Das Modell der hyperbolischen ebenen Geometrie auf der projektiven Geraden

Prof. Dr. O. Varga anläßlich seines 60-ten Geburtstages mit Zuneigung und Verehrung gewidmet

Von L. GYARMATHI (Debrecen)

In der vorangehenden zwei Arbeiten [1] und [2] haben wir die Modelle der hyperbolischen ebenen Geometrie in der Möbiusschen Ebene über dem angeordneten Körper Q [1]) geprüft und es gelang für die Herstellung dieser Modelle ein einheitliches Vefahren zufinden. Dies einheitliche Verfahren wurde dadurch ermöglicht, daß die Punkte der Grenzlinie (Geraden oder Kreislinien), die *Enden* der hyperbolischen Geraden in alle diesen Modellen dieselbe wichtige Rolle gespielt haben. So entsteht die Möglichkeit, daß das Modell der hyperbolischen ebenen Geometrie auf selbst der projektiven Geraden oder auf der mit dieser isomorphen Kreislinien hergestellt werden kann.

In dieser Arbeit werden wir dieses Modell auf der projektiven Geraden aufbauen.

Nehmen wir eine Gerade $\mathfrak{g}$ über einem angeordneten Körper Q und führen wir auf $\mathfrak{g}$ ein gewöhnliches Koordinatensystem ein.

Die Koordinaten der endlichen Punkte Ξ, H und P von $\mathfrak{g}$ seien ξ, η bzw. $\varrho \ldots$ [2]).

Der unendliche Punkt von $\mathfrak{g}$ wird mit ∞ bezeichnet.

Erklärung 1. Unter dem Modellpunkt P versteht man die elliptische Involution I_P der Geraden $\mathfrak{g}$.

Die Involution I_P ist

$$\xi' = \frac{-\frac{\beta}{2}\xi - \gamma}{\alpha\xi + \frac{\beta}{2}}, \qquad 4\alpha\gamma - \beta^2 > 0 \tag{1}$$

wo ξ und ξ' die Koordinaten der entsprechenden Punkte von I_P sind. [3])

---

[1]) Q ist ein Körper, in welchem alle positiven Körperelemente Quadrate sind.

[2]) Die kleine griechische Buchstaben bedeuten die Elemente von Q.

[3]) Es wird bemerkt bezüglich (1) und (2), daß wenn $\alpha \neq 0$ ist, dann ist ∞ der entsprechende Punkt von $-\frac{\beta}{2\alpha}$, wenn aber $\alpha = 0$ ist, dann ist ∞ Doppelpunkt. Der letztere Fall kann in (1) wegen $4\alpha\gamma - \beta^2 > 0$ nicht bestehen.

Erklärung 2. Unter der Modellgeraden g versteht man die hyperbolische Involution I_g der Graden g.

Die Involution I_g ist

$$\xi' = \frac{-\frac{\beta}{2}\xi - \gamma}{\alpha\xi + \frac{\beta}{2}}, \qquad 4\alpha\gamma - \beta^2 < 0. \tag{2}$$

Die Involution I_g kann man auch mit seiner Doppelpunkten $\Xi(\xi)$ und $\mathrm{H}(\eta)$ ergeben: $I_g(\Xi, \mathrm{H})$. Die Punkten Ξ und H nennen wir auch *Endpunkte* der Geraden g. [4])

Erklärung 3. Ein Modellpunkt I_P inzidiert auf eine Modellgerade I_g, wenn die Doppelpunkte von I_g entsprechendes Punktpaar von I_P bilden.

Das heißt erfüllt ξ und $\eta = \xi'$ die (1).

Aus der Erklärung 3. folgt, daß beide Enden der durch die Punkte I_{P_1} und I_{P_2} bestimmten Geraden das gemeinsame entsprechende Punktpaar der Involutionen I_{P_1} und I_{P_2} geben.

Erklärung 4. Unter Geradentransformation T versteht man in dem Modell eine solche Abbildung, welche die Gerade I_g mit Enden (Doppelpunkten von I_g) ξ, η in die Geraden I_g' mit Enden (Doppelpunkten von I_g') ξ', η' überführt und zwischen den Enden der Zusammenhang

$$\xi' = \frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta}, \quad \eta' = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0) \text{ [5])} \tag{2}$$

besteht.

Satz 1. *Die Geradetransformation T ist nicht nur auf der Geraden sondern auch in den Punkten eine eindeutig.*

Beweis. Die Eineindeutigkeit der T auf Geraden folgt unmittelbar aus (2); (2) ist eine projektive Transformation und deshalb führt sie — wie bekannt — die elliptische Involution I_P in die elliptische Involution $I_{P'}$ eineindeutig über.

