Grundzüge der möglichen Hyperflächentheorien der $\mathfrak{M}_n$-Räume

Herrn Prof. Ottó Varga anläßlich seines 60. Geburtstages gewidmet

Von ARTHUR MOÓR (Sopron)

Einleitung

In unserem Aufsatz [2] [1]) begründeten wir eine Übertragungstheorie der sogenannten $\mathfrak{M}_n$-Räume, die eine Verallgemeinerung der gewöhnlichen Linienelementräume bilden (vgl. z.B. [3]; die Finslerräume sind bekanntlich metrische Linienelementräume). Die Verallgemeinerung besteht darin, daß die Grundelemente der $\mathfrak{M}_n$-Räume einer allgemeineren Transformationsformel genügen, als die der Linienelementräume. Dementsprechend werden die Übertragungsparameter des invarianten Differentials der Vektoren in $\mathfrak{M}_n$-Räumen einen anderen Charakter haben, als in den Linienelementräumen. Auch für die Vektoren in $\mathfrak{M}_n$-Räumen sind zwei Type möglich, die aber durch eine Grundgröße des $\mathfrak{M}_n$-Raumes ineinander übergeführt werden können (vgl. [2] Gleichung (5. 5)).

Im folgenden wollen wir die Grundrelationen der möglichen Hyperflächentheorien der $\mathfrak{M}_n$-Räume begründen. Die Definition der Hyperflächen der $\mathfrak{M}_n$-Räume werden wir in § 2 angeben, wir bemerken aber schon jetzt, daß der wesentliche Unterschied bezüglich des Hyperflächenbegriffs der Linienelementräume darin besteht, daß die möglichen Richtungen der Linienelemente v^i der Hyperfläche, in Linienelementräumen durch den Punkt-teil

$$x^a = x^a(u^1, u^2, \ldots, u^{n-1})$$

vollständig bestimmt sind (vgl. [1] und [4]), während in unserer Definition v^i von $x^a(u^\alpha)$ unabhängig ist [2]). Somit bekommt man in den $\mathfrak{M}_n$-Räumen zwei Reihen der Tangentenvektoren, die wir durch $B^i_\varkappa$ bzw. C^a_β bezeichnen werden (vgl. unsere spätere Formeln (2. 4)), die aber später doch nicht ganz beliebig vorgegeben werden können, nämlich sie müssen solche Normalenvektoren bestimmen, die der Relation (2. 26) genügen. Auf Grund dieser Relation ist es möglich die Hyperfläche als einen $\mathfrak{M}_{n-1}$-Raum zu betrachten und die Grundgrößen dieses $\mathfrak{M}_{n-1}$-Räumes zu bestimmen (vgl. unseren Satz 3).

[1]) Die Zahlen in eckigen Klammern deuten an die Literatur am Ende unserer Arbeit.

[2]) Lateinische Indizes bedeuten in folgendendie Zahlen: 1, 2, ..., n; griechische Indizes bedeuten die Zahlen: 1, 2, ..., $n-1$.

§ 1. Fundamentalgrößen der $\mathfrak{M}_n$-Räume

Ein $\mathfrak{M}_n$-Raum ist eine Manningfaltigkeit der Elemente (x^b, v^i), $(b, i=1, 2, \dots, n)$ die den Transformationsformeln von der Form:

$$\hat{x}^b = \hat{x}^b(x^1, x^2, \dots, x^n) \tag{1.1a}$$

$$\hat{v}^i = \hat{v}^i(\bar{v}^1, \bar{v}^2, \dots, \bar{v}^n), \qquad \bar{v}^b = \frac{\partial \hat{x}^b}{\partial x^c} v^c \tag{1.1b}$$

$$\mathrm{Det}\left(\frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^k}\right) \neq 0, \tag{1.2a}$$

$$\mathrm{Det}\left(\frac{\partial \hat{v}^i}{\partial \bar{v}^k}\right) \neq 0 \tag{1.2b}$$

genügen, wo die Funktionen $\hat{v}^i(\bar{v})$ in den $\bar{v}^b$ homogen von erster Ordnung sind. Wegen (1. 2a) und (1. 2b) existieren die inversen Transformationen von (1. 1a) bzw. (1. 1b). In diesem Raum, in dem wir eine Übertragungstheorie in unserer Arbeit [2] entwickelt haben, existieren, bezüglich der Transformationen (1. 1) gewöhnliche Tensoren, verallgemeinerte Tensoren und Pseudotensoren (vgl. [2] § 2) [3]), in deren Transformationsformeln der Reihe nach die Größen $\frac{\partial \hat{x}^b}{\partial x^c}, \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^k}$, und bei den Pseudotensoren gleichzeitig beide Type, bzw. die Inversen dieser Größen vorkommen.

In der affinen Übertragungstheorie der $\mathfrak{M}_n$-Räume sind die Grundgrößen: die affinen Übertragungsparameter $L_i{}^j{}_k$ und $M_i{}^j{}_k$ bzw. die mit $L_i{}^j{}_k$ gleichwertigen Größen

$$L^*{}_i{}^j{}_k \overset{\mathrm{def}}{=} L_i{}^j{}_k - M_i{}^j{}_r L_o{}^r{}_k,$$

wo der Index „o" jetzt und im folgenden die Überschiebung mit v^i bedeutet, und der Pseudotensor a^i_b mit dem Transformationsgesetz:

$$\hat{a}^i_b(\hat{x}, \hat{v}) = \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^j} \frac{\partial x^c}{\partial \hat{x}^b} a^j_c(x, v) \tag{1.3}$$

die in der Formel des invarianten Differentials bzw. in der der kovarianten Ableitungen der Pseudotensoren vorkommt (vgl. [2] § 5).

Wie in der Formel (1. 3), werden wir im folgenden bei einer Größe für diejenigen Indizes, bezüglich der bei einer Transformation der Grundelemente von der Form (1. 1) die Faktoren $\frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^j}$ bzw. $\frac{\partial v^j}{\partial \hat{v}^i}$ vorkommen, immer die Buchstaben

---

[3]) Der Referent des „Mathematical Rewiews": Herr T. K. Pan bemerkte (vgl. Math. Rew. 34 (1967), Seite 907), daß die von uns „verallgemeinerte Tensoren" genannten Größen gewöhnliche Tensoren bezüglich der Transformation (1.1) sind. Doch wollen wir unsere Benennung behalten, da bezüglich (1. 1) Größen sowohl mit den Transformationsformeln $\hat{T}^a = \frac{\partial \hat{x}^a}{\partial x^b} T^b$, als auch mit den Transformationsformeln $\hat{T}^i = \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^k} T^k$, vorkommen können und diese verschiedenartigen Charakter haben.

i, j, k, l, r, s, t verwenden, während für diejenigen Indizes bezüglich der bei einer Transformation (1. 1) die Größen $\dfrac{\partial \hat{x}^a}{\partial x^b}$ bzw. $\dfrac{\partial x^b}{\partial \hat{x}^a}$ vorkommen, werden wir die Buchstaben a, b, c, d, e, f benützen.

