. *Die Paraspur der kegeligen Flächen (A_S, C_A) ist der Kreis C_A^*.*

Satz 4'. *Im Kreis C_A^* ist die Paraspur P^{Ψ^*} eine Sekante die immer durch die Paraspur $D_A^{\Pi^*}$ geführt wird.*

Literatur

[1] A. Tănăsescu, Über eine spezielle Netzprojektion, *Bul. Inst. Politehnic București* (1968).

[2] W. D. Klix—A. Tănăsescu, Eine spezielle hyperbolische Netzprojektion, *Wiss. Zeitschrift der TU Dresden* (1968).

[3] R. Bereis—W. D. Klix, Parabolische Netzprokejtion, *Wiss. Zeitschrift der TU Dresden* (1966).

[4] A. Tănăsescu, Die Methode der Paraspuren im Mongeschen Projektionssystem, *Bul. Inst. Politehnic, București* **19** (1957), ...

[5] L. I. Laletin, Ob odnom metode izobrajenie prostranstvennih obrazov na odnoi ploscosti 1949.

(Eingegangen am 28. Februar 1968.)