

## Einige Bemerkungen zur praktischen Anwendung des zentralen Einschneideverfahrens

Herrn Prof. Ottó Varga anlässlich seines 60. Geburtstages gewidmet

Von J. SZABÓ (Debrecen)

Wir haben in [2] eine Verallgemeinerung des Eckhartschen Einschneideverfahrens gegeben. Aus zwei perspektivischen Bildern  $\mathbf{K}'$ ,  $\mathbf{K}''$  des Gegenstands haben wir ein neues perspektivisches Bild konstruiert. Wir können die Bilder  $\mathbf{K}'$  und  $\mathbf{K}''$ , und dazu die Zentren  $S'$  und  $S''$  nicht voneinander unabhängig aufnehmen. In der Arbeit ([2] Satz 1.) haben wir notwendige und hinreichende Bedingungen zu den Zusammenhängen von  $\mathbf{K}'$ ,  $\mathbf{K}''$ ,  $S'$  und  $S''$  gegeben. Wenn  $\mathbf{K}'$  und  $\mathbf{K}''$  einfache Mongeschen Projektionen des  $\mathbf{K}$  sind, ist  $\mathbf{K}^s$  sehr speziell. (Siehe Fig. 1.)

Die Bedingungen des Satzes 3. sind in [2]:

1.  $y' \parallel S'S''$ ,  $x'' \parallel S'S''$ ,

2. auf der  $z$ -Achse existiert ein solcher, von 0 verschiedener Punkt  $L_z$ , für welchen  $S'$ ,  $L'_z$ ,  $L''_z$ ,  $S''$  kollinear sind.

(Das Koordinatensystem  $O(x, y, z)$  ist zu  $\mathbf{K}$  gewählt, und so entspricht  $O'(y', z')$  dem  $\mathbf{K}'$  bzw.  $O''(x'', z'')$  dem  $\mathbf{K}''$ .) In dieser Arbeit werden wir das spezielle Bild  $\mathbf{K}^s$  untersuchen. Dabei werden wir Zusammenhänge zwischen dem zentralen Einschneideverfahren und der Zentralprojektion suchen.

### 1. $\mathbf{K}^s$ als spezielle orthogonale Projektion des Zentralbildes von $\mathbf{K}$

Wie jedes perspektivische Bild eines Gegenstands, ist auch  $\mathbf{K}^s$  eine projektive Abbildung eines Zentralbildes des Gegenstands. Dieser Satz ist der Hauptsatz der Perspektive. Dies kann noch verschärft werden: Wenn die Fluchpunkte  $U_x^s$ ,  $U_y^s$ ,  $U_z^s$  nicht kollinear sind, können wir das perspektivische Bild  $\mathbf{K}^s$  affin zu einem solchen Zentralbild des Gegenstands  $\mathbf{K}$  betrachten. Eine weitere Verschärfung des Satzes ist unmöglich. ([1] S. 132—133). Weil die Fluchpunkte  $U_x^s$ ,  $U_y^s$ ,  $U_z^s$  nicht kollinear sind, können wir nur den Hauptsatz anwenden.

Zuerst werden wir  $\mathbf{K}^s$  untersuchen, weil wir das Bild  $\mathbf{K}$  aus  $\mathbf{K}'$  und  $\mathbf{K}''$  konstruiert haben.

**Satz 1.** *Das zentrale Einschneideverfahren der Mongeschen Bilder von  $\mathbf{K}$  ist eine spezielle orthogonale Projektion der zentralen Projektion von  $\mathbf{K}$ .*