Wir wollen noch bemerken, daß neben dem Pseudotensor a_b^i auch der inverse Pseudotensor von a_b^i vorkommt, und wenn wir diese Größe mit b^a bezeichnen, so gilt

$$\begin{aligned} &(1.4\text{a}) && a_c^i b_i^a = \delta_c^a \\ &(1.4\text{b}) && a_c^i b_j^c = \delta_j^i \end{aligned} \qquad (\delta_c^a = \text{Kronecker-}\delta),$$

und die Transformationsformel von b_i^a ist:

$$\hat{b}_i^a(\hat{x}, \hat{v}) = \frac{\partial \hat{x}^a}{\partial x^c} \frac{\partial v^j}{\partial \hat{v}^i} b_j^c(x, v). \tag{1. 5}$$

Im metrischen Fall kommt zum fundamentalen Pseudotensor a_b^i der symmetrische verallgemeinerte metrische Grundtensor g_{ij} und ein schiefsymmetrischer verallgemeinerter Grundtensor f_{ij} hinzu. Ihre Transformationsformeln sind demnach

$$\hat{g}_{ij} = \frac{\partial v^r}{\partial \hat{v}^i} \frac{\partial v^s}{\partial \hat{v}^j} g_{rs}, \quad \hat{f}_{ij} = \frac{\partial v^r}{\partial \hat{v}^i} \frac{\partial v^s}{\partial \hat{v}^j} f_{rs}. \tag{1. 6}$$

Mit Hilfe von g_{ij} und f_{ij} können die Übertragungsparameter $L_i^{*j}{}_k$ und $M_i{}^j{}_k$ bestimmt werden (vgl. [2] § 6, insbesondere die Formeln: (6. 5) und (6. 16)).

Für den Übertragungsparameter $M_i{}^i{}_k$ der in i, k symmetrisch sein soll, gilt:

$$M_o{}^j{}_k \equiv M_k{}^j{}_o \equiv 0, \tag{1. 7}$$

ferner es sollen die beiden kovarianten Ableitungen von g_{ij} und die in [2] durch $\triangledown_k$ bezeichnete kovariante Ableitung von f_{ij} verschwinden. Im metrischen Fall sind die Übertragungsparameter $L_i^{*j}{}_k$ bzw. $M_i{}^j{}_k$ eben aus diesen Bedingungen, nämlich aus

$$\triangledown_k g_{ij} = 0, \quad \triangledown_k f_{ij} = 0 \tag{1. 8}$$

bzw.

$$\overset{*}{\triangledown}_k g_{ij} = 0 \tag{1. 9}$$

bestimmt (vgl. [2], Gleichungen (6. 3), (6. 4) und (6. 10)).

Im metrischen Fall spielt neben den Tensoren g_{ij}, f_{ij} noch der gewöhnliche metrische Grundtensor

$$\gamma_{ab} \overset{\text{def}}{=} g_{ij} a_a^i a_b^j \tag{1. 10}$$

eine wichtige Rolle, besonders bei der Länge der gewöhnlichen Kurven (vgl. [2] Formel (8. 5)), doch wollen wir betonen, daß γ_{ab} schon eine abgeleitete Größe, also nicht Grundgröße ist.

§ 2. Definition und Grundgrößen der Hyperflächen im $\mathfrak{M}_n$-Raum

Die Definition der Hyperflächen der $\mathfrak{M}_n$-Räume lautet in ihrer allgemeinster Form wie folgt:

Definition: *Eine Hyperfläche $\mathfrak{H}_{n-1}$ eines $\mathfrak{M}_n$-Raumes ist eine Mannigfaltigkeit derjenigen Grundelemente (x^a, v^i) die durch die Gleichungen:*

$$x^a = x^a(u^1, u^2, \ldots, u^{n-1}) \tag{2.1a}$$

$$v^i = v^i(u^1, \ldots, u^{n-1}, w^1, \ldots, w^{n-1}) \tag{2.1b}$$

bestimmt sind, wo die Funktionen $x^a(u^\alpha)$ und $v^i(u^\alpha, w^\varkappa)$ hinreichend oft stetig differezierbar sein sollen, außerdem sollen die $v^i(u^\alpha, w^\varkappa)$ in den $w^\varkappa$ homogen von erster Ordnung sein.

$(u^\alpha, w^\varkappa)$ sind die Grundelemente von $\mathfrak{H}_{n-1}$ und sie genügen demnach dem Transformationsgesetz:

$$\overset{*}{u}{}^\alpha = \overset{*}{u}{}^\alpha(u^1, u^2, \ldots, u^{n-1}), \tag{2.2a}$$

$$\overset{*}{w}{}^\varkappa = \overset{*}{w}{}^\varkappa(\overline{w}^1, \ldots, \overline{w}^{n-1}), \quad \overline{w}^\alpha = \frac{\partial \overset{*}{u}{}^\alpha}{\partial u^\beta} w^\beta, \tag{2.2b}$$

$$\operatorname{Det}\left(\frac{\partial \overset{*}{u}}{\partial u}\right) \neq 0, \tag{2.3a}$$

$$\operatorname{Det}\left(\frac{\partial \overset{*}{w}}{\partial \overline{w}}\right) \neq 0, \tag{2.3b}$$

wo $\alpha, \varkappa$ die Zahlen $1, \ldots, (n-1)$ durchlaufen. Wie im Basisraum $\mathfrak{M}_n$ werden wir durch $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ bzw. $\varkappa, \lambda, \mu, \nu, \varrho, \sigma, \tau$ diejenigen Indizes der Größen von $\mathfrak{H}_{n-1}$ bezeichnen bei denen nach einer Transformation (2. 2) der Grundelemente die Faktoren $\dfrac{\partial \overset{*}{u}{}^\alpha}{\partial u^\beta}$, $\dfrac{\partial u^\gamma}{\partial \overset{*}{u}{}^\delta}$ bzw. $\dfrac{\partial \overset{*}{w}{}^\varkappa}{\partial w^\lambda}$, $\dfrac{\partial w^\mu}{\partial \overset{*}{w}{}^\nu}$ vorkommen. Selbstverständlich existieren wegen (2. 3a) und (2. 3b) die inversen Transformationen von (2. 2). $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ bezeichnen somit die gewöhnlichen, $\varkappa, \lambda, \mu, \nu, \varrho, \sigma, \tau$ aber die verallgemeinerten Flächentensoren.