Erklärung 5. Zwei Modellgeraden I_g und I_l sind parallel, wenn der eine der Doppelpunkte von I_g mit einem der Doppelpunkte von I_l Zusammenfällt.

Erklärung 6. Zwei elliptische Involution I_{P_1} und I_{P_2} bestimmen die Modellstrecke $\overline{I_{P_1} I_{P_2}}$.

Erklärung 7. Zwei Modellgeraden (hyperbolische Involutionen) $I_g(\Xi_{g_1}, \mathrm{H}_{g_2})$ und $I_l(\Xi_{l_1}, \mathrm{H}_{l_2})$ bestimmen (wie in der gewöhnlichen Geometrie) vier Modellwinkel. Mit der Auszeichnung je eines der Enden der Modellgeraden, z.B. des Endes Ξ_{g_1} und Ξ_{l_1}, ist der Winkel $\sphericalangle(g_1 l_1)$ der Halbgeraden g_1 und l_1 bestimmt.

Erklärung 8. $\overline{I_{P_1} I_{P_2}} \equiv \overline{I'_{P_1} I'_{P_2}}$, bzw. $\sphericalangle(g_1 l_1) \equiv \sphericalangle(g_1' l_1')$, wenn es eine solche Transformation gibt, welche den Punkt I_{P_1} in I'_{P_1}, den I_{P_2} in I'_{P_2} bzw. den Punkt Ξ_{g_1} in Ξ'_{g_1}, den Ξ_{l_1} in Ξ'_{l_1}, und zugleich den Punkt H_{g_2} in H'_{g_2}, den H_{l_1} in H'_{l_1} überführt.

---

[4]) Bezüglich Erklärung 2. und 3. siehe noch [4] (S. 175) und [3] (S. 349).

[5]) Es wird bezüglich der Transformation des Endes ∞ bemerkt, daß wenn $\gamma \neq 0$ ist, dann ist ∞ das Bild von $-\frac{\delta}{\gamma}$, und das Bild von ∞ ist $\frac{\alpha}{\gamma}$, wenn aber $\gamma = 0$ ist, dann ist das Bild von ∞ es selbst.

Die Prüfung der Kongruenz erleichtern auch in diesem Modell die in geeigneter Weise ausgewählten Winkel- und Streckecharakteristiken. Die erste Charakteristik ist in der mathematischen Literatur gebräuchlich; die Streckecharakteristik wurde nach unseres Kenntnis von uns in [2] (S. 153) eingeführt.

Erklärung 9. Unter Winkelcharakteristik versteht man das folgende Doppelverhältnis

$$\Delta \sphericalangle (g_1 l_1) = (\Xi_{g_1} H_{g_2} \Xi_{l_1} H_{l_1}),$$

wo Ξ_{g_1} bzw. Ξ_{l_1} das Ende von Halbgeraden g_1 bzw. von l_1 und H_{g_2} bzw. H_{l_2}, das Ende der zu g_1 bzw. l_1 gehörenden anderen Halbgeraden sind.

Satz 2. $\sphericalangle (g_1 l_1) \equiv \sphericalangle (g_1' l_1')$ *gilt dann und nur dann, wenn*

$$\Delta \sphericalangle (g_1 l_1) = \Delta \sphericalangle (g_1' l_1').$$

besteht.

Der Beweis des Satzes folgt aus der Erklärung 8 und 9 einfach. (Siehe [2] (S. 152).)

Aus der Satz 2 und aus der traditionellen Erklärung des rechten Winkels folgt der folgende

Satz 2'. *Die Geraden* $I_{g_1}(\Xi_1 H_1)$ *und* $I_{g_2}(\Xi_2 H_2)$ *sind senkrecht auf einander dann und nur dann, wenn*

$$(\Xi_1 H_1 \Xi_2 H_2) = -1.$$

Man kann in jedem Punkt I_P *einer Geraden* $I_{g_1}(\Xi_1, H_1)$ *eine und nur eine Senkrechte ziehen.*

Der zweite Teil des Satzes 2' folgt daraus, daß I_P ein und nur ein entsprechendes Punktpaar $(R_1, \hat{R}_1)$ hat, welches (Ξ_1, H_1) harmonisch trennt. Also für diese Punkte gilt

$$(\Xi_1 H_1 R_1 \hat{R}_1) = -1.$$

Erklärung 10. Unter der Charakteristik der Modellstrecke versteht man

$$\Delta \overline{I_{P_1} I_{P_2}} = (R_1 \hat{R}_1 R_2 \hat{R}_2)$$

wo $R_1, \hat{R}_1$ bzw. $R_2, \hat{R}_2$ die Enden der auf Modellgeraden $I_{P_1}I_{P_2}$ im Modellpunkten I_{P_1} bzw. I_{P_2} aufgestellten senkrechten Geraden sind. Die Ende der Senkrechten sei so bezeichnet, daß R_1 und R_2 auf eine der Strecken fallen, welche auf g die Ende der $I_{P_1}I_{P_2}$ bestimmen.