**BEWEIS.** Wir spiegeln durch den Punkt  $S''$  das Bild  $\mathbf{K}''$ , und so erhalten wir das Bild  $\bar{\mathbf{K}}''$  (Fig. 1.) Die aus  $\mathbf{K}'$  und  $\mathbf{K}''$  mit  $S'$  und  $S''$ , und aus  $\mathbf{K}'$  und  $\bar{\mathbf{K}}''$  mit  $S'$

und  $S''$  konstruierten Bilder sind übereinstimmend. In diesem Fall können wir das  $K'$  als Aufriß — auf der Bildebene  $\pi_2$  — und ebenso das  $K''$  als Seitenriß — auf  $\pi_3$  — des Gegenstands  $K$  betrachten. Es sei  $P$  ein beliebiger Punkt von  $K$ . Die Gerade  $S'P'$  und  $S''P''$  können wir als die Bilder der Gerade  $SP$  betrachten. Zwischen

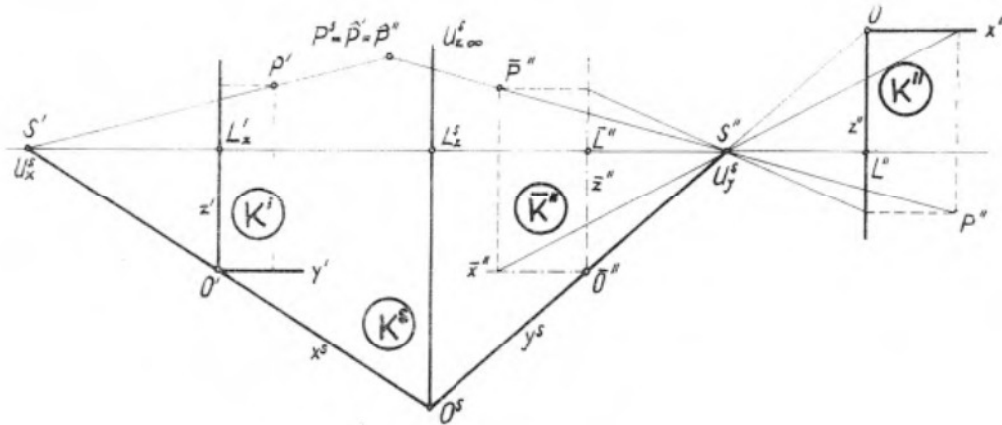


Fig. 1

$\pi_2$  und  $\pi_3$  gibt es eine sogenannte Koinzidenzebene  $\varkappa$ . Wenn ein solcher Punkt  $Q$  in der Ebene  $\varkappa$  ist, gilt auf die Bilder  $Q'$ , und  $Q''$  des Punktes  $Q$ :  $Q' \equiv Q''$ ; umgekehrt; es folgt aus  $R' \equiv R''$ , daß der Punkt  $R$  in der  $\varkappa$  liegen muß. Also der Schnittpunkt  $P^s \equiv (|S'P'|, |S''P''|)$  liegt in  $\varkappa$ . Wir können den Punkt  $P^s$  als Aufriß oder Seitenriß eines räumlichen Punktes  $\hat{P}$  betrachten, wo  $\hat{P}$  Schnittpunkt der Gerade  $SP$  und der Ebene  $\varkappa$  ist. Der Punkt  $P$  war ein beliebiger Punkt von  $K$ , also  $K^s$  ist eine orthogonale Projektion der zentralen Projektion des Gegenstands  $K$ .

*Bemerkung:* Wir können das zentrale Bild von  $K$  aus  $K^s$  mit der orthogonalen Affinität oder mit der Umklappung herstellen. Die Affinitätsachse steht senkrecht auf die Gerade  $S'S''$ . Das Affinitätsverhältnis ist  $\lambda = \sqrt{2}$ , die Affinitätsachse ist beliebig.