Für $\mathfrak{H}_{n-1}$ existieren zwei Reihen der Tangentenvektoren, undzwar:

$$C^a_\alpha \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial x^a}{\partial u^\alpha}, \quad B^i_\varkappa \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial v^i}{\partial w^\varkappa}, \qquad (\alpha, \varkappa = 1, \ldots, n-1). \tag{2.4}$$

Die Vektoren C^a_α bzw. B^α_i sollen immer je ein linear unabhängiges $(n-1)$-Bein bilden, d.h. der Rang der Matrix (C^a_α) bzw. $(B^i_\varkappa)$ sei gleich $(n-1)$. Die Vektoren C^a_α $(\alpha = 1, \ldots, n-1)$ sind offenbar Tangentenvektoren der Manningfaltigkeit (2. 1a), d.h. des Punkt-teils von $\mathfrak{H}_{n-1}$, aber sie sind im allgemeinen keine Tangentenvektoren von (2. 1b). Umgekehrt, die $B^i_\varkappa$ $(\varkappa = 1, \ldots, n-1)$ sind Tangentenvektoren von (2. 1b), aber sie berühren (2. 1a) im allgemeinen nicht.

Für die Vektoren (2. 4) gilt der folgende

Satz 1. *Die C^a_β bzw. $B^i_\varkappa$ bilden bei festem β bzw. bei festem $\varkappa$ bezüglich der Raumtransformationen* (1. 1) *je einen gewöhnlichen bzw. einen verallgemeinerten kontravarianten Vektor. Hingegegen bilden die C^a_β bzw. $B^i_\varkappa$ bei festem a bzw. bei festem i bezüglich der Flächentransformationen* (2. 2) *je einen gewöhnlichen bzw. verallgemeinerten kovarianten Vektor der Hyperfläche $\mathfrak{H}_{n-1}$.*

Beweis. Auf Grund von (1. 1a) bzw. (1. 1b) gilt nach (2. 4):

$$\hat{C}^a_\beta = \frac{\partial \hat{x}^a}{\partial u^\beta} = \frac{\partial \hat{x}^a}{\partial x^b}\frac{\partial x^b}{\partial u^\beta} = \frac{\partial \hat{x}^a}{\partial x^b} C^b_\beta \tag{2. 5}$$

bzw.

$$\hat{B}^i_\varkappa = \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial w^\varkappa} = \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^j}\frac{\partial v^j}{\partial w^\varkappa} = \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^j} B^j_\varkappa, \tag{2. 6}$$

womit die erste Hälfte des Satzes bewiesen ist.

Bei festem a bzw. i wird nach (2. 2a) bzw. (2. 2b) unter Beachtung der Relation (2. 3a) bzw. (2. 3b), die die Existenz der inversen Transformationen gesichert:

$$\overset{*}{C}{}^a_\beta = \frac{\partial x^a}{\partial u^\gamma}\frac{\partial u^\gamma}{\partial \overset{*}{u}{}^\beta} = \frac{\partial u^\gamma}{\partial \overset{*}{u}{}^\beta} C^a_\gamma \tag{2. 7}$$

bzw.

$$\overset{*}{B}{}^i_\varkappa = \frac{\partial v^i}{\partial w^\varrho}\frac{\partial w^\varrho}{\partial \overset{*}{w}{}^\varkappa} = \frac{\partial w^\varrho}{\partial \overset{*}{w}{}^\varkappa} B^i_\varrho, \tag{2. 8}$$

womit auch die zweite Hälfte des Satzes bewiesen ist.

Der verallgemeinerte metrische Grundtensor der Hyperfläche $\mathfrak{H}_{n-1}$ ist

$$g_{\varrho\sigma} \overset{\text{def}}{=} g_{ij} B^i_\varrho B^j_\sigma. \tag{2. 9}$$

Jetzt und im folgenden werden wir die Hyperflächenkomponenten einer Raumgröße durch die griechischen Indizes kennzeichnen, während der Kernbuchstabe unverändert bleibt. Auf Grund des Satzes 1 wird $g_{\varrho\sigma}$ nach (2. 9), bezüglich der Raumtransformationen (1. 1), eine Invariante, während bezüglich der Flächentransformationen (2. 2) die Gesamtheit der Komponenten $g_{\varrho\sigma}$ einen verallgemeinerten Flächentensor festlegen.

Aus (1. 10) folgt auf Grund des Satzes 1, daß

$$\gamma_{\alpha\beta} \overset{\text{def}}{=} \gamma_{ab} C^a_\alpha C^b_\beta \tag{2.10}$$

einen gewöhnlichen kovarianten Flächentensor bezüglich der Flächentransformationen (2. 2) ist, d.h. $\gamma_{\alpha\beta}$ genügt dem Transformationsgesetz:

$$\overset{*}{\gamma}_{\alpha\beta} = \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \overset{*}{u}{}^\alpha}\frac{\partial u^\delta}{\partial \overset{*}{u}{}^\beta} \gamma_{\varepsilon\delta};$$

bezüglich der Raumtransformationen (1. 1) ist $\gamma_{\alpha\beta}$ nach der Definitionsgleichung (2. 10) auf Grund des Satzes 1 eine Invariante.

Der Flächentensor, der dem verallgemeinerten schiefsymmetrischen Tensor f_{ik} entspricht ist

$$f_{\varrho\sigma} \overset{\text{def}}{=} f_{ik} B^i_\varrho B^k_\sigma. \tag{2.11}$$

Um das vollständige System der charakteristischen Grundgrößen von $\mathfrak{H}_{n-1}$ zu bestimmen, müssen wir noch die dem Pseudotensor a^i_b entsprechende Flächengröße: $a^\varkappa_\beta$ bestimmen. Vorher müssen wir aber die $(n-1)$-Beine C^a_α und $B^i_\varkappa$ zu n-Beine ergänzen, und die entsprechenden adjungierten kovarianten n-Beine bestimmen.

