Ядра неприводимых представлений силовской p-подгруппы симметрической группы S_{p^n}

К. БУЗАШИ (Дебрецен)*)

Введение

В теории групп особое место занимает проблема описания всех нормальных делителей данной группы. Тем более важно решение такой задачи для таких универсальных групп, как группа треугольных матриц над полем, группа квадратных матриц над некоторым полем, и симметрическая группа. В этом направлении, как известно, далеко не всё решено. Л. А. Калужнин ([1], [2]) описал все характеристические подгруппы силовской p-подгруппы G_n симметрической группы S_{p^n}. А. И. Вейр решил такую же задачу для группы квадратных матриц над полем ([3]). Он нашёл также удобный метод для построения всех характеристических подгрупп группы S_{p^n} ([4]). С. Д. Берман, используя свой известный метод продолжения характеров ([5]), построил все нормальные делители группы треугольных матриц над полем ([6]).

В настоящей работе используется строение центрального ряда группы G_n по работе [4] и алгоритм продолжения характеров ([5]). С помощью этих результатов даётся полное описание ядер всех неприводимых комплексных представлений силовской p-подгруппы G_n симметрической группы S_{p^n} для произвольного простого числа p и любого конечного натурального числа n. Эти ядра неприводимых представлений — особые нормальные делители группы G_n, так как их всевозможные пересечения пробегают полную систему нормальных делителей группы G_n. Поэтому представляет такой интерес нахождение ядер всех неприводимых представлений группы G_n.

В работе используются некоторые результаты о структуре коммутаторов элементов группы ([8]).

§ 2.

Вспомогательные сведения

В этом параграфе мы приводим без доказательства некоторые факты из работ [4], [5], [6], [7].

Для удобства на протяжении всей работы мы будем рассматривать силов-

*) K. Buzási (Debrecen).

скую p-подгруппу $G_{n+1}=G$ симметрической группы $S_{p^{n+1}}$ для простого p и произвольного натурального числа n.

Введём некоторые обозначения (по [4]):

Группа G задаётся определяющими соотношениями

(2. 1)
$$(a^{(j)}_{i_1 i_2 \dots i_j})^p = e \qquad (j=0, 1, \dots, n; \quad i_r=1, 2, \dots, p; \quad r=1, 2, \dots, j)$$
$$(a^{(j)}_{i_1 \dots i_j})^{-1} \cdot a^{(m)}_{k_1 \dots k_j k_{j+1} \dots k_m} a^{(j)}_{i_1 \dots i_j} = \begin{cases} a^{(m)}_{i_1 \dots i_j k_{j+1}+1\, k_{j+2} \dots k_m}, & \text{если} \quad i_r=k_r, \ r=1, \dots, i \\ a^{(m)}_{k_1 \dots k_j k_{j+1} \dots k_m}, & \text{если } i_r \neq k_r \text{ для некоторого } r \end{cases}$$
$$(0 \leqq j < m \leqq n; \quad i_r=1, 2, \dots, p; \quad r=1, 2, \dots, j).$$

Пусть

(2. 2)
$$x^{(m)} = a^{(0)} \cdot a^{(1)}_1 \dots a^{(m-1)}_{11 \dots 1}; \quad x^{(n)}=x,$$
$$y^{(m)}_1 = a^{(m)}_{1 \dots 1}; \quad y^{(m)}_i = (x^{(m)})^{-1} \cdot y^{(m)}_{i-1} \cdot x^{(m)} \qquad (m=1, 2, \dots, n \quad i=2, 3, \dots, p^m),$$
$$\alpha^{(m)}_1 = y^{(m)}_1; \quad \alpha^{(m)}_i = (x^{(m)}, \alpha^{(m)}_{i-1})$$

где $(x^{(m)}, \alpha^{(m)}_{i-1})$ — коммутатор элементов $x^{(m)}$ и $\alpha^{(m)}_{i-1}$.

(2. 3)
$$A^{(m)} = \{\alpha^{(m)}_{p^m}, \alpha^{(m)}_{p^m-1}, \dots, \alpha^{(m)}_1\}$$
$$A^{(m)}_i = \{\alpha^{(m)}_{p^m}, \alpha^{(m)}_{p^m-1}, \dots, \alpha^{(m)}_i\} \qquad (m=1, 2, \dots, n; \ 1 < i \leqq p^m).$$

Тогда центральный ряд группы G_{n+1} имеет вид

(2. 4)
$$A^{(n)}_{p^n} \subset A^{(n)}_{p^n-1} \subset \dots \subset A^{(n)}_{p^{n-1}+1} \subset A^{(n)}_{p^{n-1}} A^{(n-1)}_{p^{n-1}} \subset \dots \subset A^{(n)}_{p^{n-2}+1} A^{(n-1)}_{p^{n-2}+1} \subset$$
$$\subset A^{(n)}_{p^{n-2}} A^{(n-1)}_{p^{n-2}} A^{(n-2)}_{p^{n-2}} \subset \dots \subset A^{(n)}_{p^{n-i}+1} \dots A^{(n-i+1)}_{p^{n-i}+1} \subset A^{(n)}_{p^{n-i}} \dots A^{(n-i)}_{p^{n-i}} \subset$$
$$\dots \subset A^{(n)}_2 A^{(n-1)}_2 \dots A^{(1)}_2 \subset A^{(n)} A^{(n-1)} \dots A^{(1)} A^{(0)} = G,$$

где

(2. 5)
$$G_{n+1} \cong A^{(n)} \cdot G_n$$

и G_n — сплетение n циклических групп порядка p.

Метод продолжения характеров ([5]) заключается в следующем. Пусть A — любая конечная нильпотентная группа и Z — центр группы A. Пусть $\chi^{(1)}_1, \chi^{(1)}_2, \dots, \chi^{(1)}_r$ — все характеры группы Z и $H^{(1)}_i$ — ядро характера $\chi^{(1)}_i$. Найдём такую группу $F^{(1)}_i$, что фактор-группа $F^{(1)}_i/H^{(1)}_i$ является центром фактор-группы $A/H^{(1)}_i$, и линейно продолжим характер $\chi^{(1)}_i$ в $F^{(1)}_i$. (Линейное продолжение характера на протяжении всей работы будет подразумеваться в смысле [5]). Пусть эти продолжения: $\chi^{(2)}_{i1}, \chi^{(2)}_{i2}, \dots, \chi^{(2)}_{ik}$, а ядра их соответственно $H^{(2)}_{i1}, H^{(2)}_{i2}, \dots, H^{(2)}_{ik}$. Тогда опять построим такую группу $F^{(2)}_{ij}$ для каждого характера $\chi^{(2)}_{ij}$, что фактор-группа $F^{(2)}_{ij}/H^{(2)}_{ij}$ центр фактор-группы $A/H^{(2)}_{ij}$, и линейно продолжим характер $\chi^{(2)}_{ij}$ в группе $F^{(2)}_{ij}$. И т. д. После конечного числа шагов получаются все линейные части характеров группы A.

Метод построения характеристических подгрупп группы G, предложенный А. И. Вейром ([4]), заключается в следующем: Строится диаграмма (см. диаграмму 1.), столбцы которой соответствуют подгруппам $A^{(\nu)}(\nu=0, 1, \dots, n)$. В столбцы записываются базисные элементы α^{ν}_{μ} с возростающими снизувверх нижними индексами.

Произвольная горизонтальная черта, проведённая над базисными элементами с одинаковыми нижними индексами, определяет член центрального ряда группы G. Она является полупрямым произведением подгрупп, порождённых базисными элементами, лежащими внутри перечеркнутых столбцов высше черты. (Напр. на диаграмме 1. горизонтальная черта определяет подгруппу $A_i^{(n)} \cdot A_i^{(n-1)} \cdot \ldots \cdot A_i^{(n-t)} = \bar{G}_i$.) Каждый член центрального ряда группы G может быть получен с помощью некоторой такой горизонтальной черты.

Произвольная ломаная, проведённая под базисными элементами $\alpha_{i_0}^{(n)}, \alpha_{i_1}^{(n-1)}, \ldots, \alpha_{i_t}^{(n-t)}$, удовлетворяющими условию $1 \leqq i_0, i_1, \ldots, i_t \leqq p^{n-t}+1$, определяет характеристическую подгруппу $A_{i_0}^{(n)} A_{i_1}^{(n-1)} \ldots A_{i_t}^{(n-t)} = K$ группы G, и любая характеристическая подгруппа группы G может быть получена таким путём. (см. [4])

Напомним несколько фактов о структуре центрального ряда (2. 4) по работе [7].

Лемма 1.

$$(a^{(0)}, \alpha_{kp+\mu}^{(r)}) = \begin{cases} \alpha_{kp+\mu+1}^{(r)}, & \text{если} \quad \mu \neq 0 \\ e, & \text{если} \quad \mu = 0, \end{cases}$$

$$(0 \leqq k \leqq p^{r-1}; \quad 0 < \mu \leqq p; \quad 1 \leqq r \leqq n).$$

Лемма 2.

$$(\alpha_1^{(m)}, \alpha_{kp^m+\mu}^{(r)}) = \begin{cases} \alpha_{(k+1)p^m+1}^{(r)}, & \text{если} \quad k \neq \nu p - 1 \\ e, & \text{если} \quad k = \nu p - 1, \end{cases}$$

$$(1 \leqq m < r \leqq n; \quad 0 \leqq \mu \leqq p^m; \quad 0 \leqq k < p^{r-m}).$$

Лемма 3.

$$(\alpha_i^{(m)}, \alpha_{kp^m}^{(r)}) \in A_{kp^m+2}^{(r)},$$

$$(1 < i \leqq p^m; \quad 0 \leqq m < r \leqq n; \quad 0 < k \leqq p^{r-m}).$$

Лемма 4.

$$(\alpha_i^{(m)}, \alpha_{kp^m+1}^{(r)}) = \begin{cases} \alpha_{(k+1)p^m+1}^{(r)}, & \text{если} \quad k \neq \mu p - 1 \\ e, & \text{если} \quad k = \mu p - 1 \end{cases}$$

$$(1 \leqq i \leqq p^m; \quad 0 \leqq m < r \leqq n; \quad 0 \leqq k < p^{n-m}).$$

Лемма 1'.

$$(a^{(m)}, \alpha_{kp^m+\mu}^{(r)}) \in A_{(k+1)p^m+1}^{(r)}$$

для всех $0 \leqq m < r \leqq n; \quad 0 \leqq k < p^{r-m}; \quad 1 \leqq \mu \leqq p^m; \quad a^{(m)} \in A^{(m)}$.

Лемма 2'.

$$(a^{(m)}, \alpha_{kp^m}^{(r)}) \in A_{kp^m+2}^{(r)}$$

для всех $0 \leqq m < r \leqq n; \quad 0 < k < p^{r-m}; \quad a^{(m)} \in A^{(m)}$.

Лемма 3'.

$$(\alpha_i^{(m)}, \alpha_1^{(r)}) = \alpha_{p^m+1}^{(r)}$$

для всех $1 \leqq i \leqq p^m; \quad 0 \leqq m < r \leqq n$.

Докажем ещё одно любопытное свойство коммутаторов элементов группы G.