## 2. Die Herstellung des Zentralbildes mit zentralem Einschneideverfahren

Es seien  $K'$  und  $K''$  Mongesche Projektionen von  $K$ . Nehmen wir jetzt zu  $K'$  und  $K''$  je ein Bild  $\tilde{K}'$  und  $\tilde{K}''$ . Das Bild  $\tilde{K}'$  wird aus  $K'$  als Produkt zwei orthogonaler Affinität erzeugt. Im ersten Fall ist die Affinitätsrichtung  $O'E'_z$ , im zweiten Fall  $O'E'_y$ . Ebenso bekommt man  $\tilde{K}''$  aus  $K''$ . Also das Koordinatensystem  $\tilde{O}'(\tilde{E}'_y, \tilde{E}'_z)$  charakterisiert  $\tilde{K}'$ , und das  $\tilde{O}''(\tilde{E}''_x, \tilde{E}''_z)$  charakterisiert  $\tilde{K}''$ .

**Satz 2.** Aus  $\tilde{K}'$  und  $\tilde{K}''$  erhalten wir dann und nur dann das Zentralbild des Gegenstands  $K$  mit zentralem Einschneideverfahren, wenn  $\eta^2 + \xi^2 = 1$  gilt, wo

$$\eta = \frac{\tilde{O}'\tilde{E}'_z}{\tilde{O}'\tilde{E}'_y} \quad \text{und} \quad \xi = \frac{\tilde{O}''\tilde{E}''_z}{\tilde{O}''\tilde{E}''_x}$$

BEWEIS. 1. Die Bedingung ist notwendig. Wir konstruieren im Fig. 2. zu  $K^s$  eine Bildebene, eine Grundebene, eine Horizontebene und ein Zentrum. Als Horizontlinie können wir die Gerade  $U_x^s U_y^s$  betrachten. Da die  $z$ -Achse unendlich fernen Fluchtpunkt hat, muß die Bildebene der Zentralprojektion zu der  $z$ -Achse