Durch die Gleichungen

$$(2.12) \qquad g_{ij}\bigl(x(u), v(u, w)\bigr) B^i_\varkappa N^j = 0$$

$$(2.13) \qquad g_{ij}\bigl(x(u), v(u, w)\bigr) N^i N^j = 1$$

ist in jedem Grundelement $(u^\alpha, w^\varkappa)$ von $\mathfrak{H}_{n-1}$ eindeutig ein normaler Einheitsvektor N^i bestimmt, da die Matrix $(B^i_\varkappa)$ vom Rang $(n-1)$ vorausgesetzt war. Das adjungiert e n-Bein: $(B^\varkappa_j, N_j)$ ist durch die Gleichungen

$$(2.14) \qquad B^i_\varkappa B^\varkappa_j + N^i N_j = \delta^i_j$$

definiert. Nach einer Überschiebung von (2. 14) mit $g_{ik}N^k$ folgt auf Grund von (2. 12), und (2. 13), daß

$$(2.15) \qquad N_j = g_{jk} N^k$$

ist. Wenn wir den inversen Tensor von $g_{\varrho\sigma}$, wie gewöhnlich, durch $g^{\varrho\lambda}$ definieren, d.h. es gilt die Relation:

$$(2.16) \qquad g^{\varrho\lambda} g_{\varrho\varkappa} = \delta^\lambda_\varkappa,$$

und wir (2. 14) mit $g^{\varrho\lambda} g_{ik} B^k_\lambda$ überschieben, so wird im Hinblick auf (2.9), (2. 16) und (2. 12)

$$(2.17) \qquad B^\varrho_j = g^{\varrho\lambda} g_{jk} B^k_\lambda.$$

Die Formeln (2. 15) und (2. 17) bestimmen nun das adjungierte n-Bein von $(B^\varkappa_i, N_i)$, das vollständig analog zur entsprechenden Theorie des Finslerschen Raumes ist (vgl. [3] Kapitel V. § 2).

Wir können aber mit Hilfe von (2. 10) und mit den Vektoren C^a_α einen zweiten Normalvektor $n^a(u, w)$ in vollständig analoger Weise definieren, und das adjungierte n-Bein $(C^\alpha_a n_a)$ bestimmen. Die entsprechenden Formeln sind dann:

$$(2.18) \qquad \gamma_{ab}\bigl(x(u), v(u, w)\bigr) C^a_\alpha n^b = 0,$$

$$(2.19) \qquad \gamma_{ab}\bigl(x(u), v(u, w)\bigr) n^a n^b = 1,$$

$$(2.20) \qquad C^a_\alpha C^\alpha_b + n^a n_b = \delta^a_b,$$

$$(2.21) \qquad n_b = \gamma_{ab} n^a, \quad C^\alpha_b = \gamma^{\alpha\beta} \gamma_{ab} C^a_\beta.$$

$$\gamma^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\delta} = \delta^\beta_\delta.$$

Bezüglich der Transformationsformeln von N^i, N_j bemerken wir, daß aus (2. 12) und (2. 15) unmittelbar folgt, daß N^i und N_i bezüglich (1. 1) verallgemeinerte Vektoren, während aus (2. 18) und (2. 21) folgt, daß n^a und n_a gewöhnliche Vektoren bilden. Die Formeln (2. 17) und (2. 21) zeigen, daß für C^α_a bzw. $B^\varkappa_i$ der folgende Satz gilt:

Satz 1*. *Für die Größen C_a^β bzw. $B_i^\varkappa$ gilt der Satz, der aus dem Satze* 1 *entsteht, wenn darin die Substitution*

$$C_\beta^a \to C_a^\beta, \quad B_\varkappa^i \to B_i^\varkappa$$

durchgeführt wird, und die Wörter „kontravariant" und „kovariant" verwechselt werden.

Die Transformationsformeln dieser Größen sind nämlich nach (2. 17) und (2. 21)

$$\hat{C}_a^\beta = \frac{\partial x^b}{\partial \hat{x}^a} C_b^\beta, \quad \hat{B}_i^\varkappa = \frac{\partial v^k}{\partial \hat{v}^i} B_k^\varkappa, \tag{2.22}$$

bzw.

$$\overset{*}{C}{}_a^\beta = \frac{\partial \overset{*}{u}{}^\beta}{\partial u^\alpha} C_a^\alpha, \quad \overset{*}{B}{}_i^\varkappa = \frac{\partial \overset{*}{w}{}^\varkappa}{\partial w^\lambda} B_i^\lambda. \tag{2.23}$$

Jetzt sind wir schon imstande die fundamentalen Pseudogrößen $a_\alpha^\varkappa$ bzw. $b_\varkappa^\beta$ zu bestimmen. Es ist:

$$a_\alpha^\varkappa \overset{\text{def}}{=} a_b^i B_i^\varkappa C_\alpha^b. \tag{2.24}$$

Eine natürliche Forderung ist nun, daß die durch (2. 9) und (2. 10) definierten Flächentensoren in der Relation

$$\gamma_{\alpha\beta} = g_{\varrho\sigma} a_\alpha^\varrho a_\beta^\sigma \tag{2.25}$$

stehen. Diese Relation wird aber nicht gelten, wenn C_α^a und $B_\varkappa^i$ voneinander unabhängig sind. Wir stellen nun eine Forderung, womit (2. 25) erfüllt wird:

Forderung: *Es soll längs* (2. 1a) *und* (2. 1b) *die Relatin*

$$a_b^i N_i = n_b \equiv \gamma_{ab} n^a \tag{2.26}$$

bestehen.

Offenbar ist (2. 26) eine Relation zwischen die $B_\varkappa^i$ und C_β^a, da $N_i = g_{ij} N^j$ und $n_b = \gamma_{ab}\, n^a$ durch die Vektoren $B_\varkappa^i$ und C_β^a definiert waren. Die Gleichung (2. 12) bzw. (2. 18) bleibt aber unverändert, wenn $B_\varkappa^i$ bzw. C_β^a durch eine lineare Kombination dieser Vektoren, z.B. $\Phi_\lambda^\varkappa B_\varkappa^i$ bzw. $\varphi_\alpha^\beta C_\beta^a$ mit $\operatorname{Det}(\Phi_\lambda^\varkappa) \neq 0$, bzw. $\operatorname{Det}(\varphi_\alpha^\beta) \neq 0$ ersetzt wird. N^i bzw. n^a hängt also von der durch die Vektoren $B_\varkappa^i$ bzw. C_β^a bestimmten Vektorenmannigfaltigkeit ab. Es gilt nun der

Satz 2. *Die Relation* (2. 25) *besteht, und sie ist eine Folgerung von* (2. 26).