Лемма 5.

$$(y_i^{(m)}, \alpha^{(r)}_{hp^{m+1}+kp^m+s}) = \begin{cases} e, & \text{если} \quad i > s, \\ \prod\limits_{\nu=1}^{i} (\alpha^{(r)}_{hp^{m+1}+(k+1)p^m+\nu})^{(-1)^{i+\nu} C_{i-1}^{\nu-1} C_{s-1}^{i-1}}, & \text{если} \quad i \leqq s \end{cases}$$

Доказательство. Из соотношений (2. 1) и определений (2. 2) следует, что

$$(y_i^{(m)})^{-1} y^{(r)}_{hp^{m+1}+kp^m+s} y_i^{(m)} = \begin{cases} y^{(r)}_{hp^{m+1}+kp^m+s}, & \text{если} \quad s \neq i \\ y^{(r)}_{hp^{m+1}+(k+1)p^m+i}, & \text{если} \quad s = i. \end{cases}$$

Как известно (см. [7]), имеют место двойственные соотношения

$$\alpha_j^{(m)} = \prod_{\nu=1}^{j} (y_\nu^{(m)})^{(-1)^{\nu-1} C_{j-1}^{\nu-1}}$$

(1)

$$y_j^{(m)} = \prod_{\nu=1}^{j} (\alpha_\nu^{(m)})^{(-1)^{\nu-1} C_{j-1}^{\nu-1}}.$$

Следовательно,

$$(y_i^{(m)}, \alpha^{(r)}_{hp^{m+1}+kp^m+s}) = (y_i^{(m)})^{-1} \left\{ \prod_{\nu=1}^{hp^{m+1}+kp^m+s} (y_\nu^{(r)})^{-(-1)^{\nu-1} C^{\nu-1}_{hp^{m+1}+kp^m+s-1}} \right\} \cdot$$

$$\cdot\, y_i^{(m)} \alpha^{(r)}_{hp^{m+1}+kp^m+s}.$$

Однако внутренний автоморфизм, порождённый элементами $y_i^{(m)}$ двигает только элементы вида $y_\mu^{(r)}$, где $\mu \equiv i \pmod{p^m}$.

Пусть сначала $i \leqq s$. По лемме 1'

$$(y_i^{(m)}, \alpha^{(r)}_{hp^{m+1}+kp^m+s}) \in A^{(r)}_{hp^{m+1}+(k+1)p^m+1},$$

кроме того, учитывая формулы (1), получим

$$(y_i^{(m)}, \alpha^{(r)}_{hp^{m+1}+kp^m+s}) =$$

$$= (y_i^{(m)})^{-1} \left[\dots (y^{(r)}_{hp^{m+1}+kp^m+i})^{-(-1)^{hp^{m+1}+kp^m+i-1} C^{hp^{m+1}+kp^m+i-1}_{hp^{m+1}+kp^m+s-1}} \dots \right] \cdot$$

$$\cdot\, y_i^{(m)} \alpha^{(r)}_{hp^{m+1}+kp^m+s} =$$

$$= (y_i^{(m)})^{-1} \left[\dots (y^{(r)}_{hp^{m+1}+kp^m+i})^{(-1)^{hp^{m+1}+kp^m+i} C^{i-1}_{s-1}} \dots \right] y_i^{(m)} \alpha^{(r)}_{hp^{m+1}+kp^m+s} =$$

$$= \left[\dots (y^{(r)}_{hp^{m+1}+(k+1)p^m+i})^{(-1)^{hp^{m+1}+kp^m+i} C^{i-1}_{s-1}} \dots \right] \alpha^{(r)}_{hp^{m+1}+kp^m+s} =$$

$$= \left[\prod_{\nu=1}^{i} (\alpha^{(r)}_{hp^{m+1}+(k+1)p^m+\nu})^{(-1)^{hp^{m+1}+(k+1)p^m+\nu-1} C^{hp^{m+1}+(k+1)p^m+\nu-1}_{hp^{m+1}+(k+1)p^m+i-1}} \right]^t =$$

$$= \prod_{\nu=1}^{i} (\alpha^{(r)}_{hp^{m+1}+(k+1)p^m+\nu})^{(-1)^{i+\nu} C_{i-1}^{\nu-1} C_{s-1}^{i-1}},$$

где

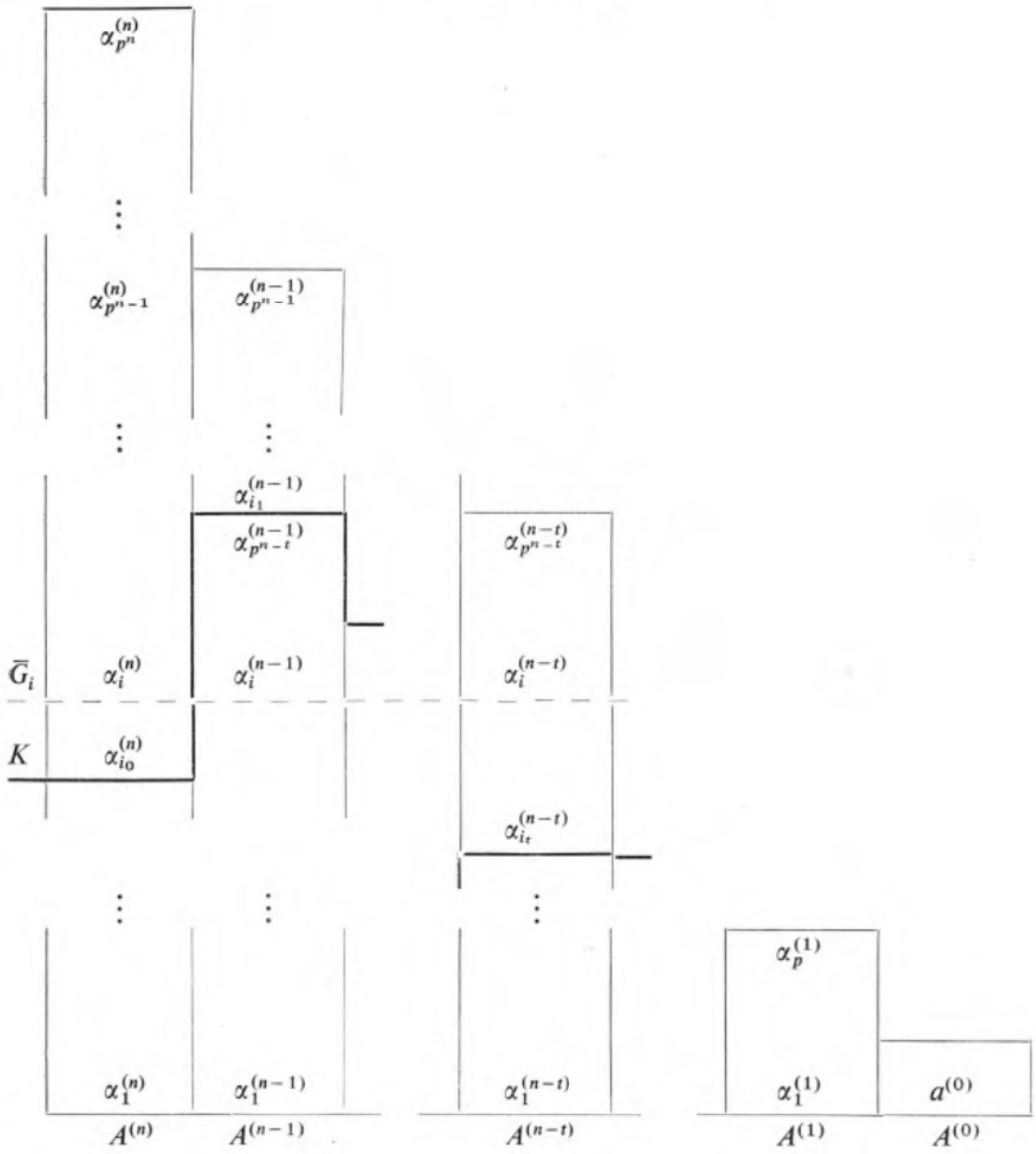
$$t = (-1)^{hp^{m+1}+kp^m+i}C_{s-1}^{i-1},$$

так как

$$C_{hp^{m+1}+kp^m+s-1}^{hp^{m+1}+kp^m+i-1} \equiv C_{s-1}^{i-1} \pmod p,$$

$$C_{hp^{m+1}+(k+1)p^m+i-1}^{hp^{m+1}+(k+1)p^m+\nu-1} \equiv C_{i-1}^{\nu-1} \pmod p.$$

Диаграмма 1



В случае $i > s$, рассуждая точно так же, получим

$$(y_i^{(m)}, \alpha^{(r)}_{hp^{m+1}+kp^m+s}) =$$

$$= (y_i^{(m)})^{-1}\Big[\dots (y^{(r)}_{hp^{m+1}+(k-1)p^m+i})^{-(-1)^{hp^{m+1}+(k-1)p^m+i-1} C^{hp^{m+1}+(k-1)p^m+i-1}_{hp^{m+1}+kp^m+s-1}} \dots\Big] \cdot$$

$$\cdot\, y_i^{(m)} \alpha^{(r)}_{hp^{m+1}+kp^m+s} = e,$$

так как

$$C^{hp^{m+1}+(k-1)p^m+i-1}_{hp^{m+1}+kp^m+s-1} \equiv 0 \pmod p.$$

Лемма доказана.

§ 3.

Ядра линейных частей характеров, возникающих до первой критической точки

Определение 1. r-ой критической точкой называется черта, проведённая на диаграмме 1 над базисными элементами с нижними индексами p^{n-r}.

В этом параграфе рассматривается продолжение характера $\chi(p_0^n)$ до первой критической точки. Все характеры, возникающие при этом, но дальше не продолжающиеся, уже являются линейными частями характеров группы G. Даются также ядра таких характеров.

Определение 2. Через $\chi(\lambda^{(n)}_{i_n}, \lambda^{(n-1)}_{i_{n-1}}, \dots, \lambda^{(r)}_{i_r})$ обозначим характер, определённый в подгруппе $A^{(n)}_{\lambda^{(n)}} A^{(n-1)}_{\lambda^{(n-1)}} \dots A^{(r)}_{\lambda^{(r)}}$, который принимает значение 1 на всех базисных элементах $\alpha^{(v)}_{p^v}, \alpha^{(v)}_{p^v-1}, \dots, \alpha^{(v)}_{\lambda^{(v)}+1}$ $(v = r, r+1, \dots, n)$ и равен ξ^{i_v} на элементах $\alpha^{(v)}_{\lambda^{(v)}}$ $(i_v = 0, 1, \dots, p-1;\ v = r, r+1, \dots, n;\ 0 \leqq r \leqq n)$, где ξ — первообразный комплексный корень p-ой степени из 1.

Теорема 3. 1. *Характер $\chi(k_0)$ подгруппы $A^{(n)}_k$ имеет в подгруппе $A^{(n)}_{k-1}$ линейные продолжения вида $\chi(k-1_j)$ $(j = 0, 1, \dots, p-1)$ для всех $p^{n-1}+1 < k \leqq p^n$.*

Доказательство. Ядро характера $\chi(k_0)$ — группа $A^{(n)}_k$. Из вида центрального ряда (2. 4) группы G следует, что фактор-группа $A^{(n)}_{k-1}/A^{(n)}_k$ является центром фактор-группы $G/A^{(n)}_k$. Следовательно характер $\chi(k_0)$ линейно продолжается в группе $A^{(n)}_{k-1}$, причём все эти продолжения имеют вид $\chi(k-1_j)$ $(j = 0, 1, \dots, p-1)$.

Теорема 3. 2. *Характер $\chi(k_i)$ подгруппы $A^{(n)}_k$ не имеет линейных продолжений ни в одном нормальном делителе группы G, для всех $i = 1, 2, \dots, p-1$; $p^n \geqq k \geqq p^{n-1}+1$. Ядро характера—группа $A^{(n)}_{k+1}$.*

Доказательство. Очевидно, ядром характера $\chi(k_i)$ является группа $A^{(n)}_{k+1}$ $(A^{(n)}_{p^n+1} = e)$. Из строения центрального ряда (2. 4) следует, что $A^{(n)}_k/A^{(n)}_{k+1}$ — центр фактор-группы $G/A^{(n)}_{k+1}$, значит характер $\chi(k_i)$ линейно может продолжаться только в группе $A^{(n)}_k$, где он уже определён. Теорема доказана.

§ 4.

Продолжение характеров, возникающих до второй критической точки

В этом параграфе мы рассмотрим линейное продолжение характеров, возникающих при продолжении характера $\chi(p^{n-1}+1_0)$ через первую критическую точку и линейное продолжение всех характеров, возникающих в процессе продолжения характеров до второй критической точки. Определяются ядра всех не продолжающихся дальше характеров.

Теорема 4. 1. *Характер $\chi(p^{n-1}+1_0)$ группы $A^{(n)}_{p^{n-1}+1}$ линейно продолжается в группе $A^{(n)}_{p^{n-1}}A^{(n-1)}_{p^{n-1}}$. Все линейные продолжения его имеют вид $\chi(p^{n-1}_i, p^{n-1}_j)$ $(i, j=0, 1, \ldots, p-1)$.*

Доказательство. Из строения центрального ряда (2. 4) группы G теорема непосредственно вытекает.