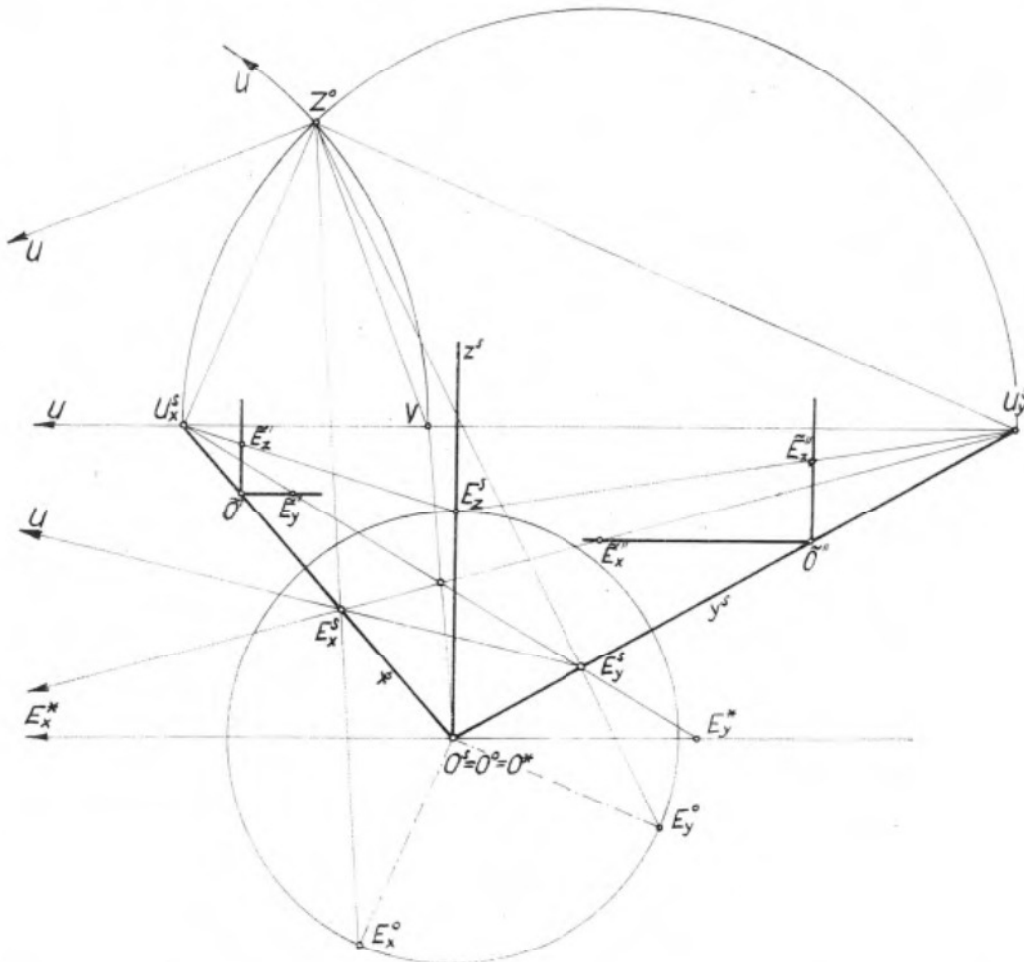


Fig. 2

parallel sein. Die Grundlinie ist beliebig, aber sie muß zu der Horizontlinie parallel sein. Die Grundlinie liegt auf dem Punkt  $O^s$ . Nehmen wir irgendeine Einheitpunkte an den Achsen  $x^s, y^s$  auf, so können wir immer zu  $K^s$  ein Zentrum  $Z$  ordnen. In der Umklappung der Horizontebene muß das Zentrum an dem Thaleskreis  $U_x^s U_y^s$  ( $U_x^s U_y^s$  ist Durchmesser der Thaleskreis) fallen. Wir werden das Zentrum mit  $Z^0$  bezeichnen. Das  $Z^0$  muß auch auf dem Thaleskreis  $UV$  liegen. Also fällt der Schnittpunkt der zwei Thaleskreise in der Umklappung der Punkt  $Z^0$ .

In der Umklappung zwischen der Grundebene und ihrem Bild ist eine zentrale Kollineation. Die Achse der Kollineation ist die Grundlinie, ihre Fluchtgerade die Horizontlinie, und ihr Zentrum  $Z^0$  ist. So können wir die Grundebene in die Bildebene umklappen. So bekommen wir das koordinatensystem  $O^0(E_x^0, E_y^0)$ . Die

Geraden  $O^0E_x^0$  und  $Z^0U_x^s$ , wie auch  $O^0E_y^0$  und  $Z^0U_y^0$  sind parallel. Es sei  $E_z^s$  ein Punkt an der  $z$ -Achse, wofür  $O^sE_z^s = O^0E_z^0 (= O^0E_x^0)$  gilt. Wir haben dadurch ein perspektivisches Koordinatensystem  $O^s(E_x^s, E_y^s, E_z^s)$  bekommen, welches Zentralbild eines räumlichen Koordinatensystems  $O(E_x, E_y, E_z)$  ist. Jetzt werden wir die Seitenbilder  $\tilde{O}'(\tilde{E}_y', \tilde{E}_z')$  und  $\tilde{O}''(\tilde{E}_x'', \tilde{E}_z'')$  zu  $O^s(E_x^s, E_y^s, E_z^s)$  so konstruieren, daß aus diesen wir das  $O^s(E_x^s, E_y^s, E_z^s)$  mit zentralem Einschneideverfahren herstellen können.  $\tilde{O}'$  und  $\tilde{O}''$  müssen auf der Gerade  $O^sU_x^s$  bzw.  $O^sU_y^s$  liegen. Die Geraden  $\tilde{O}'\tilde{E}_y'$  und  $\tilde{O}''\tilde{E}_x''$  müssen zu  $U_x^sU_y^s$  parallel sein. Die Geraden  $E_y^sU_x^s, E_z^sU_x^s, E_y^sU_y^s, E_z^sU_y^s$  bestimmen die Punkte  $\tilde{E}_y', \tilde{E}_z', \tilde{E}_z'', \tilde{E}_y''$ . Wir vergrößern das Bild  $\tilde{O}(\tilde{E}_x'', \tilde{E}_z'')$  aus  $U_y^s$  so, daß der Punkt  $\tilde{O}''$  auf den Punkt  $O^s$  fällt. Dann erhalten wir die Punkte  $O^* = O^s, E_z^* = E_z^s$  und  $E_x^*$ . Ebenso vergrößern wir das  $\tilde{O}'(\tilde{E}_y', \tilde{E}_z')$  aus  $U_x^s$  und so erhalten wir die Punkte  $O^* = O^s, E_z^* = E_z^s$  und  $E_y^*$ . Nach diesen Vergrößerungen gelten:

$$(1) \quad \eta = \frac{\tilde{O}'\tilde{E}_z'}{\tilde{O}'\tilde{E}_y'} = \frac{O^*E_z^*}{O^*E_y^*}; \quad \zeta = \frac{\tilde{O}''\tilde{E}_z''}{\tilde{O}''\tilde{E}_x''} = \frac{O^*E_z^*}{O^*E_x^*}.$$

Die Dreiecke  $O^sE_x^*E_x^s$  und  $U_x^sU_y^sE_x^s$  sind ähnlich, also folgt

$$(2) \quad \frac{U_x^sU_y^s}{O^sE_x^*} = \frac{U_x^sE_x^s}{O^sE_x^s}.$$

Die Ähnlichkeit der Dreiecke  $O^sE_x^0E_x^s$  und  $U_x^sZ^0E_x^s$  führt zu

$$(3) \quad \frac{U_x^sE_x^s}{O^sE_x^0} = \frac{U_x^sZ^0}{O^sE_x^0},$$

und aus (2) und (3)

$$(4) \quad \frac{U_x^sU_y^s}{O^sE_x^*} = \frac{U_x^sZ^0}{O^sE_x^0} \Rightarrow \frac{U_x^sZ^0}{U_x^sU_y^s} = \frac{O^sE_x^0}{O^sE_x^*}$$

folgt.

Weiterhin bekommt man aus (1) und (4) durch  $O^sE_y^0 = O^sE_z^s = O^*E_z^*$  und  $O^s = O^*$ :

$$(5) \quad \frac{U_x^sZ^0}{U_x^sU_y^s} = \frac{\tilde{O}''\tilde{E}_z''}{\tilde{O}''\tilde{E}_x''} = \zeta = \sin \varphi; \quad \varphi = \sphericalangle Z^0U_x^sU_y^s.$$

Durch analoges Verfahren erhält man aus den Dreiecken  $O^sE_y^*E_y^s, U_y^sU_x^sZ^s$  und  $O^sE_y^0E_y^s, U_y^0Z^0U_x^s$ :

$$(6) \quad \frac{U_y^sZ^0}{U_x^sU_y^s} = \frac{\tilde{O}'\tilde{E}_z'}{\tilde{O}'\tilde{E}_y'} = \eta = \cos \varphi$$

Zuletzt folgt aus (5) und (6)

$$\eta^2 + \zeta^2 = 1$$

2. Die Bedingung ist auch hinreichend.

Nehmen wir in der Zeichenebene die Koordinatensysteme  $\tilde{O}'(\tilde{E}_y', \tilde{E}_z')$  und  $\tilde{O}''(\tilde{E}_x'', \tilde{E}_z'')$  und zu ihnen die Zentren  $S', S''$  auf (Fig. 3.) Durch das zentrale Einschneideverfahren bekommen wir das perspektivische Koordinatensystem  $O^s(E_x^s, E_y^s, E_z^s, U_x^s = S', U_y^s = S'', U_z^s = \infty)$ ; jetzt müssen wir zeigen, daß wir die Konfiguration  $O^sE_x^sE_y^sE_z^sE_1^sE_2^sE_3^sE^s$  als zentrales Bild eines Würfels betrachten können. Wir ver-