Beweis. Nach (2. 9) und (2. 24) bekommt man in Hinsicht auf (2. 14):

$$g_{\varrho\sigma} a_\alpha^\varrho a_\beta^\sigma = g_{ij} B_\varrho^i B_\sigma^j a_b^r B_r^\varrho C_\alpha^b a_c^s B_s^\sigma C_\beta^c = g_{ij} (\delta_r^i - N^i N_r)(\delta_s^j - N^j N_s) a_b^r a_c^s C_\alpha^b C_\beta^c.$$

Beachten wir nun (2. 26) und (2. 18), so wird in Hinsicht auf (2. 10):

$$g_{\varrho\sigma} a_\alpha^\varrho a_\beta^\sigma = g_{rs} a_b^r a_c^s C_\alpha^b C_\beta^c = \gamma_{\alpha\beta},$$

w.z.b.w.

Auf Grund von (2. 26) kann leicht gezeigt werden, daß die inversen Größen von (2. 24):

$$b_\varkappa^\beta \overset{\text{def}}{=} b_j^c B_\varkappa^j C_c^\beta \tag{2.27}$$

sind. Es ist nämlich nach (2. 24), (2. 27), (2. 14) und (2. 26):

$$a^{\varkappa}_{\alpha} b^{\beta}_{\varkappa} = a^{i}_{b} B^{\varkappa}_{i} C^{b}_{\alpha} b^{c}_{j} B^{j}_{\varkappa} C^{\beta}_{c} = a^{i}_{b}(\delta^{j}_{i} - N^{j} N_{i}) b^{c}_{j} C^{b}_{\alpha} C^{\beta}_{c} = a^{i}_{b} b^{c}_{i} C^{b}_{\alpha} C^{\beta}_{c},$$

da $n_b C^b_\alpha$ nach (2. 18) gleich Null ist. Beachten wir nun (1. 4a) und die aus (2. 21) folgende Relation:

$$C^{c}_{\alpha} C^{\beta}_{c} = \delta^{\beta}_{\alpha}, \tag{2.28}$$

so folgt:

$$a^{\varkappa}_{\alpha} b^{\beta}_{\varkappa} = \delta^{\beta}_{\alpha}, \tag{2.29}$$

w.z.b.w.

Aus (2. 29) folgt nach einem bekannten Satz der Tensoralgebra die Relation:

$$a^{\varkappa}_{\alpha} b^{\alpha}_{\varrho} = \delta^{\varkappa}_{\varrho}, \tag{2.30}$$

die auch unmittelbar bewiesen werden kann, wenn (2. 20) und die aus (2. 26) wegen (1. 4b) folgende Relation:

$$N_j = n_c b^c_j \tag{2.31}$$

beachtet wird.

Unsere bisherige Resultate können wir im folgenden Satz zusammenfassen:

Satz 3. *Die Grundgrößen einer Hyperfläche $\mathfrak{H}_{n-1}$ im metrischen $\mathfrak{M}_n$-Raum, die durch die Gleichungen* (2. 1) *festgelegt ist, und falls die Forderung* (2. 26) *besteht, sind durch* (2. 9), (2. 11) *und* (2. 24) *bestimmt. Die Metrik von $\mathfrak{H}_{n-1}$ ist eine Projektionsmetrik mit den Projektionsfaktoren $B^i_\varkappa$ und C^a_β.*

Im $\mathfrak{M}_n$-Raum können mit Hilfe der Pseudotensoren a^i_c und b^a_j die verschiedenen Type der Vektoren bzw. Tensoren ineinander transformiert werden. Dasselbe gilt für die Flächentensoren bezüglich der durch (2. 24) und (2. 27) definierten Größen. Mit Hilfe der Projektionsfaktoren können nun die Tensoren des $\mathfrak{M}_n$-Raumes auf $\mathfrak{H}_{n-1}$ proiziert werden. Auf Grund von (2. 26) besteht das folgende wichtige

Satz 4. *Die mit Hilfe der b^c_i bzw. a^i_b durchgeführte Transformation der Tensoren des $\mathfrak{M}_n$-Raumes kann mit der Projektion auf $\mathfrak{H}_{n-1}$ verwechselt werden, wenn die Rolle von b^c_i bzw. a^i_b auf $\mathfrak{H}_{n-1}$ von $b^\beta_\varkappa$ bzw. $a^\varkappa_\alpha$ übernommen wird: d.h. es gilt (z.B. bezüglich der Vektoren des $\mathfrak{M}_n$-Raumes):*

$$(T^i b^c_i) C^\beta_c = (T^i B^\varkappa_i) b^\beta_\varkappa, \tag{2.32}$$

$$(T^b a^i_b) B^\varkappa_i = (T^b C^\alpha_b) a^\varkappa_\alpha, \tag{2.33}$$

$$(P_a b^a_j) B^j_\varkappa = (P_a C^a_\beta) b^\beta_\varkappa. \tag{2.34}$$

Bemerkung. T^i bedeutet in (2. 32) einen verallgemeinerten, T^b bzw. P_a in (2. 33) bzw. (2. 34) je einen gewöhnlichen Vektor.

Beweis. Im kovarianten Fall haben wir den Satz im wesentlichen teils schon bewiesen, nämlich für den metrischen Grundtensor. Definieren wir $\gamma_{\alpha\beta}$ durch (2. 10) und (1. 10), so drückt (2. 25) auf Grund von (2. 9) eben den Satz 4 aus. Wir müssen also noch die Relationen (2. 32)—(2. 34) beweisen.

Aus (2. 27) folgt nun nach einer Überschiebung mit $B^\varkappa_i$ in Hinsicht auf (2. 14):

$$B^\varkappa_i b^\beta_\varkappa = b^c_j C^\beta_c (\delta^j_i - N^j N_i). \tag{2.35}$$

Die Relation (2. 26) kann nun nach (1. 10) in der Form:

$$a_b^i g_{ik} N^k = g_{rs} a_a^r a_b^s n^a$$

geschrieben werden. Überschiebung mit $b_l^b g^{lj}$ gibt dann nach (1. 4b)

$$N^j = a_a^j n^a. \tag{2. 36}$$

Aus (2. 35) wird dann nach (1. 4a) und (2. 18):

$$B_i^\varkappa b_\varkappa^\beta = b_i^c C_c^\beta \tag{2. 37}$$

und das beweist (2. 32).