Теорема 4. 2. *Характер $\chi(k_0, k_0)$ группы $A^{(n)}_k\cdot A^{(n-1)}_k$ линейно продолжается в группе $A^{(n)}_{k-1}\cdot A^{(n-1)}_{k-1}$ в виде характеров $\chi(k-1_i, k-1_j)$ $(i, j=0, 1, \ldots, p-1)$ для всех $p^{n-1}\geqq k>p^{n-2}+1$.*

Доказательство следует из строения центрального ряда (2. 4) группы G.

Теорема 4. 3. *Характер $\chi(k_0, r_i)$ группы $A^{(n)}_k\cdot A^{(n-1)}_r$ линейно продолжается в подгруппе $A^{(n)}_{k-1}\cdot A^{(n-1)}_r$ в виде характеров $\chi(k-1_j, r_i)$ $(j=0, 1, \ldots, p-1)$ для всех $p^{n-1}\geqq r\geqq p^{n-2}+1$, $r\geqq k>1$, $i=1, 2, \ldots, p-1$.*

Доказательство. Очевидно, группа $A^{(n)}_k\cdot A^{(n-1)}_{r+1}$ является ядром характера $\chi(k_0, r_i)$ для любого $0<i<p$.

Рассмотрим центр Z фактор-группы $G/A^{(n)}_k\cdot A^{(n-1)}_{r+1}$. Ясно, что смежный класс $\alpha^{(n)}_{k-1}A^{(n)}_k\cdot A^{(n-1)}_{r+1}$ лежит в центре Z, так как $(x, \alpha^{(n)}_{k-1})=\alpha^{(n)}_k\in A^{(n)}_k$ и $(a^{(m)}, \alpha^{(n)}_{k-1})\in$ $\in A^{(n)}_{k+1}$ для любого $0<m<n$ согласно леммам 1′, 2′.

Точно так же можно показать, что смежный класс $\alpha^{(n-1)}_r A^{(n)}_k A^{(n-1)}_{r+1}$ лежит в центре Z фактор-группы $G/A^{(n)}_k A^{(n-1)}_{r+1}$. Действительно, группа G представима в виде $G=A^{(n)}\cdot A^{(n-1)}\cdot\ldots\cdot A^{(1)}\cdot\{x^{(n-1)}\}$. Однако $(x^{(n-1)}, \alpha^{(n-1)}_r)=\alpha^{(n-1)}_{r+1}\in A^{(n-1)}_{r-1}$ и, согласно леммам 1′, 2′, $(a^{(m)}, \alpha^{(n-1)}_r)\in A^{(n-1)}_{r+2}$ для всех $0<m<n-1$. Осталось заметить, что $(a^{(n)}, \alpha^{(n-1)}_r)\in A^{(n)}_{p^{n-1}+1}\subseteqq A^{(n)}_k$.

Покажем теперь, что центр Z порождается смежными классами $\alpha^{(n)}_{k-1}R$, $\alpha^{(n-1)}_r R$ $(R=A^{(n)}_k A^{(n-1)}_{r+1})$. Предположим, что $gR\in Z$. Элемент $g\in G$ представляется в виде

$$g=(a^{(0)})^{\nu_0}a^{(1)}\ldots a^{(n-1)}a^{(n)},$$

где

$$a^{(\mu)}\in A^{(\mu)}\qquad(\mu=1, 2, \ldots, n).$$

Пусть

$$a^{(\mu)}=(\alpha^{(\mu)}_1)^{\delta^{(\mu)}_1}\ldots(\alpha^{(\mu)}_{p^\mu})^{\delta^{(\mu)}_{p^\mu}}\qquad(\mu=1, 2, \ldots, n).$$

Так как

$$(x^{(\mu)}, \alpha^{(\mu)}_i)=\alpha^{(\mu)}_{i+1}\qquad(i=1, 2, \ldots, p^\mu-1),$$

и

$$R\cap A^{(\mu)}=e\quad(\mu<n-1),$$

то

$$a^{(\mu)} = (\alpha_{p^\mu}^{(\mu)})^{\delta_{p^\mu}^{(\mu)}} \qquad (\mu > n-1).$$

Однако, согласно лемме 3′,

$$(\alpha_1^{(n-1)}, \alpha_{p^\mu}^{(\mu)}) = \alpha_{p^\mu+1}^{(n-1)} \notin R,$$

так как $r+1 > p^\mu + 1$, если $\mu < n-1$. Следовательно, элемент g имеет вид

$$g = (\alpha_1^{(n)})^{\delta_1^{(n)}} \dots (\alpha_{p^n}^{(n)})^{\delta_{p^n}^{(n)}} (\alpha_1^{(n-1)})^{\delta_1^{(n-1)}} \dots (\alpha_{p^{n-1}}^{(n-1)})^{\delta_{p^{n-1}}^{(n-1)}}.$$

Однако $(x, \alpha_i^{(n)}) = \alpha_{i+1}^{(n)} \notin R$ и $(x, \alpha_j^{(n-1)}) = \alpha_{j+1}^{(n-1)} \notin R$, если $i < k-1$ и $j < r$. Учитывая теперь соотношения

$$(a, bc) = (a, c) \cdot (b, c) \cdot ((a, b), c),$$

мы получим, что

$$g = (\alpha_{k-1}^{(n)})^{\delta_{k-1}^{(n)}} \dots (\alpha_{p^n}^{(n)})^{\delta_{p^n}^{(n)}} (\alpha_r^{(n-1)})^{\delta_r^{(n-1)}} \dots (\alpha_{p^{n-1}}^{(n-1)})^{\delta_{p^{n-1}}^{(n-1)}}.$$

Но тогда

$$gR = (\alpha_{k-1}^{(n)})^{\delta_{k-1}^{(n)}} (\alpha_r^{(n-1)})^{\delta_r^{(n-1)}} R,$$

так как

$$\alpha_k^{(n)}, \dots, \alpha_{p^n}^{(n)}, \alpha_{r+1}^{(n-1)}, \dots, \alpha_{p^{n-1}}^{(n-1)} \in R.$$

Мы показали, что центр Z фактор-группы G/R порождается смежными классами $\alpha_{k-1}^{(n)}R$ и $\alpha_r^{(n-1)}R$.

Это значит, что характер $\chi(k_0, r_i)$ линейно продолжается в группе $F = A_{k-1}^{(n)} A_r^{(n-1)}$, и, очевидно, все его линейные продолжения имеют вид $\chi(k-j, r_i)$, где $j = 0, 1, \dots, p-1$. Теорема доказана.

Совершенно аналогично доказывается

Теорема 4. 4. *Характер $\chi(r_i, k_0)$ группы $A_r^{(n)} \cdot A_k^{(n-1)}$ линейно продолжается в группе $F = A_r^{(n)} \cdot A_{k-1}^{(n-1)}$ и все его линейные продолжения имеют вид $\chi(r_i, k-1_j)$ для всех $j = 0, 1, \dots, p-1$; $p^{n-2}+1 \leq r \leq p^{n-1}$; $1 < k \leq r$; $1 \leq i \leq p-1$.* Отметим, что ядро характера $\chi(r_i, k_0)$ — группа $R = A_{r+1}^{(n)} \cdot A_k^{(n-1)}$.

Изучим теперь продолжения характеров $\chi(k_i, r_j)$, где $i \neq 0$; $j \neq 0$.

Обозначения 4. 1.

Если
$$\sigma = (\alpha_{k^{(n_1)}}^{(n_1)})^{\delta_1} \cdot (\alpha_{k^{(n_2)}}^{(n_2)})^{\delta_2} \dots (\alpha_{k^{(n_q)}}^{(n_q)})^{\delta_q},$$
то положим

$$\sigma^T = (\alpha_{k^{(n_q)}}^{(n_q)})^{\delta_q} \dots (\alpha_{k^{(n_2)}}^{(n_2)})^{\delta_2} \cdot (\alpha_{k^{(n_1)}}^{(n_1)})^{\delta_1},$$

$$\bar{\sigma} = (\alpha_{k^{(n_1)}+1}^{(n_1)})^{\delta_1} \cdot (\alpha_{k^{(n_2)}+1}^{(n_2)})^{\delta_2} \dots (\alpha_{k^{(n_q)}+1}^{(n_q)})^{\delta_q},$$

$$\underline{\sigma} = (\alpha_{k^{(n_1)}-1}^{(n_1)})^{\delta_1} \cdot (\alpha_{k^{(n_2)}-1}^{(n_2)})^{\delta_2} \dots (\alpha_{k^{(n_q)}-1}^{(n_q)})^{\delta_q}.$$

Определение 4. 2. Через

$$\chi(k_{i_0}^{(n)}, k_{i_1}^{(n-1)}, \dots, k_{i_t}^{(n-t)})_{(x_1^{(1)}, \dots, x_{m_1}^{(1)})_{r_1, s_1} \dots (x_1^{(q)}, \dots, x_{m_q}^{(q)})_{r_q, s_q}} = \chi$$

обозначим характер группы

$$A^{(n)}_{k^{(n)}}\cdot A^{(n-1)}_{k^{(n-1)}}\dots A^{(n-t)}_{k^{(n-t)}}\cdot\{\sigma^{(1)}_1,\dots,\sigma^{(1)}_{m_1}\}\dots\{\sigma^{(q)}_1,\dots,\sigma^{(q)}_{m_q}\},$$

где элементы $\sigma^{(\mu)}_\eta$ $(\mu=1,2,\dots,q;\ \eta=1,2,\dots,m_\mu)$ определяются индуктивно следующим образом:

$$\sigma^{(\mu)}_1=\alpha^{(n-r_\mu)}_{k(n-r_\mu)-1}\cdot(\alpha^{(n-s_\mu)}_{k(n-s_\mu)-1})^{v^{(\mu)}_0},$$

$$\sigma^{(\mu)}_\eta=\sigma^{(\mu)}_{\eta-1}\cdot(\alpha^{(n-s_\mu)}_{k(n-s_\mu)-1})^{v^{(\mu)}_{\eta-1}},$$

где $i_{r_\mu}+v^{(\mu)}_0\cdot i_{s_\mu}\equiv 0(\operatorname{mod}p)$; $x^{(\mu)}_{\eta-1}+v^{(\mu)}_{\eta-1}\cdot i_{s_\mu}\equiv 0\ (\operatorname{mod}p)$, $(\mu=1,2,\dots,q;\ \eta==1,2,\dots,m_\mu)$

Характер χ принимает значение 1 в группах $A^{(n)}_{k^{(n)}+1}, A^{(n-1)}_{k^{(n-1)}+1},\dots,A^{(n-t)}_{k^{(n-t)}+1}$, значение $\xi^{i\lambda}_{(\mu)}$ на базисных элементах $\alpha^{(n-\lambda)}_{k^{(n-\lambda)}}$ $(\lambda=0,1,\dots,n-t)$ и равен $\xi^{x^\mu_\eta}$ на элементах $\sigma^{(\mu)}_\eta$ $(\mu=1,2,\dots,q;\ \ \eta=1,2,\dots,m_\mu)$, причём $1\leqq k^{(n)},\dots,k^{(n-t)}\leqq p^{n-t}$; $0\leqq i_0,\dots,i_t,x^{(1)}_1,\dots,x^{(1)}_{m_1},\dots,x^{(q)}_1,\dots,x^{(q)}_{m_q}\leqq p-1$; $1\leqq q\leqq t$.