größern  $\tilde{K}'$  aus  $S'$ , so daß  $\tilde{O}' \rightarrow O^s = O^{**}$  ist. Inzwischen geht der Punkt  $\tilde{E}'_z$  in den Punkt  $E_z^s$  über. Ebenso vergrößern wir das Bild  $\tilde{K}''$ . Es sei die Strecke  $O^{**}E_z^s = a$  so wird  $O^{*'}E_y^{*'} = a/\eta$ . Ebenso erhalten wir, daß  $O^{**}E_y^{**} = a/\xi$  ist. Betrachten wir das Viereck  $O^s E_x^s E_y^s E_1^s$  als Bild eines Quadrats. Wie unter 1. werden wir auch jetzt zu  $O^s E_x^s E_y^s E_1^s$  ein Zentrum  $Z$  herstellen. So erhalten wir den Punkt  $Z^0$ . Durch  $v$  können wir die Grundrißebene umklappen, und wir bekommen das Quadrat

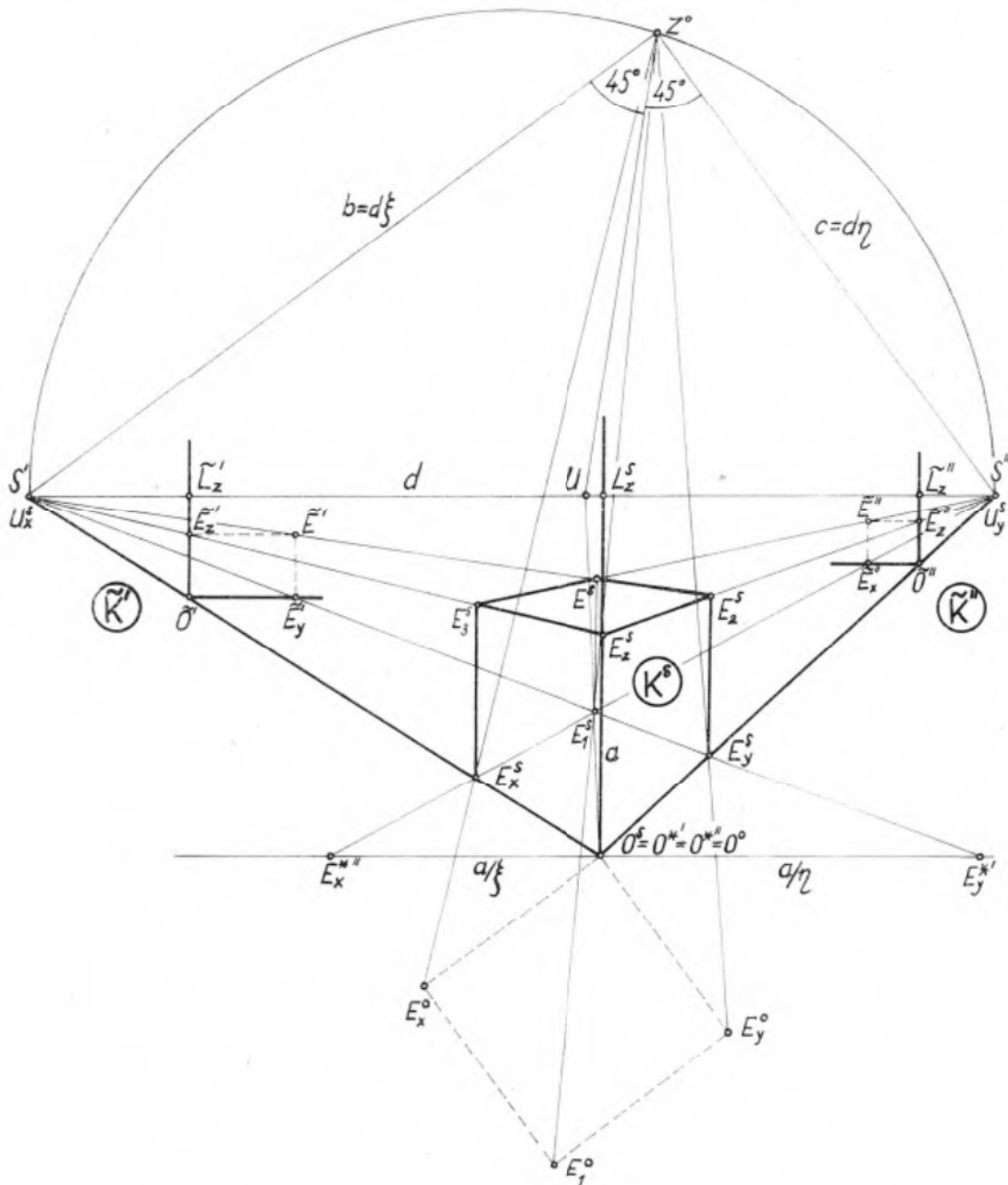


Fig. 3

$O^0 E_x^0 E_y^0 E_1^0$ . Wenn  $O^0 E_y^0 = O^s E_z^s$  ist, können wir das  $O^s E_x^s E_y^s E_z^s E_1^s E_2^s E_3^s E^s$  für zentrales Bild eines Würfels mit den Kanten  $O^0 E_x^0$  betrachten, weil die Kante  $O^s E_z^s$  in der Bildebene liegt. Noch werden wir zeigen, daß die Strecke  $O^0 E_y^0$  tatsächlich  $a$  ist. Der Punkt  $U$  teilt die Strecke  $S'S''$  im Verhältnis

$$(7) \quad \frac{b}{c} = \frac{S'U}{S''U}$$

Aus den Dreiecken  $S'S''E_1^s$  und  $E_y^{*'} E_x^{*'} E_1^s$  folgt

$$(8) \quad \frac{S'U}{S''U} = \frac{a}{\eta} : \frac{a}{\xi} = \frac{\xi}{\eta}.$$