Bezüglich (2. 33) beachten wir, daß aus (2. 24) nach einer Überschiebung mit C_a^α auf Grund von (2. 20) folgt:

$$C_a^\alpha a_\alpha^\varkappa = a_b^i B_i^\varkappa (\delta_a^b - n^b n_a).$$

Wenn wir nun (2. 36), (2. 17) und (2. 12) beachten, so wird:

$$C_a^\alpha a_\alpha^\varkappa = a_a^i B_i^\varkappa \tag{2. 38}$$

und das beweist (2. 33).

Um (2. 34) zu beweisen, überschieben wir (2. 27) mit C_β^a beachten wir (2. 20), so wird:

$$C_\beta^a b_\varkappa^\beta = b_j^c B_\varkappa^j C_c^\beta C_\beta^a = b_j^c B_\varkappa^j (\delta_c^a - n^a n_c).$$

Auf Grund der Relation (2. 31) bekommt man

$$C_\beta^a b_\varkappa^\beta = b_j^a B_\varkappa^j, \tag{2. 39}$$

woraus (2. 34) unmittelber folgt.

§ 3. Die Hyperflächen als eine Mannigfaltigkeit der tangenten bzw. orthogonalen Elemente

Die Finslerräume bilden einen Spezialfall unserer $\mathfrak{M}_n$-Raume. Sie sind durch

$$g_{ik} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2}{\partial v^i \, \partial v^k}, \qquad f_{ik} = 0, \quad a_b^i = \delta_b^i$$

gekennzeichnet, wenn $F(x, v)$ die Grundfunktion bedeutet. Statt (1. 1b) besteht in der Finslerschen Räumen $\hat{v}^i = \bar{v}^i$, ferner existieren für die Hyperflächen zwei wesentlich verschiedene Theorien. Der erste betrachtet die Hyperfläche als eine Manningfaltigkeit der tangenten Linienelemente (vgl. [1]), der zweite als eine Mannigfaltigkeit der orthogonalen Linienelemente (vgl. [4]). Wir charakterisieren diese beiden Type durch den folgenden

Satz 5. *Gilt die Relation:*

$$v^i = a_b^i C_\alpha^b b_\varkappa^\alpha w^\varkappa, \tag{3. 1}$$

so ist die durch (2. 1) *definierte Hyperfläche eine Mannigfaltigkeit der tangenten Grundelemente* v^i; *ist aber*

$$v^k = a^k_a n^a \tag{3. 2}$$

gültig, so ist die durch (2. 1) *definierte Hyperfläche eine Mannigfaltigkeit der orthogonalen Grundelemente* v^i.

Beweis. Der zweite Teil des Satzes folgt unmittelbar aus den Formeln (2. 36) und (3. 2), da dann drückt $v^i = N^i$ aus, daß das Grundelement v^i der Normalvektor ist.

Nehmen wir nun an, daß (3. 1) für die Funktionen (2. 1) gültig ist. Nach (2. 27) folgt aus (3. 1) in Hinsicht auf (2. 20)

$$v^i = a^i_b C^b_\alpha b^c_j B^j_\varkappa C^\alpha_c w^\varkappa = a^i_b(\delta^b_c - n^b n_c) b^c_j B^j_\varkappa w^\varkappa.$$

Beachten wir nun, daß die Funktionen $v^i(u, w)$ in den $w^\varkappa$ homogen von erster Ordnung vorausgesetzt wurden, so ist

$$B^j_\varkappa w^\varkappa \equiv \frac{\partial v^j}{\partial w^\varkappa} w^\varkappa = v^j,$$

ferner, unter Beachtung von (1. 4b), wird:

$$-a^i_b n^b n_c b^c_j v^j = 0$$

bestehen. Nach (2. 36) und (2. 31) wird

$$N^i N_j v^j = 0,$$

woraus

$$N_j v^j \equiv g_{kj} N^k v^j = 0$$

folgt, und das drückt aus, daß die v^i einen tangenten Vektor der Hyperfläche $\mathfrak{H}_{n-1}$ bilden w.z.b.w.

Wir wollen jetzt untersuchen, wie die Grundformeln der Hyperflächentheorie der Finslerräume in den Resultaten von § 2 und § 3 enthalten sind, falls (3. 1) besteht. Wie schon erwähnt wurde, ist in den Finslerräumen $a^i_b = \delta^i_b$ und somit nach (1. 4a) auch $b^a_j = \delta^a_j$. Auf Grund von (2. 39) geht (3. 1) in die Formel

$$v^i = B^i_\varkappa w^\varkappa \equiv \frac{\partial v^i}{\partial w^\varkappa} w^\varkappa \tag{3. 3}$$

über. Da aber andererseits in den Finslerräumen, wenn die Hyperfläche eine Mannigfaltigkeit der tangenten Linienelemente ist, $v^i(u, w)$ als

$$v^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} w^\alpha \tag{3. 4}$$

definiert wird, und ferner nur gewöhnliche Vektoren bzw. Tensoren existieren, besteht:

$$B^i_\varkappa = \frac{\partial x^i}{\partial u^\varkappa} = C^i_\varkappa.$$

(3. 3) und (3. 4) sind also identisch und nach (2. 26) ist auch

$$N_i = n_i, \quad N^i = n^i$$

gültig.

Wir verweisen noch auch die wichtige Tatsache, daß jetzt zu den verschiedenen Indexen immer dieselbe tensoriellen Transformationsformeln gehören, da in diesem Falle

$$\hat{v}^i = \bar{v}^i, \quad \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^j} = \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^j}, \quad \frac{\partial x^i}{\partial \hat{x}^j} = \frac{\partial v^i}{\partial \hat{v}^j}$$

gelten.

§ 4. Invariantes Differential von $\mathfrak{H}_{n-1}$

Ein inneres invariantes Differential der Hyperflächen kann auf Grund der Formeln (2. 9), (2. 11) und (2. 24) unmittelbar bestimmt werden, da diese Formeln drücken aus, daß eine Hyperfläche $\mathfrak{H}_{n-1}$ ein $\mathfrak{M}_{n-1}$-Raum ist, dessen Grundgrößen eben durch diese Formeln von $g_{\varrho\sigma}$, $f_{\varrho\sigma}$ und $a^{\varkappa}_{\alpha}$ bestimmt sind.