Теорема 4. 5. *Пусть дан характер $\chi(k_i,r_j)$ группы $A^{(n)}_k\cdot A^{(n-1)}_r$, где $1\leqq i$, $j\leqq p-1$; $p^{n-1}\geqq k,r\geqq 1$; $p^{n-2}+1\leqq\max\ (k,r)\leqq p^{n-1}$. Пусть $k\equiv r(\operatorname{mod}p^\mu)$, но $k\not\equiv r\ (\operatorname{mod}p^{\mu+1})$ $(0\leqq u\leqq n-2)$. Пусть далее $k=qp^{\mu+1}+k'_0$, $(1\leqq k'_0\leqq p^{\mu+1})$; $r=s\cdot p^{\mu+1}+r'_0$, $(1\leqq r'\leqq p^{\mu+1})$, $min\ (k'_0,r'_0)>1$. Тогда характер $\chi(k_i,r_j)$ линейно продолжается в группе*

$$F=A^{(n)}_k\cdot A^{(n-1)}_r\cdot\{\alpha^{(n)}_{k-1}\cdot(\alpha^{(n-1)}_{r-1})^v\},$$

где $i+vj\equiv 0\ \operatorname{mod}p$). Все линейные продолжения характера $\chi(k_i,r_j)$ в группе F имеют вид $\chi(k_i,r_j)_{(x_1)}$, где $x_1=0,1,\dots,p-1$.

Доказательство. Фиксируем индексы i,j,k,r. Сравнение $i+z\cdot j\equiv 0\ (\operatorname{mod}p)$ имеет единственное решение относительно z. Пусть v — решение этого сравнения. Очевидно, $v\neq 0$, так как $i,j\neq 0$. Тогда характер $\chi(k_i,r_j)$ равен единице на элементе $\alpha^{(n)}_k\cdot(\alpha^{(n-1)}_r)^v$, так как $\xi^i\cdot(\xi^j)^v=1$. Нетрудно убедиться в том, что группа

$$R=A^{(n)}_{k+1}\cdot A^{(n-1)}_{r+1}\cdot\{\alpha^{(n)}_k\cdot(\alpha^{(n-1)}_r)^v\}$$

является ядром этого характера.

Рассмотрим центр Z фактор-группы G/R. Очевидно, $\alpha^{(n)}_kR$, $\alpha^{(n-1)}_rR\in Z$. Из (2. 2) следует, что

$$(x,\alpha^{(n)}_k)=\alpha^{(n)}_{k+1}\in R;\quad (x,\alpha^{(n-1)}_r)=\alpha^{(n-1)}_{r+1}\in R,$$

а согласно леммам 1′ и 2′

$$(a^{(m)},\alpha^{(n)}_k)\in A^{(n)}_{k+1}\subseteqq R;\quad (a^{(m)},\alpha^{(n-1)}_r)\in A^{(n-1)}_{r+1}\subseteqq R$$

для всех $a^{(m)}\in A^{(m)}$; $(0\leqq m\leqq n)$.

Покажем теперь, что смежный класс $\alpha^{(n)}_{k-1}(\alpha^{(n-1)}_{r-1})^vR$ также лежит в центре Z. Для доказательства достаточно показать, что

$$\left(g,\alpha^{(n)}_{k-1}\cdot(\alpha^{(n-1)}_{r-1})^v\right)\in R$$

для всех элементов $g\in G$.

Выпишем p-разложение индексов k и r:

$$k = k_{n-2}\,p^{n-2} + \ldots + k_{\mu+1}\,p^{\mu+1} + k_\mu\,p^\mu + k_{\mu-1}\,p^{\mu-1} + \ldots + k_0$$

$$(\ast) \qquad\qquad (0 \leqq \mu \leqq n-2)$$

$$r = r_{n-2}\,p^{n-2} + \ldots + r_{\mu+1}\,p^{\mu+1} + r_\mu\,p^\mu + k_{\mu-1}\,p^{\mu-1} + \ldots + k_0,$$

где $1 \leqq k_0 \leqq p$; $k_\mu \neq r_\mu$ и для определённости предположим, что $k_\mu > r_\mu$.

Пусть $1 < k_0 \leqq p$. Тогда по лемме 1

$$(a^{(0)}, \alpha_{k-1}^{(n)}) = \alpha_k^{(n)}; \quad (a^{(0)}, \alpha_{r-1}^{(n-1)}) = \alpha_r^{(n-1)}.$$

Поэтому

$$\left(a^{(0)}, \alpha_{k-1}^{(n)} \cdot (\alpha_{r-1}^{(n-1)})^\nu\right) = \left(a^{(0)}, (\alpha_{r-1}^{(n-1)})^\nu\right) \cdot (a^{(0)}, \alpha_{k-1}^{(n)}) \cdot$$
$$\cdot \left((a^{(0)}, \alpha_{k-1}^{(n)}), (\alpha_{r-1}^{(n-1)})^\nu\right) = (a^{(0)}, \alpha_{r-1}^{(n-1)})^\nu \cdot (a^{(0)}, \alpha_{k-1}^{(n)})\,a =$$
$$= (\alpha_r^{(n-1)})^\nu \cdot \alpha_k^{(n)} \cdot a = a' \cdot \alpha_k^{(n)} \cdot (\alpha_r^{(n-1)})^\nu \in R,$$

где

$$a, a' \in A_{p^{n-1}+1}^{(n)} \subset R \quad (\text{лемма } 1').$$

Ввиду леммы 1

$$(a^{(m)}, \alpha_{k-1}^{(n)}) \in \dot{A}_{(k_m+1)p^m+1}^{(n)} \subset R,$$
$$(a^{(m)}, \alpha_{r-1}^{(n-1)}) \in A_{(r_m+1)p^m+1}^{(n-1)} \subset R,$$

длял юбого

$$a^{(m)} \in A^{(m)}, \quad 1 \leqq m < \mu \qquad (r_{\mu-i} = k_{\mu-i};\ i = 1, 2, \ldots, \mu).$$

Следовательно

$$\left(a^{(m)}, \alpha_{k-1}^{(n)} \cdot (\alpha_{r-1}^{(n-1)})^\nu\right) \in R.$$

Пусть теперь $k_0 = 1$. Тогда числа $k-1$ и $r-1$ делятся на p. Пусть k_ϱ — первое отличное от нуля число в последовательности коэффициентов

$$k_1, k_2, \ldots, k_\varrho, \ldots, k_{\mu-1}.$$

(см. $(\ast)$).

Тогда, согласно лемме 2,

$$(\alpha_1^{(m)}, \alpha_{k-1}^{(n)}) = e; \quad (\alpha_1^{(m)}, \alpha_{r-1}^{(n-1)}) = e,$$

и значит

$$\left(\alpha_1^{(m)}, \alpha_{k-1}^{(n)} \cdot (\alpha_{r-1}^{(n-1)})^\nu\right) = e \in R,$$

для всех $0 \leqq m < \varrho$. В силу леммы $2'$

$$(\alpha_i^{(m)}, \alpha_{k-1}^{(n)}) \in A_{k+1}^{(n)} \subset R; \quad (\alpha_i^{(m)}, \alpha_{r-1}^{(n-1)}) \in A_{r+1}^{(n-1)} \subset R$$

для всех $1 \leqq m < \varrho$; $1 < i \leqq p^m$, и следовательно,

$$\left(\alpha_i^{(m)}, \alpha_{k-1}^{(n)} \cdot (\alpha_{r-1}^{(n-1)})^\nu\right) \in R.$$

Если $\varrho \leqq m < n$, то, на основании леммы $1'$

$$a^{(m)}, \alpha_{k-1}^{(n)}) \in R; \quad (a^{(m)}, \alpha_{r-1}^{(n-1)}) \in R,$$

значит

$$\left(a^{(m)}, \alpha_{k-1}^{(n)} \cdot (\alpha_{r-1}^{(n-1)})^\nu\right) \in R \quad \text{для всех} \quad a^{(m)} \in A^{(m)}.$$

Мы получили, что смежные классы

$$\alpha_k^{(n)} R,\ \alpha_r^{(n-1)} R,\ \alpha_{k-1}^{(n)} \cdot (\alpha_{r-1}^{(n-1)})^{\nu} R$$

принадлежат центру Z фактор-группы G/R.

Покажем теперь, что центр Z порождается этими смежными классами. Пусть смежный класс gR лежит в центре Z и пусть элемент g имеет вид

$$g = a^{(n)} \cdot a^{(n-1)} \dots a^{(1)} \cdot (a^{(0)})^{\delta_0},$$

где

$$a^{(i)} = (\alpha_{p^i}^{(i)})^{\delta_{p^i}^{(i)}} (\alpha_{p^i-1}^{(i)})^{\delta_{p^i-1}^{(i)}} \dots (\alpha_1^{(i)})^{\delta_1^{(i)}}$$

$$(i = 1, 2, \dots, n).$$

Можно предположить, что

$$\delta_{p^n}^{(n)} = \delta_{p^n-1}^{(n)} = \dots = \delta_{k+1}^{(n)} = 0; \quad \delta_{p^{n-1}}^{(n-1)} = \delta_{p^{n-1}-1}^{(n-1)} = \dots = \delta_{r+1}^{(n-1)} = 0,$$

так как

$$\alpha_{p^n}^{(n)}, \alpha_{p^n-1}^{(n)}, \dots, \alpha_{k+1}^{(n)} \in R; \quad \alpha_{p^{n-1}}^{(n-1)}, \alpha_{p^{n-1}-1}^{(n-1)}, \dots, \alpha_{r+1}^{(n-1)} \in R.$$

Следовательно, мы можем предположить, что элемент g запишется в виде

$$g = [\alpha_k^{(n)} (\alpha_r^{(n-1)})^{\nu}]^{\sigma_1} [\alpha_{k-1}^{(n)} (\alpha_{r-1}^{(n-1)})^{\nu}]^{\sigma_2} (\alpha_k^{(n)})^{\delta'^{(n)}_k} \dots (\alpha_1^{(n)})^{\delta'^{(n)}_1} \cdot$$

$$\cdot (\alpha_{r-2}^{(n-1)})^{\delta_{r-2}^{(n-1)}} \cdot \dots (\alpha_1^{(n-1)})^{\delta_1^{(n-1)}} a^{(n-2)} \dots a^{(1)} (a^{(0)})^{\delta^{(0)}},$$

так как группа $A_k^{(n)}$ — нормальный делитель группы G.

Так как

$$[\alpha_k^{(n)} \cdot (\alpha_r^{(n-1)})^{\nu}]^{\sigma_1} \in R,$$

то можно считать, что элемент g имеет вид

$$g = [\alpha_{k-1}^{(n)} (\alpha_{r-1}^{(n-1)})^{\nu}]^{\sigma_2} (\alpha_k^{(n)})^{\delta'^{(n)}_k} \dots (\alpha_1^{(n)})^{\delta'^{(n)}_1} (\alpha_{r-2}^{(n-1)})^{\delta_{r-2}^{(n-1)}} \dots$$

$$\dots (\alpha_1^{(n-1)})^{\delta_1^{(n-1)}} a^{(n-2)} \dots a^{(1)} (a^{(0)})^{\delta^{(0)}}.$$

Но $(x^{(m)}, a^{(m)}) \in A^{(m)} \cap R$ для всех $m < n-1$, и следовательно,

$$a^{(m)} = (\alpha_{p^m}^{(m)})^{\delta_{p^m}^{(m)}} \quad (m < n-1).$$

В то же время, по лемме 3′

$$(\alpha_{p^m}^{(m)}, \alpha_1^{(j)}) = \alpha_{p^m+1}^{(n)} \notin R$$

при всех $m < n-1$, так как $p^{n-2} + 1 \leqq \max(k, r) \leqq p^{n-1}$, где $j = n$, если $k > r$ и $j = n-1$, если $k \leqq r$. Значит элемент g имеет вид

$$g = [\alpha_{k-1}^{(n)} (\alpha_{r-1}^{(n-1)})^{\nu}]^{\sigma_2} (\alpha_k^{(n)})^{\delta'^{(n)}_k} \dots (\alpha_1^{(n)})^{\delta'^{(n)}_1} (\alpha_{r-2}^{(n-1)})^{\delta_{r-2}^{(n-1)}} \dots (\alpha_1^{(n-1)})^{\delta'^{(n-1)}_1}.$$

Так как $\alpha_{k-1}^{(n)} \cdot (\alpha_{r-1}^{(n-1)})^{\nu} R,\ \alpha_k^{(n)} R \in Z$, то $gR \in Z$ тогда и только тогда, если $g'R \in Z$, где

$$g' = (\alpha_{k-1}^{(n)})^{\delta'^{(n)}_{k-1}} \dots (\alpha_1^{(n)})^{\delta'^{(n)}_1} (\alpha_{r-2}^{(n-1)})^{\delta_{r-2}^{(n-1)}} \dots (\alpha_1^{(n-1)})^{\delta_1^{(n-1)}}.$$

Заметим теперь, что $(x, g') \in R$, и следовательно,

$$g = [\alpha_{k-1}^{(n)} \cdot (\alpha_{r-1}^{(n-1)})^{\nu}]^{\sigma_2} (\alpha_k^{(n)})^{\eta},$$

что и требовалось доказать.