Aus (7) und (8) erhält man endlich;  $b/c = \xi/\eta$ . Bezeichnen wir die Strecke  $S'S''$  mit  $d$ , so — mit kleiner Rechnung — folgt  $b = d\xi$ ,  $c = d\eta$ . Aus den Dreiecken  $O^{*'} E_y^{*'} E_y^s$ ,  $U_y^s U_x^s E_y^s$  und  $O^0 E_y^0 E_y^s$ ,  $S''Z^0 E_y^s$  folgt noch

$$\frac{a}{\eta} : d = \frac{O^s E_y^s}{U_y^s E_y^s} = \frac{O^0 E_y^0}{d\eta} \Rightarrow a = O^0 E_y^0$$

Unserer Meinung nach geben diese Sätze die Grenzen der Anwendung des zentralen Einschneideverfahrens. Der erste Satz bringt das Zentralbild und das mit dem zentralen Einschneideverfahren konstruierten Bild zu einander näher, als es im allgemeinen bei der Perspektive [1] ist. Nach dem Satz 2. kann man aus den Mongeschen Bildern mit dem zentralen Einschneideverfahren kein Zentralbild des Gegenstands herstellen, aber man bekommt eine Möglichkeit durch den Satz mit dem zentralen Einschneideverfahren ein Zentralbild des Gegenstands zu konstruieren. In diesem Fall muß man statt der Mongeschen Bilder zu diesen affine Bilder wählen. Diese Wahl ist sehr praktisch, wenn man die Einheitstrecke der Bilder  $\tilde{O}'\tilde{E}'_y = \tilde{O}''\tilde{E}'_x = 1$   $\tilde{O}'\tilde{E}'_y = \tilde{O}''\tilde{E}''_y = \sqrt{2}/2$  nimmt.

### Literatur

- [1] E. STIEFEL, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, Basel (1947).  
 [2] J. SZABÓ, Eine Verallgemeinerung des Eckhartschen Einschneideverfahrens, *Publ. Math. Debrecen* **14** (1967), 311—319.

(Eingegangen am 1. April 1968.)