Wie in der Theorie der Finslerräume, kann auch im $\mathfrak{M}_n$-Raum ein induziertes invariantes Differential (vgl. [3] Kapitel. V. § 3) eingeführt werden. Diesen Fall wollen wir etwas eingehender untersuchen.

Das invariante Differential des Grundraumes $\mathfrak{M}_n$ hat die Form (vgl. [2] § 3):

$$DX^i = dX^i + M_j{}^i{}_k X^j \omega^k(d) + L^*{}_j{}^i{}_b X^j dx^b, \tag{4. 1}$$

wo

$$\omega^k(d) \overset{\text{def}}{=} Dv^k = dv^k + L^*{}_o{}^r{}_b dx^b \tag{4. 1a}$$

ist, und das „o" — wie gewöhnlich — die Kontraktion mit v^i bedeutet. Bei unserer Untersuchungen in [2] § 3 brauchte v^i nicht unbedingt auf 1 normiert zu sein, da in [2] § 3 das affine invariante Differential der $\mathfrak{M}_n$-Räume begründet wurde. Ist aber (3. 2) gültig, so ist nach (1. 10) und (2. 19):

$$g_{ik} v^i v^k = g_{ik} a^i_b a^k_c n^b n^c = \gamma_{bc} n^b n^c = 1.$$

Da nach der gestellten Annahme über die Matrix $(B^i_\varkappa)$, die Vektoren $B^i_\varkappa$ $(\varkappa = 1, \ldots, n-1)$ linear unabhängig sind, bestimmen $B^i_\varkappa$, N^i ein linear unabhängiges n-Bein. Somit kann das invariante Differential (4. 1) von X^i in der Form:

$$DX^i = B^i_\varkappa \mathfrak{D} X^\varkappa + \pi(d) N^i \tag{4. 2}$$

bestimmt werden, wo $\mathfrak{D}X^\varkappa$ das induzierte invariante Differential von $\mathfrak{H}_{n-1}$ bedeutet. Ist (3. 2) gültig, so ist nach (2. 36) -wie das schon bemerkt wurde- $N^i = v^i$. Aus (2. 17) folgt nun nach (2. 9) und (2. 16)

$$B^j_\sigma B^\varrho_j = \delta^\varrho_\sigma, \tag{4. 3}$$

bzw. nach (2. 12):

$$N^j B^\varrho_j = 0. \tag{4. 4}$$

Nach einer Kontraktion von (4. 2) mit B_i^ϱ bzw. mit N_i wird nach (4. 3) und (4. 4) bzw. nach (2. 12) und (2. 13):

(4. 5) $$\mathfrak{D}X^\varkappa = B_i^\varkappa DX^i$$

bzw.

(4. 5a) $$\pi(d) = N_i DX^i.$$

Die Formel (4. 5) bestimmt das invariante Differential der Hyperfläche $\mathfrak{H}_{n-1}$ offenbar dann und nur dann, falls mit X^ϱ auch die Raumkomponenten X^i bekannt sind. In den meisten Fällen betrachtet man $\vec{X}$ als einen Flächenvektor, falls die Raum- und Flächenkomponenten in der Relation

(4. 6) $$X^i = B_\varrho^i X^\varrho$$

stehen. Auf Grund von (4. 5) und (4. 6) können die Übertragungsparameter der Flächenübertragung leicht bestimmt werden. Es ist nach (4. 6)

(4. 7a) $$dX^i = B_\varrho^i\, dX^\varrho + (B_{\varrho\alpha}^i\, du^\alpha + B_{\varrho\sigma}^i\, dw^\sigma) X^\varrho,$$

wo

$$B_{\varrho\alpha}^i \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 v^i}{\partial w^\varrho\, \partial u^\alpha}, \quad B_{\varrho\sigma}^i \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 v^i}{\partial w^\varrho\, \partial w^\sigma}$$

bedeuten.

Nach (2. 1b) ist

(4. 7b) $$\omega^k(d) = (B_\alpha^k + L^*{}_o{}^k{}_a C_\alpha^a)\, du^\alpha + B_\sigma^k\, dw^\sigma,$$

wo wir die Bezeichnungen

$$C_\alpha^a \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial x^a}{\partial u^\alpha}, \quad B_\alpha^k \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial v^k}{\partial u^\alpha}, \quad B_\sigma^k \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial v^i}{\partial w^\sigma}$$

benützt haben. Substituieren wir nun die Formel von DX^i aus (4. 1) in (4. 5), beachten wir dann (4. 7a) und (4. 7b), so wird das invariante Differential der Hyperfläche $\mathfrak{H}_{n-1}$ in Hinsicht auf (4. 3) die folgende Form haben:

(4. 8) $$\mathfrak{D}X^\varkappa = dX^\varkappa + (\mu_\varrho{}^\varkappa{}_\sigma\, dw^\sigma + \Lambda_\varrho{}^\varkappa{}_\alpha\, du^\alpha)\, X^\sigma,$$

wo

(4. 9a) $$\mu_\varrho{}^\varkappa{}_\sigma \overset{\text{def}}{=} B_i^\varkappa (B_{\varrho\sigma}^i + M_j{}^i{}_k B_\varrho^j B_\sigma^k),$$

(4. 9b) $$\Lambda_\varrho{}^\varkappa{}_\alpha \overset{\text{def}}{=} B_i^\varkappa \big(B_{\varrho\alpha}^i + M_j{}^i{}_k B_\varrho^j (B_\alpha^k + L^*{}_o{}^k{}_b C_\alpha^b) + L^*{}_j{}^i{}_b B_\varrho^j C_\alpha^b\big).$$

Auf Grund der Homogenität erster Ordnung der Funktionen $v^i(u, w)$ in der $w^\varkappa$ folgt aus

$$M_j{}^i{}_k v^k = M_k{}^i{}_j v^k = 0$$

auch

$$\mu_\varrho{}^\varkappa{}_\sigma w^\varrho = \mu_\sigma{}^\varkappa{}_\varrho w^\sigma = 0$$