Итак, центр Z фактор-группы G/R порождается смежными классами

$$\alpha_k^{(n)} R,\ \alpha_r^{(n-1)} R,\ \alpha_{k-1}^{(n)} \cdot (\alpha_{r-1}^{(n-1)})^{\nu} R.$$

Значит характер $\chi(k_i, r_j)$ линейно продолжается в группе

$$F = A_k^{(n)} \cdot A_r^{(n-1)} \cdot \{\alpha_{k-1}^{(n)} \cdot (\alpha_{r-1}^{(n-1)})^{\nu}\},$$

и, очевидно, все линейные продолжения характера $\chi(k_i, r_j)$ в группе F имеют вид $\chi(k_i, r_j)_{(x_1)}$, где $x_1 = 0, 1, \dots, p-1$. Теорема доказана.

Теорема 4. 5′. *Пусть дан характер $\chi(k_i, r_j)$ группы $A_k^{(n)} \cdot A_r^{(n-1)}$ где $1 \leqq i, j \leqq p-1$; $1 \leqq k, r \leqq p^{n-1}$; $p^{n-2}+1 \leqq \max(k, r) \leqq p^{n-1}$. Пусть $k \equiv r \pmod{p^{\mu}}$; $k \not\equiv r \pmod{p^{\mu+1}}$, $(0 \leqq \mu \leqq n-2)$. Пусть далее*

$$k = qp^{\mu+1} + k_0'; \quad r = sp^{\mu+1} + r_0'; \quad (1 \leqq k_0',\ r_0' \leqq p^{\mu+1}); \quad \min(k_0', r_0') = 1.$$

Тогда характер $\chi(k_i, r_j)$ линейно не продолжается ни в одном нормальном делителе группы G.

Доказательство. Очевидно, группа

$$R = A_{k+1}^{(n)} \cdot A_{r+1}^{(n-1)} \cdot \{\alpha_k^{(n)} \cdot (\alpha_r^{(n-1)})^{\nu}\}$$

— ядро характера $\chi(k_i, r_j)$ при фиксированных i, j, k, r, $i + \nu \cdot j \equiv 0 \pmod{p}$. Из доказательства предыдущей теоремы следует, что характер $\chi(k_i, r_j)$ может линейно продолжаться только в подгруппе

$$F = A_k^{(n)} \cdot A_r^{(n-1)} \cdot \{\alpha_{k-1}^{(n)} \cdot (\alpha_{r-1}^{(r-1)})^{\nu}\}.$$

Значит, для доказательства теоремы достаточно показать, что существует такой элемент $g \in G$, что

$$(g, \alpha_{k-1}^{(n)} \cdot (\alpha_{r-1}^{(n-1)})^{\nu}) \notin R.$$

Пусть для определённости $k_0' > r_0'$. Тогда p-разложение индексов k и r имеет вид

$$k = k_{n-2} p^{n-2} + \dots + k_{\mu+1} p^{\mu+1} + (k_{\mu} - r_{\mu}) p^{\mu} + 1$$

$$r = r_{n-2} p^{n-2} + \dots + (r_{\mu+1} - 1) p^{\mu+1} + (p-1) p^{\mu} + p^{\mu} + 1.$$

Следовательно, по лемме 2

$$(\alpha_1^{(\mu)}, \alpha_{k-1}^{(n)}) = \alpha_{k_{n-2} p^{n-2} + \dots + k_{\mu+1} p^{\mu+1} + (k_{\mu} - r_{\mu}) p^{\mu} + 1}^{(n)} = \alpha_k^{(n)} \notin R,$$

$$(\alpha_1^{(\mu)}, \alpha_{r-1}^{(n-1)}) = e \in R,$$

значит

$$(\alpha_1^{(\mu)}, \alpha_{k-1}^{(n)} \cdot (\alpha_{r-1}^{(n-1)})^{\nu}) \notin R.$$

Теорема доказана.

Теорема 4. 6. *Пусть дан характер* $\chi(k_i, r_j)_{(0)}$ *группы*

$$A_k^{(n)} \cdot A_r^{(n-1)} \cdot \{\alpha_{k-1}^{(n)} \cdot (\alpha_{r-1}^{(n-1)})^{\nu}\},$$

Теорема 4. 6. *Пусть дан характер* $\chi(k_i, r_j)_{(0)}$ *группы*

$$A_k^{(n)} \cdot A_r^{(n-1)} \cdot \{\alpha_{k-1}^{(n)} \cdot (\alpha_{r-1}^{(n-1)})^{\nu}\},$$

где $1 \leqq i, j \leqq p-1$; $1 \leqq k, r \leqq p^{n-1}$; $p^{n-2}+1 \leqq \max(k, r) \leqq p^{n-1}$; $i+\nu \cdot j \equiv 0 \pmod p$. *Пусть* $k \equiv r \pmod{p^{\mu}}$, *но* $k \not\equiv r \pmod{p^{\mu+1}}$, $(0 \leqq \mu \leqq n-2)$. *Пусть далее* $k = qp^{\mu+1}+k'_0$; $r = sp^{\mu+1}+r'_0$ $(1 \leqq k'_0, r'_0 \leqq p^{\mu+1})$; $\min(k'_0, r'_0) > 2$. *Тогда характер* $\chi(k_i, r_j)_{(0)}$ *линейно продолжается в группе*

$$F = A_k^{(n)} \cdot A_r^{(n-1)} \cdot \{\alpha_{k-1}^{(n)} \cdot (\alpha_{r-1}^{(n-1)})^{\nu}, \alpha_{k-2}^{(n)} \cdot (\alpha_{r-2}^{(n-1)})^{\nu}\},$$

и все линейные продолжения этого характера в группе F имеют вид

$$\chi(k_i, r_j)_{(0, x_2)},$$

где $x_2 = 0, 1, \ldots, p-1$.

Доказательство. Фиксируем индексы k, r, i, j. Тогда группа

$$R = A_{k+1}^{(n)} \cdot A_{r+1}^{(n-1)} \cdot \{\alpha_k^{(n)} \cdot (\alpha_r^{(n-1)})^{\nu}, \alpha_{k-1}^{(n)} \cdot (\alpha_{r-1}^{(n-1)})^{\nu}\}$$

— ядро характера $\chi(k_i, r_j)_{(0)}$, где $i+\nu \cdot j \equiv 0 \pmod p$.

На основании теоремы 4. 5, для доказательства достаточно показать, что

$$(g, \alpha_{k-2}^{(n)} \cdot (\alpha_{r-2}^{(n-1)})^{\nu}) \in R$$

для всех элементов $g \in G$. Так как, по условиям теоремы, $\min(k'_0, r'_0) > 2$, то последнее включение доказывается точно так, как включение

$$(g, \alpha_{k-1}^{(n)} \cdot (\alpha_{r-1}^{(n-1)})^{\nu}) \in R_1$$

в теореме 4. 5. (R_1 — ядро характера $\chi(k_i, r_j)$).

Остальные утверждения теоремы очевидны.

Теорема 4.6′. *Пусть дан характер* $\chi(k_i, r_j)_{(0)}$ *группы* $A_k^{(n)} A_r^{(n-1)} \cdot \{\alpha_{k-1}^{(n-1)} \cdot (\alpha_{r-1}^{(n-1)})^{\nu}\}$, *где* $1 \leqq i, j \leqq p-1$; $1 \leqq k, r \leqq p^{n-1}$; $p^{n-2}+1 \leqq \max(k, r) \leqq p^{n-1}$; $i+\nu \cdot j \equiv 0 \pmod p$. *Пусть* $k \equiv r \pmod{p^{\mu}}$, $k \not\equiv r \pmod{p^{\mu+1}}$, $(0 \leqq \mu \leqq n-2)$. *Пусть далее* $k = qp^{\mu+1}+k'_0$; $r = sp^{\mu+1}+r'_0$ $(1 \leqq k'_0, r'_0 \leqq p^{\mu+1})$; $\min(k'_0, r'_0) = 2$. *Тогда характер* $\chi(k_i, r_j)_{(0)}$ *линейно не продолжается ни в одном нормальном делителе группы G.*

Доказательство. аналогично доказательству теоремы 4. 5'.

Теорема 4. 7. *Пусть дан характер* $\chi(k_i, r_j)_{(0, 0, \ldots, 0)} = \chi$ *группы*

$$A = A_k^{(n)} \cdot A_r^{(n-1)} \cdot \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m\},$$

где

$$1 \leqq i, j \leqq p-1; \quad 1 \leqq k, r \leqq p^{n-1}; \quad p^{n-2}+1 \leqq \max(k, r) \leqq p^{n-1};$$

$$\sigma_1 = \alpha_{k-1}^{(n)} \cdot (\alpha_{r-1}^{(n-1)})^{\nu}; \quad \sigma_{\tau} = \alpha_{k-\tau}^{(n)} \cdot (\alpha_{r-\tau}^{(n-1)})^{\nu}, \qquad (\tau = 2, 3, \ldots, m);$$

$i+\nu \cdot j \equiv 0 \pmod p$. *Пусть* $k \equiv r \pmod{p^{\mu}}$, *но* $k \not\equiv r \pmod{p^{\mu+1}}$, $(0 \leqq \mu \leqq n-2)$. *Пусть далее*

$$\begin{aligned} k &= qp^{\mu+1}+k'_0 \\ r &= sp^{\mu+1}+r'_0 \end{aligned} \qquad (1 \leqq k'_0, r'_0 \leqq p^{\mu+1})$$

$\min(k_0', r_0') > m+1$. *Тогда хатракер* χ *линейно продолжается в группе*

$$F = A_k^{(n)} \cdot A_r^{(n-1)} \cdot \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m, \sigma_{m+1}\},$$

где

$$\sigma_{m+1} = \alpha_{k-m-1}^{(n)} \cdot (\alpha_{r-m-1}^{(n-1)})^{\nu},$$

*и все линейные продолжения характ*з*ра* χ *в группе* F *имеют вид*

$$\chi(k_i, r_j)_{(0,0,\ldots,0,x_{m+1})},$$

где $x_{m+1} = 0, 1, \ldots, p-1$.

Доказательство. Теорема верна для $m=1$. Предположим, что нами индуктивно уже построен характер χ группы A. Очевидно,

$$R = A_{k+1}^{(n)} \cdot A_{r+1}^{(n-1)} \cdot \{\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \ldots, \bar{\sigma}_m, \sigma_m\}$$

(см. обозначения 3. 1) — ядро характера χ.

В силу предположения индукции, для доказательства теоремы достаточно установить, что

$$\left(g, \alpha_{k-m-1}^{(n)} \cdot (\alpha_{r-m-1}^{(n-1)})^{\nu}\right) \in R$$

для всех элементов $g \in G$.