Satz 3. $\overline{I_{P_1}I_{P_2}} \equiv \overline{I'_{P_1}I'_{P_2}}$ *ist dann, und nur dann, wenn* $\Delta \overline{I_{P_1}I_{P_2}} = \Delta \overline{I'_{P_1}I'_{P_2}}$ *gilt.*

Der Beweis des Satzes übereinstimmt mit dem Beweis der Behauptung 4, 7 in [2] (S. 153).

Jetzt können wir die *Ordnung* definieren.

Erklärung 11. Der Punkt I_{P_2} der durch I_{P_1} und I_{P_2} gehenden Modellgeraden $I_g(\Xi\mathrm{H})$ ist zwischen I_{P_1} und I_{P_2}, wenn man nach der Erklärung 10 die Ende $R_1, \hat{R}_1$; $R_2, \hat{R}_2$ bzw. $R_3, \hat{R}_3$ solcher Geraden herstellt, welche auf die Gerade I_g in dem Punkten I_{P_1}, I_{P_2} bzw. I_{P_3} senkrecht stehen, und wenn R_3 ein innerer Punkt der Strecke $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ bezüglich der ausgezeichneten Strecke $\Xi\mathrm{H}$ ist.

Wir sollen noch beweisen, daß die Axiome der hyperbolischen ebenen Geometrie in unserem Modell gültig sind. Wir denken hier auf solche Axiome, welche HILBERT angewendet hat, als er die hyperbolischen ebenen Geometrie ohne Stetigkeitsaxiomen aufgebaut hat ([4] (S. 168)).

Der Beweis kann so geschehen, daß wir durch $\mathfrak{g}$ eine Möbiussche Ebene über dem angeordneten Körper Q führen, und in dieser Ebene herstellen wir ein solches Modell der hyperbolischen ebenen Geometrie aus der in [1] und [2] bekannten Modelle, welches eben die Grenzgerade $\mathfrak{g}$ hat. In dieser Modelle sind die erwähnten Axiomen — wie es bekannt ([2] (S. 154—159)) — gültig. Weil der zitierte Beweis der Gültigkeit von Axiomen so fertig machen kann, daß dies nur auf der in dieser Arbeit erwähnten Erklärungen und auf aus dieser Erklärungen ergebenden Sätzen gegründet ist, und sich nur auf die Punkten von $\mathfrak{g}$ bezieht, folgt, daß die obige Axiomen auch in unserem Modell gültig sind.

Bemerkung. Nehmen wir in Achtung die Arbeit von P. SZÁSZ [6] in welcher die Trigonometrie der hyperbolischen ebenen Geometrie ausschließlich nur durch die Verwendung der „Enden" hergestellt wurde. Dies bedeutet, daß wir auch in unserem Modell die Trigonometrie der hyperbolischen ebenen Geometrie vorstellen können.

Literatur

[1] L. GYARMATHI, Die Modelle der hyperbolischen ebenen Geometrie in der Möbiusschen Ebene I *Publ. Math. Debrecen* **14** (1967), 153—160.

[2] L. GYARMATHI, Die Modelle der hyperbolischen ebenen Geometrie in der Möbiusschen Ebene II. *Publ. Math. Debrecen,* **15** (1968), 149—163.

[3] W. KLINGENBERG, Eine Begründung der hyperbolischen Geometrie, *Math. Ann.* **127** (1954), 340—356.

[4] D. HILBERT, Grundlagen der Geometrie. *Stuttgart,* 1956.

[5] KERÉKJÁRTÓ B.: A geometria alapjairól I., *Szeged* 1937; II., *Budapest* 1944.

[6] P. SZÁSZ, Einfache Herstellung der hyperbolischen Trigonometrie in der Ebene auf Grund der Hilbertschen Endenrechnung. *Ann. Univ. Sci. Budapest,* Eötvös. Sect. Math., **5** (1962), 79—85.

(Eingegangen am 1. Mai 1968.)