Bezüglich des invarianten Differentials $\tilde{D}$ der gewöhnlichen Vektoren X^a von der Transformationsformel:

$$\hat{X}^a = \frac{\partial \hat{x}^a}{\partial x^b} X^b,$$

bemerken wir vor allem, daß $\tilde{D}X^a$ nach den Definitionsformeln (5. 5) und (5. 6) von [2] ein verallgemeinerter Vektor ist. Es ist im $\mathfrak{M}_n$-Raum:

$$\tilde{D}X^a = \delta^a_i D a^i_b X^b, \tag{4.10}$$

wo das Kronecker-δ nur darum notwendig ist, da bei dem a^i_b der obere Index auf Grund unserer Vereinbarung über die Indizes $i, j, \ldots$ bzw. $a, b, \ldots$ nicht durch a bezeichnet werden kann. Wir machen jetzt die Vereinbarung, daß im folgenden nach den Symbolen $\tilde{D}$ bzw. $\tilde{\mathfrak{D}}$ die Indizes a, b bzw. α, β-entgegen unserer Annahme-immer verallgemeinerte Vektoren bzw. verallgemeinerte Flächenvektoren mit dem Transformationsgesetz

$$\tilde{D}\hat{X}^a = \frac{\partial \hat{v}^a}{\partial v^b}\tilde{D}X^b, \quad \tilde{\mathfrak{D}}\overset{*}{X}^\alpha = \frac{\partial \overset{*}{w}^\alpha}{\partial w^\beta}\tilde{\mathfrak{D}}X^\beta$$

bedeuten werden, wenn $\tilde{\mathfrak{D}}$ das invariante Differential der gewöhnlichen Flächenvektoren mit dem Transformationsgesetz

$$\overset{*}{X}^\alpha = \frac{\partial \overset{*}{u}^\alpha}{\partial u^\beta} X^\beta$$

bedeutet. Es ist:

$$\tilde{\mathfrak{D}}X^\alpha = \delta^\alpha_\varrho \mathfrak{D} a^\varrho_\beta X^\beta, \tag{4.11}$$

wo δ^α_ϱ wieder das Kronecker-δ bedeutet, da bei a^ϱ_β nach der Vereinbarung von § 2 der obere Index nicht durch α bezeichnet werden kann.

Auf Grund von (2. 24) geht nun diese Formel in

$$\tilde{\mathfrak{D}}X^\alpha = \delta^\alpha_\sigma \mathfrak{D} a^i_b B^\sigma_i C^b_\beta X^\beta \tag{4.12}$$

über. Auf Grund von (4. 5) hat aber die Formel (4. 12) dann und nur dann einen Sinn, falls neben den Flächenkomponenten:

$$X^\sigma = a^j_b B^\sigma_j C^b_\beta X^\beta \tag{4.13}$$

auch die Raumkomponenten X^i bekannt sind. Ist X^i ein verallgemeinerter Flächenvektor, so ist $X^i = B^i_\sigma X^\sigma$ und nach (2. 14) und (4. 13) wird in Hinsicht auf (2. 26):

$$X^i = a^i_b C^b_\beta X^\beta \tag{4.14}$$

bestehen. (4. 14) ist somit eine Folgerung von (4. 6) und (4. 13).

Aus (4. 14) und (4. 6) folgt im Hinblick auf (4. 3), daß (4. 12) in die Formel

$$\tilde{\mathfrak{D}}X^\alpha = \delta^\alpha_\sigma \mathfrak{D} X^\sigma$$

übergeht, wo X^σ durch (4. 13) festgelegt ist. Nach (4. 5) wird somit:

$$\tilde{\mathfrak{D}}X^\alpha = \delta^\alpha_\sigma B^\sigma_i DX^i = \delta^\alpha_\sigma B^\sigma_i D a^i_b C^b_\beta X^\beta, \tag{4.15}$$

und diese Formel bestimmt ein invariantes Differential für die gewöhnlichen Flächenvektoren X^β. Wir wollen noch kurz den Fall besprechen in dem der durch (4. 13) bestimmte Vektor keinen Flächenvektor definiert. Offenbar hat (4. 15) auch in diesem Fall einen Sinn. Diese Formel wird aber nicht mit der Formel (4. 8) identisch, da jetzt statt (4. 6)

$$X^i = B^i_\sigma X^\sigma + N^i \pi$$

gelten wird, und die Formeln (4. 9a) und (4. 9b) der Übertragungsparameter werden somit eine andere Form haben.

Zur Formel (4. 15) kann man auch durch einen anderen Weg gelangen. Zum gewöhnlichen Flächenvektor X^β sind durch

$$X^a \overset{\text{def}}{=} C^a_\beta X^\beta$$

die Raumkomponenten bestimmt. Nach der Formel (4. 10) ist das invariante Differential von X^a:

$$\tilde{D}X^a = \delta^a_i Da^i_b C^b_\beta X^\beta$$

ein verallgemeinerter Vektor des $\mathfrak{M}_n$-Raumes. Mit Hilfe des linear-unabhängigen n-Beins B^i_ϱ, N^i hat man die Form:

$$Da^i_b C^b_\beta X^\beta = B^i_\varrho \tilde{\mathfrak{D}} X^\varrho + \pi N^i,$$

wo $\tilde{\mathfrak{D}}X^\varrho$ das invariante Differential des Flächenvektors X^ϱ ist. Eine Überschiebung mit B^σ_i zeigt unmittelbar nach (4. 3), daß

$$\tilde{\mathfrak{D}}X^\sigma = B^\sigma_i Da^i_b C^b_\beta X^\beta$$

im wesentlichen mit (4. 15) übereinstimmt, da das invariante Differential $\tilde{\mathfrak{D}}X^\alpha$ eines gewöhnlichen Vektors — wie das schon bemerkt wurde — ein verallgemeinerter Vektor ist.

Literatur

[1] E. T. Davies, Subspaces of a Finsler space, *Proc. London Math. Soc.* (2) **49** (1947), 19—39.
[2] A. Moór, Übertragungstheorie bezüglich der allgemeinen Linienelementtransformationen, *Publ. Math. Debrecen* **13** (1966), 263—287.
[3] H. Rund, The Differential Geometry of Finsler Spaces, *Berlin,* (1959).
[4] J. M. Wegener, Hyperflächen in Finslerschen Räumen als Transversalflächen einer Schar von Extremalen, *Monatshefte für Math. und Phys.* **44** (1936), 115—130.

(Eingegangen am 26. April 1968.)