Пусть p-разложение индексов k и r имеет вид

$$k = k_{n-2}\, p^{n-2} + \ldots + k_\mu\, p^\mu + \ldots + k_0$$

$$r = r_{n-2}\, p^{n-2} + \ldots + r_\mu\, p^\mu + k_{\mu-1}\, p^{\mu-1} + \ldots + k_0.$$

Пусть для определённости $k_\mu > r_\mu$. Если $m < r_\mu p^\mu + k_{\mu-1}\, p^{\mu-1} + \ldots + k_0 + 1$, то, согласно лемме 5, коммутаторы

$$(y_\eta^{(h)}, \alpha_{k-m-1}^{(n)}), \quad (y_\eta^{(h)}, \alpha_{r-m-1}^{(n-1)})$$

либо одновременно равны единице, либо распадаются в произведение вида

$$(y_\eta^{(h)}, \alpha_{k-m-1}^{(n)}) = \prod_{\lambda=1}^{\eta} \left(\alpha^{(n)}_{k_{n-2}\, p^{n-2} + \ldots + k_{h+1}\, p^{h+1} + (k_h+1) p^h + \lambda}\right)^{(-1)^{\eta+\lambda} C_{\eta-1}^{\lambda-1} C_{s-1}^{\eta-1}},$$

$$(y_\eta^{(h)}, \alpha_{r-m-1}^{(n-1)}) = \prod_{\lambda=1}^{\eta} \left(\alpha^{(n-1)}_{r_{n-2}\, p^{n-2} + \ldots + r_\mu\, p^\mu + k_{\mu-1}\, p^{\mu-1} + \ldots + (k_h+1) p^h + \lambda}\right)^{(-1)^{\eta+\lambda} C_{\eta-1}^{\lambda-1} C_{s-1}^{\eta-1}},$$

где

$$s = k_{h-1}\, p^{h-1} + \ldots + k_0; \quad 1 \leqq h < \mu; \quad 1 \leqq \eta \leqq p^h.$$

Следовательно,

$$\left(y_\eta^{(h)}, \alpha_{k-m-1}^{(n)} \cdot (\alpha_{r-m-1}^{(n-1)})^{\nu}\right) \in R.$$

Если $h \geqq \mu$, то

$$(a^{(h)}, \alpha_{k-m-1}^{(n)}) \in R; \quad (a^{(h)}, \alpha_{r-m-1}^{(n-1)}) \in R,$$

и значит,

$$\left(a^{(h)}, \alpha_{k-m-1}^{(n)} \cdot (\alpha_{r-m-1}^{(n-1)})^{\nu}\right) \in R. \quad (a^{(h)} \in A^{(h)}).$$

Пусть теперь $m = r_\mu\, p^\mu + k_{\mu-1}\, p^{\mu-1} + \ldots + k_0 + 1$. Тогда

$$k-m-1 = k_{n-2}\, p^{n-2} + \ldots + (k_\mu - r_\mu) p^\mu; \quad r-m-1 = r_{n-2}\, p^{n-2} + \ldots + r_{\mu+1}\, p^{\mu+1}.$$

По лемме 5,
$$(y_1^{(h)}, \alpha_{k-m-1}^{(n)}) = e; \quad (y_1^{(h)}, \alpha_{r-m-1}^{(n-1)}) = e.$$
Следовательно,
$$\left(y_1^{(h)}, \alpha_{k-m-1}^{(n)} \cdot (\alpha_{r-m-1}^{(n-1)})^{\nu}\right) = e \in R$$
и
$$\left(y_\eta^{(h)}, \alpha_{k-m-1}^{(n)} \cdot (\alpha_{r-m-1}^{(n-1)})^{\nu}\right) \in R$$
для всех
$$h \leqq \mu; \quad 1 < \eta \leqq p^h.$$

Если $h = \mu + 1$, то
$$(y_1^{(h)}, \alpha_{k-m-1}^{(n)}) \in A_{k_{n-2}p^{n-2}+\ldots+k_{\mu+1}p^{\mu+1}+1}^{(n)} \subset R,$$
$$(y_1^{(h)}, \alpha_{r-m-1}^{(n-1)}) = e \in R.$$
Значит
$$\left(y_1^{(h)}, \alpha_{k-m-1}^{(n)} \cdot (\alpha_{r-m-1}^{(n-1)})^{\nu}\right) \in R,$$
и
$$\left(y_\eta^{(h)}, \alpha_{k-m-1}^{(n)} \cdot (\alpha_{r-m-1}^{(n-1)})^{\nu}\right) \in R$$
для всех
$$1 < \eta \leqq p^h.$$

Если $h > \mu + 1$, то по лемме 1′
$$(a^{(h)}, \alpha_{k-m-1}^{(n)}) \in R; \quad (a^{(h)}, \alpha_{r-m-1}^{(n-1)}) \in R,$$
и, следовательно
$$\left(a^{(h)}, \alpha_{k-m-1}^{(n)} \cdot (\alpha_{r-m-1}^{(n-1)})^{\nu}\right) \in R, \quad (a^{(h)} \in A^{(h)}).$$
Теорема доказана.

Теорема 4. 7′. *Пусть дан характер* $\chi(k_i, r_j)_{(0,0,\ldots,0)} = \chi$ *группы*
$$A_k^{(n)} \cdot A_r^{(n-1)} \cdot \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m\},$$
где $1 \leqq i, j \leqq p-1$; $1 \leqq k, r \leqq p^{n-1}$; $p^{n-2}+1 \leqq \max(k, r) \leqq p^{n-1}$; $\sigma_1 = \alpha_{k-1}^{(n)} \cdot (\alpha_{r-1}^{n-1})^{\nu}$; $\sigma_\tau = \alpha_{k-\tau}^{(n)} \cdot (\alpha_{r-\tau}^{(n-1)})^{\nu})$, $(\tau = 2, \ldots, m)$; $i + \nu \cdot j \equiv 0 \pmod p$. *Пусть* $k \equiv r \pmod{p^\mu}$, *но* $k \not\equiv r \pmod{p^{\mu+1}}$, $(0 \leqq \mu \leqq n-2)$. *Пусть далее* $k = qp^{\mu+1} + k_0'$, $r = sp^{\mu+1} + r_0'$, $(1 \leqq k_0', r_0' \leqq p^{\mu+1})$; $\min(k_0', r_0') = m+1$. *Тогда характер* χ *линейно не продолжается ни в одном нормальном делителе группы* G.

Доказательство. Заметим, что согласно теореме 4. 7, группа
$$R = A_{k+1}^{(n)} \cdot A_{r+1}^{(n-1)} \cdot \{\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \ldots, \bar{\sigma}_m, \sigma_m\}$$
— ядро характера χ, и $\sigma_{m+1} = \alpha_{k-m-1}^{(n)} \cdot (\alpha_{r-m-1}^{(n-1)})^{\nu}$, где
$$(\alpha_1^{(\mu)}, \sigma_{m+1}) \notin R.$$
Теорема доказана.

Теорема 4. 8. *Пусть дан характер* $\chi(k_i, r_j)_{(x_1)}$ *группы*
$$A_k^{(n)} \cdot A_r^{(n-1)} \cdot \{\alpha_{k-1}^{(n)} \cdot (\alpha_{r-1}^{(n-1)})^{\nu}\},$$
где $1 \leqq x_1, i, j \leqq p-1$; $1 \leqq k, r \leqq p^{n-1}$; $p^{n-2}+1 \leqq \max(k, r) \leqq p^{n-1}$; $i + \nu \cdot j \equiv 0 \pmod p$.

Пусть $k = qp + k_0$; $r = sp + r_0$, $(1 \leqq r_0, k_0 \leqq p)$; $\min(k_0, r_0) > 2$. *Тогда характер* $\chi(k_i, r_j)_{(x_1)}$ *линейно продолжается в группе*

$$F = A_k^{(n)} \cdot A_r^{(n-1)} \cdot \{\alpha_{k-1}^{(n)} \cdot (\alpha_{r-1}^{(n-1)})^{\nu}, \alpha_{k-2}^{(n)} \cdot (\alpha_{r-2}^{(n-1)})^{\nu} \cdot (\alpha_{r-1}^{(n-1)})^{\nu_1}\},$$

где $x_1 + \nu_1 \cdot j \equiv 0 \pmod p$, *и все линейные продолжения этого характера в группе* F *имеют вид* $\chi(k_i, r_j)_{(x_1, x_2)}$, *где* $x_2 = 0, 1, \ldots, p-1$.

Доказательство. Фиксируем индексы k, r, i, j, x_1. Тогда группа

$$R = A_{k+1}^{(n)} \cdot A_{r+1}^{(n-1)} \cdot \{\alpha_k^{(n)} \cdot (\alpha_r^{(n-1)})^{\nu}, \alpha_{k-1}^{(n)} \cdot (\alpha_{r-1}^{(n-1)})^{\nu} \cdot (\alpha_r^{(n-1)})^{\nu_1}\}$$

— ядро характера $\chi = \chi(k_i, r_j)_{(x_1)}$, где $i + \nu \cdot j \equiv 0 \pmod p$, $x_1 + \nu_1 \cdot j \equiv 0 \pmod p$.

Очевидно, для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$\left(g', \alpha_{k-2}^{(n)} \cdot (\alpha_{r-2}^{(n-1)})^{\nu} \cdot (\alpha_{r-1}^{(n-1)})^{\nu_1}\right) \in R$$

для всех элементов $g' \in G$. Так как $\min(k_0, r_0) > 2$, то $2 < k_0, r_0 < p$. Следовательно, по лемме 1,

$$(a^{(0)}, \alpha_{k-2}^{(n)}) = \alpha_{k-1}^{(n)}; \quad (a^{(0)}, \alpha_{r-2}^{(n-1)}) = \alpha_{r-1}^{(n-1)}; \quad (a^{(0)}, \alpha_{r-1}^{(n-1)}) = \alpha_r^{(n-1)}$$

Значит

$$\left(a^{(0)}, \alpha_{k-2}^{(n)} \cdot (\alpha_{r-2}^{(n-1)})^{\nu} \cdot (\alpha_{r-1}^{(n-1)})^{\nu_1}\right) = a \cdot \alpha_{k-1}^{(n)} \cdot (\alpha_{r-1}^{(n-1)})^{\nu} \cdot (\alpha_r^{(n-1)})^{\nu_1} \in R,$$

где $a \in A_{p^{n-1}+1}^{(n)} \subset R$. На основании леммы 1′,

$$(a^{(m)}, \alpha_{k-2}^{(n)}) \in R, \quad (a^{(m)}, \alpha_{r-2}^{(n-1)}) \in R, \quad (a^{(m)}, \alpha_{r-1}^{(n-1)}) \in R,$$

для всех элементов $a^{(m)} \in A^{(m)}$; $1 \leqq m \leqq n$. Следовательно,

$$\left(a^{(m)}, \alpha_{k-2}^{(n)} \cdot (\alpha_{r-2}^{(n-1)})^{\nu} \cdot (\alpha_{r-1}^{(n-1)})^{\nu_1}\right) \in R.$$

Теорема доказана.

Теорема 4. 8′. *Пусть дан характер* $\chi(k_i, r_j)_{(x_1)}$ *группы*

$$A_k^{(n)} \cdot A_r^{(n-1)} \cdot \{\alpha_{k-1}^{(n)} \cdot (\alpha_{r-1}^{(n-1)})^{\nu}\},$$

где $1 \leqq x_1, i, j \leqq p-1$; $1 \leqq k, r \leqq p^{n-1}$; $p^{n-2} + 1 \leqq \max(k, r) \leqq p^{n-1}$; $i + \nu \cdot j \equiv 0 \pmod p$. *Пусть* $k = qp + k_0$; $r = sp + r_0$, $(1 \leqq k_0, \leqq p)$, $\min(k_0, r_0) \not> 2$. *Тогда характер* $\chi(k_i, r_j)_{(x_1)}$ *линейно не продолжается ни в одном нормальном делителе группы* G.

Доказательство. Как уже отмечалось, (в доказательстве теоремы 4. 8), группа

$$R = A_{k+1}^{(n)} \cdot A_{r+1}^{(n-1)} \cdot \{\alpha_k^{(n)} \cdot (\alpha_r^{(n-1)})^{\nu}, \alpha_{k-1}^{(n)} \cdot (\alpha_{r-1}^{(n-1)})^{\nu} \cdot (\alpha_r^{(n-1)})^{\nu_1}\},$$

— ядро характера $\chi(k_i, r_j)_{(x_1)} = \chi$, где $x_1 + \nu_1 \cdot j \equiv 0 \pmod p$. Так как $x_1, j \neq 0$, то решение ν_1 этого сравнения также не сравнимо с нулем по модулю p. Очевидно, что характер χ может линейно продолжаться только в группе

$$F = A_k^{(n)} \cdot A_r^{(n-1)} \cdot \{\alpha_{k-1}^{(n)} \cdot (\alpha_{r-1}^{(n-1)})^{\nu}, \alpha_{k-2}^{(n)} \cdot (\alpha_{r-2}^{(n-1)})^{\nu} \cdot (\alpha_{r-1}^{(n-1)})^{\nu_1}\}.$$

Значит, для доказательства теоремы достаточно показать, что найдётся такой элемент $g \in G$, что

$$\left(g, \alpha_{k-2}^{(n)} \cdot (\alpha_{r-2}^{(n-1)})^{\nu} \cdot (\alpha_{r-1}^{(n-1)})^{\nu_1}\right) \notin R.$$

Так как min $(k_0, r_0) \not> 2$, то по крайней мере один из коммутаторов

$$(a^{(0)}, \alpha_{k-2}^{(n)}), \quad (a^{(0)}, \alpha_{r-2}^{(n-1)})$$

равен единице, а

$$(a^{(0)}, \alpha_{r-1}^{(n)}) = \alpha_r^{(n)} \notin R.$$

Следовательно,

$$\left(a^{(0)}, \alpha_{k-2}^{(n)} \cdot (\alpha_{r-2}^{(n-1)})^{\nu} \cdot (\alpha_{r-1}^{(n-1)})^{\nu_1}\right) \notin R.$$

Теорема доказана.

Теорема 4. 9. *Пусть дан характер* $\chi(k_i, r_j)_{(0,0,\ldots,0,x_h)} = \chi$ *группы*

$$A_k^{(n)} \cdot A_r^{(n-1)} \cdot \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_h\},$$

где $1 \leqq i, j, x_h \leqq p-1$; $1 \leqq k, r \leqq p-1$; $p^{n-2}+1 \leqq \max(k, r) \leqq p^{n-1}$; $\sigma_\lambda = \alpha_{k-\lambda}^{(n)} \cdot (\alpha_{r-\lambda}^{(n-1)})^{\nu}$, $(\lambda = 1, 2, \ldots, h)$; $i + \nu \cdot j \equiv 0 \pmod p$. $k \equiv r \pmod{p^{\mu}}$, $k \not\equiv r \pmod{p^{\mu+1}}$, $(0 \leqq \mu \leqq n-2)$; $k = qp^{\mu+1} + k'_{\mu}$, $r = sp^{\mu+1} + r'_{\mu}$, $(1 \leqq k'_{\mu}, r'_{\mu} \leqq p^{\mu+1})$; $\min(k'_{\mu}, r'_{\mu}) = \bar{k}$; $1 \leqq h < \bar{k} - 1$. *Пусть далее* $h \equiv 0 \bmod p^{\mu_h})$, $h \not\equiv 0 \pmod{p^{\mu_h+1}}$, $(0 \leqq \mu_h \leqq \mu)$; $r - h = q' p^{\mu_h+1} + \bar{r}_h$; $r = s' p^{\mu_h+1} + \bar{\bar{r}}_h$, $(1 \leqq \bar{r}_h, \bar{\bar{r}}_h \leqq p^{\mu_h+1})$, $\min(\bar{r}_h, \bar{\bar{r}}_h) = \bar{r}$. *Если* $\bar{r} > 1$, *то характер* χ *линейно продолжается в группе*

$$F = A_k^{(n)} \cdot A_r^{(n-1)} \cdot \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_h, \sigma_{h+1}\},$$

где

$$\sigma_{h+1} = \alpha_{k-h-1}^{(n)} \cdot (\alpha_{r-h-1}^{(n-1)})^{\nu} \cdot (\alpha_{r-1}^{(n-1)})^{\nu_h}; \quad x_h + \nu_h \cdot j \equiv 0 \pmod p,$$

и все его линейные продолжения в F *имеют вид*

$$\chi(k_i, r_j)_{(0,0,\ldots,0,x_h,x_{h+1})},$$

где $x_{h+1} = 0, 1, \ldots, p-1$.

Если $\bar{r} = 1$, *то характер* χ *линейно не продолжается ни в одном нормальном делителе группы* G.

Доказательство. Очевидно,

$$R = A_{k+1}^{(n)} \cdot A_{r+1}^{(n-1)} \cdot \{\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \ldots, \bar{\sigma}_h, \sigma_h \cdot (\alpha_r^{(n-1)})^{\nu_h}\}$$

— ядро характера χ, где $\bar{\sigma}_\lambda = \alpha_{k-\lambda+1}^{(n)} \cdot (\alpha_{r-\lambda+1}^{(n-1)})^{\nu}$, $x_h + \nu_h \cdot j \equiv 0 \pmod p$.

Очевидно, характер χ может линейно продолжаться только в группе

$$F = A_k^{(n)} \cdot A_r^{(n-1)} \cdot \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_h, \sigma_{h+1}\},$$

где

$$\sigma_{h+1} = \alpha_{k-h-1}^{(n)} \cdot (\alpha_{r-h-1}^{(n-1)})^{\nu} \cdot (\alpha_{r-1}^{(n-1)})^{\nu_h}.$$

Докажем сначала первое утверждение теоремы. Пусть p-разложение индексов k, r имеет вид

$$k = k_{n-2} p^{n-2} + \ldots + k_{\mu+1} p^{\mu+1} + k_{\mu} p^{\mu} + k_{\mu-1} p^{\mu-1} + \ldots + k_0$$

$$r = r_{n-2} p^{n-2} + \ldots + r_{\mu+1} p^{\mu+1} + r_{\mu} p^{\mu} + k_{\mu-1} p^{\mu-1} + \ldots + k_0,$$

где $k_\mu \neq r_\mu$, $1 \leqq k_0 \leqq p$. Пусть

$$h = h_\mu p^\mu + \ldots + h_{\mu_h} p^{\mu_h} + \ldots + h_0.$$

Тогда

$$r-h = r_{n-2}\,p^{n-2}+\ldots+r_{\mu+1}\,p^{\mu+1}+(r_\mu-h_\mu)p^\mu+(k_{\mu-1}-h_{\mu-1})p^{\mu-1}+\ldots+(k_0-h_0).$$

По условиям теоремы $h\equiv 0 \pmod p$, $h\not\equiv 0 \pmod{p^{\mu_h+1}}$, и значит

$$h = h_\mu\,p^\mu+\ldots+h_{\mu_h}\,p^{\mu_h}$$

$$r-h = r_{n-2}\,p^{n-2}+\ldots+r_{\mu+1}\,p^{\mu+1}+(r_\mu-h_\mu)p^\mu+(k_{\mu-1}-h_{\mu-1})p^{\mu-1}+\ldots+$$

$$+(k_{\mu_h}-h_{\mu_h})p^{\mu_h}+k_{\mu_h-1}\,p^{\mu_h-1}+\ldots+k_0.$$

Следовательъно,

$$(y_\mu^{(m)},\,\sigma_{h+1})\in R$$

для всех $y_\mu^{(m)}\in A^{(m)}$; $m<\mu_h$, $\mu=1, 2, \ldots, p^m$ (лемма 2.). Для $m\geqq\mu_h$ при всех $a^{(m)}\in A^{(m)}$ выполняется

$$(a^{(m)},\,\alpha_{r-1}^{(n-1)})\in R,\quad (a^{(m)},\,\alpha_{k-h-1}^{(n)}\cdot(\alpha_{r-h-1}^{(n-1)})^{\nu})\in R,$$

и значит

$$(a^{(m)},\,\sigma_{h+1})\in R.$$

Установим теперь второе утверждение теоремы. Пусть для определённости $\bar{\bar{r}}_h>\bar{r}_h$. Тогда

$$(\alpha_1^{(\mu_h)},\,\alpha_{r-h-1}^{(n-1)}) = e,\quad (\alpha_1^{(\mu_h)},\,\alpha_{r-1}^{(n-1)})\notin R,$$

и следовательно,

$$(\alpha_1^{(\mu_h)},\,\sigma_{h+1})\notin R.$$

Теорема доказана.

Теорема 4. 10. *Пусть дан характер*

$$\chi(k_i,\,r_j)_{(0,\ldots,0,x_{h_1},0,\ldots,0,x_{h_2})} = \chi$$

группы

$$A_k^{(n)}\cdot A_r^{(n-1)}\cdot\{\sigma_1,\,\ldots,\,\sigma_{h_1},\,\ldots,\,\sigma_{h_2}\},$$

где

$$1\leqq i, j, x_{h_1}, x_{h_2}\leqq p-1;\quad 1\leqq k, r\leqq p^{n-1};\quad p^{n-2}+1\leqq \max(k, r)\leqq p^{n-1};$$

$$\sigma_\lambda = \alpha_{k-\lambda}^{(n)}\cdot(\alpha_{r-\lambda}^{(n-1)})^{\nu_0},\qquad (\lambda=1, 2, \ldots, h_1);$$

$$\sigma_{h_1+\lambda'} = \alpha_{k-h_1-\lambda'}^{(n)}\cdot(\alpha_{r-h_1-\lambda'}^{(n-1)})^{\nu_0}\cdot(\alpha_{r-1}^{(n-1)})^{\nu_1},\qquad (\lambda'=1, 2, \ldots, h_2-h_1),$$

$$i+\nu_0\cdot j\equiv 0 \pmod p;\quad x_{h_1}+\nu_1\cdot j\equiv 0 \pmod p.$$

Пусть

$$k\equiv r \pmod{p^\mu},\quad k\not\equiv r \pmod{p^{\mu+1}},\quad k = qp^{\mu+1}+k^{(1)},$$

$$r = sp^{\mu+1}+r^{(1)},\qquad (0\leqq\mu\leqq k-2;\quad 1\leqq k^{(1)}, r^{(1)}\leqq p^{\mu+1}),$$

$$\min(k^{(1)},\,r^{(1)}) = \bar{k}.$$

Пусть далее

$$1\leqq h_1<h_2<\bar{k}-1;\quad h_1\equiv h_2\equiv 0 \pmod{p^{\mu_1}},$$

но лидо

$$h_2\not\equiv 0 \pmod{p^{\mu_1+1}},$$

либо

$$h_1 \not\equiv 0 \,(\operatorname{mod} p^{\mu_1+1}) \quad (0 \leqq \mu_1 \leqq \mu);$$

$$r = s_0\, p^{\mu_1+1} + r_0^{(2)}, \quad r - h_2 = s_2\, p^{\mu_1+1} + r_2^{(2)},$$

$$r - (h_2 - h_1) = s_1\, p^{\mu_1+1} + r_1^{(2)} \qquad (1 \leqq r_0^{(2)}, r_1^{(2)}, r_2^{(2)} \leqq p^{\mu_1+1}),$$

$$\min\,(r_0^{(2)}, r_1^{(2)}, r_2^{(2)}) = \bar{r}.$$

Если $\bar{r} > 1$, *тогда характер* χ *линейно продолжается в группе*

$$F = A_k^{(n)} \cdot A_r^{(n-1)} \cdot \{\sigma_1, \ldots, \sigma_{h_1}, \ldots, \sigma_{h_2}, \sigma_{h_2+1}\},$$

где

$$\sigma_{h_2+1} = \alpha_{k-h_2-1}^{(n)} \cdot (\alpha_{r-h_2-1}^{(n-1)})^{v_0} \cdot (\alpha_{r-(h_2-h_1)-1}^{(n-1)})^{v_1} \cdot (\alpha_{r-1}^{(n-1)})^{v_2},$$

$(x_{h_2} + v \cdot j \equiv 0 \,(\operatorname{mod} p))$ *и все линейные продолжения характера* χ *в группе* F *имеют вид*

$$\chi(k_i, r_j)_{(0,\ldots,0,x_{h_1},0,\ldots,0,x_{h_2},x_{h_2+1})},$$

где $x_{h_2+1} = 0, 1, \ldots, p-1$. *Если* $\bar{r} = 1$, *то характер* χ *линейно не продолжается ни в одном нормальном делителе группы* G.

Доказательство. Первое утверждение теоремы доказывается точно так же, как в случае теоремы 4. 9. Далее

$$(\alpha_1^{(\mu_1)}, \sigma_{h_2+1}) \notin R,$$

где R — ядро характера χ, что доказывает второе утверждение теоремы.

Теорема 4. 11. *Пусть дан характер*

$$\chi(k_i, r_j)_{(0,\ldots,0,x_{h_1},0,\ldots,0,x_{h_2},0,\ldots,0,x_{h_\lambda})} = \chi$$

группы

$$A_k^{(n)} \cdot A_r^{(n-1)} \cdot \{\sigma_1, \ldots, \sigma_{h_1}, \ldots, \sigma_{h_2}, \ldots, \sigma_{h_\lambda}\},$$

где

$$1 \leqq i, j, x_{h_1}, \ldots, x_{h_\lambda} \leqq p-1; \quad 1 \leqq k, r \leqq p^{n-1}; \quad p^{n-2}+1 \leqq \max\,(r, k) \leqq p^{n-1};$$

$$\sigma_\tau = \alpha_{k-\tau}^{(n)} \cdot (\alpha_{r-\tau}^{(n-1)})^{v_0}, \qquad (\tau = 1, \ldots, h_1);$$

$$\sigma_{h_1+\tau_1} = \alpha_{k-h_1-\tau_1}^{(n)} \cdot (\alpha_{r-h_1-\tau_1}^{(n-1)})^{v_0} \cdot (\alpha_{r-\tau_1}^{(n-1)})^{v_1}, \qquad (\tau = 1, \ldots, h_2 - h_1);$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sigma_{h_{\lambda-1}+\tau_{\lambda-1}} = \alpha_{k-h_{\lambda-1}-\tau_{\lambda-1}}^{(n)} \cdot (\alpha_{r-h_{\lambda-1}-\tau_{\lambda-1}}^{(n-1)})^{v_0} \cdot (\alpha_{r-(h_{\lambda-1}-h_1)-\tau_{\lambda-1}}^{(n-1)})^{v_1} \ldots$$

$$\ldots (\alpha_{r-(h_{\lambda-1}-h_{\lambda-2})-\tau_{\lambda-1}}^{(n-1)})^{v_{\lambda-2}} \cdot (\alpha_{r-\tau_{\lambda-1}}^{(n-1)})^{v_{\lambda-1}},$$

$$i + v_0 \cdot j \equiv 0 \,(\operatorname{mod} p); \quad x_{h_\eta} + v_\eta \cdot j \equiv 0 \,(\operatorname{mod} p);$$

$$(\eta = 1, 2, \ldots, \lambda - 1; \quad \tau_{\lambda-1} = 1, 2, \ldots, h_\lambda - h_{\lambda-1}).$$

Пусть

$$k \equiv r \pmod{p^{\mu}}; \quad k \not\equiv r \pmod{p^{\mu+1}}; \qquad (0 \leqq \mu \leqq n-2);$$

$$k = qp^{\mu+1} + k^{(0)}, \quad r = sp^{\mu+1} + r^{(0)} \qquad (1 \leqq k^{(0)}, r^{(0)} \leqq p^{\mu+1});$$

$$\min(k^{(0)}, r^{(0)}) = \bar{k}.$$

Пусть

$$1 \leqq h_1 < h_2 < \ldots < h_\lambda < \bar{k} - 1, \quad h_1 \equiv h_2 \equiv \ldots \equiv h_\lambda \pmod{p^{\mu_\lambda}},$$

но не все элементы h_i *делятся на* $p^{\mu_\lambda+1}(\mu_\lambda \leqq \mu)$. *Пусть остатки от деления чисел* $r, r-h_\lambda, r-(h_\lambda-h_1), r-(h_\lambda-h_2), \ldots, r-(h_\lambda-h_{\lambda-1})$ *на* $p^{\mu_\lambda+1}$ *соответственно равны числам* $r_\lambda^{(\lambda)}, r_0^{(\lambda)}, r_1^{(\lambda)}, \ldots, r_{\lambda-1}^{(\lambda)}$ $(1 \leqq r_t^{(\lambda)} \leqq p^{\mu_\lambda+1})$ *и пусть* $\min(r_0^{(\lambda)}, r_1^{(\lambda)}, \ldots, r_\lambda^{(\lambda)}) = \bar{r}$. *Если* $\bar{r} > 1$, *то характер* χ *линейно продолжается в группе*

$$F = A_k^{(n)} \cdot A_r^{(n-1)} \cdot \{\sigma_1, \ldots, \sigma_{h_1}, \ldots, \sigma_{h_\lambda}, \sigma_{h_\lambda+1}\},$$

где

$$\sigma_{h_\lambda+1} = \alpha_{k-h_\lambda-1}^{(n)} \cdot (\alpha_{r-h_\lambda-1}^{(n-1)})^{\nu_0} \cdot (\alpha_{r-(h_\lambda-h_1)-1}^{(n-1)})^{\nu_1} \ldots (\alpha_{r-(h_\lambda-h_{\lambda-1})-1}^{(n-1)})^{\nu_{\lambda-1}} \cdot (\alpha_{r-1}^{(n-1)})^{\nu_\lambda},$$

$x_{h_\lambda} + \nu_\lambda \cdot j \equiv 0 \pmod{p}$ *и все его линейные продолжения в группе* F *имеют вид*

$$\chi(k_i, r_j)_{(0,\ldots,0,x_{h_1},0,\ldots,0,x_{h_\lambda},x_{h_\lambda+1})},$$

где $x_{h_\lambda+1} = 0, 1, \ldots, p-1$. *Если* $\bar{r} = 1$, *то характер* χ *линейно не продолжается ни в одном нормальном делителе группы* G.

Доказательство индуктивным путём очевидным образом получается из теоремы 4. 9.

§ 5.

Продолжение характеров $\chi(k_{i_0}^{(n)}, k_{i_1}^{(n-1)}, \ldots, k_{i_t}^{(n-t)})$

Пусть t — произвольное (фиксированное для всего параграфа) натуральное число $(3 \leqq t \leqq n+1)$. В этом параграфе рассматривается продолжение характера

$$\chi(p^{n-t}+1_0, p^{n-t}+1_0, \ldots, p^{n-t}+1_0).$$

Имеет место

Теорема 5. 1. *Характер* $\chi(p^{n-t}+1_0, p^{n-t}+1_0, \ldots, p^{n-t}+1_0)$ *группы*

$$A_{p^{n-t}+1}^{(n)} \cdot A_{p^{n-t}+1}^{(n-1)} \ldots A_{p^{n-t}+1}^{(n-t+1)}$$

линейно продолжается в группе

$$A_{p^{n-t}}^{(n)} \cdot A_{p^{n-t}}^{(n-1)} \ldots A_{p^{n-t}}^{(n-t+1)} \cdot A_{p^{n-t}}^{(n-t)},$$

и все его линейные продолжения имеют вид

$$\chi(p_{i_0}^{(n-t)}, p_{i_1}^{n-t}, \ldots, p_{i_t}^{n-t}),$$

где $0 \leqq i_0, i_1, \ldots, i_t \leqq p-1$.

Доказательство. Теорема непосредственно вытекает из строения центрального ряда (2. 4) группы G, так как ядро

$$R = A^{(n)}_{p^{n-t}+1} \cdot A^{(n-1)}_{p^{n-t}+1} \ldots A^{(n-t+1)}_{p^{n-t}+1}$$

— член центрального ряда (2. 4).

Теорема 5. 2. *Характер $\chi(k_0, k_0, \ldots, k_0)$ группы*

$$A^{(n)}_k \cdot A^{(n-1)}_k \ldots A^{(n-t)}_k$$

линейно продолжается в группе

$$A^{(n)}_{k-1} \cdot A^{(n-1)}_{k-1} \ldots A^{(n-t)}_{k-1}$$

и все его линейные продолжения в этой группе имеют вид

$$\chi(k-1_{i_0}, k-1_{i_1}, \ldots, k-1_{i_t}),$$

где

$$p^{n-t-1}+1 \leqq k \leqq p^{n-t}; \quad 0 \leqq i_0, \ldots, i_t \leqq p-1.$$

Доказательство этого утверждения также следует из строения центрального ряда (2. 4) группы G.

Рассмотрим теперь такие характеры $\chi(k^{(n)}_{i_0}, \ldots, k^{(n-t)}_{i_t})$, где один из индексов $i_0, \ldots, i_t$ не равен нулю, а остальные — равны нулю.
Имеет место

Теорема 5. 3′. *Пусть дан характер $\chi(k^{(n)}_{i_0}, k^{(n-1)}_{i_1}, \ldots, k^{(n-t)}_{i_t}) = \chi$ группы*

$$A^{(n)}_{k^{(n)}} \cdot A^{(n-1)}_{k^{(n-1)}} \ldots A^{(n-t)}_{k^{(n-t)}},$$

где

$$i_\tau \neq 0; \quad i_0 = \ldots = i_{\tau-1} = i_{\tau+1} = \ldots = i_t = 0; \quad 1 \leqq i_\tau \leqq p-1;$$

$$p^{n-t-1}+1 \leqq \max(k^{(n)}, \ldots, k^{(n-t)}) \leqq p^{n-t},$$

$$1 < k^{(n)}, \ldots, k^{(n-t)} \leqq p^{n-t}$$

Тогда характер χ линейно продолжается в группе

$$F = A^{(n)}_{k^{(n)}-1} \ldots A^{(n-\tau+1)}_{k^{(n-\tau+1)}-1} \cdot A^{(n-\tau)}_{k^{(n-\tau)}} \cdot A^{(n-\tau-1)}_{k^{(n-\tau-1)}-1} \ldots A^{(n-t)}_{k^{(n-t)}-1},$$

и все его линейные продолжения имеют вид

$$\chi(k^{(n)}-1_{i'_0}, \ldots, k^{(n-\tau+1)}-1_{i'_{\tau-1}}, k^{(n-\tau)}_{i_\tau}, k^{(n-\tau-1)}-1_{i'_{\tau+1}}, \ldots, k^{(n-t)}-1_{i'_t}),$$

где

$$0 \leqq i'_0, \ldots, i'_{\tau-1}, i'_{\tau+1}, \ldots, i'_t \leqq p-1.$$

Если $k^{(n)} = 1$, то характер χ линейно не продолжается ни в одном нормальном делителе группы G.

Доказательство. Пусть для определённости $\tau = t$. Из процесса последовательного линейного продолжения характеров следует, что характер χ имеет вид $\chi(k_0, \ldots, k_0, r_j)$, где $k^{(n)} = \ldots = k^{(n-t+1)} = k$; $k^{(n-t)} = r$; $i_t = j$.

Группа
$$R = A_k^{(n)} \cdot A_k^{(n-1)} \dots A_k^{(n-t+1)} \cdot A_{r+1}^{(n-t)}$$
— ядро характера χ при любом $(j=1, 2, \dots, p-1)$.

Смежные классы
$$\alpha_{k-1}^{(n)} R, \dots, \alpha_{k-1}^{(n-t+1)} R, \alpha_r^{(n-t)} R$$
принадлежат центру Z фактор-группы G/R. Действительно,
$$G \cong G_n \cdot \{x^{(m)}\}$$
где $G_n = A^{(n)} \cdot A^{(n-1)} \dots A^{(1)}$. Следовательно, для всех $m = n-t+1, \dots, n$ выполняются равенства
$$(x^{(n-t)}, \alpha_r^{(n-t)}) = \alpha_{r+1}^{(n-t)} \in R; \quad (x^{(m)}, \alpha_{k-1}^{(m)}) = \alpha_k^{(m)} \in R.$$
Кроме того,
$$(a^{(v)}, \alpha_{k-1}^{(m)}) \in R, \quad (a^{(v)}, \alpha_r^{(n-t)}) \in R$$
для всех $0 < v < n-t$ (лемма 1′).

Рассмотрим теперь произвольный смежный класс $gR \in Z$. Предположим, что
$$g = a^{(n)} \cdot a^{(n-1)} \dots a^{(n-t)} \cdot a^{(n-t-1)} \dots a^{(1)} \cdot a_1^{(0)},$$
где
$$a^{(v)} \in A^{(v)}, \quad (v = 0, 1, \dots, n) \quad \text{и} \quad a_1^{(0)} = (a^{(0)})^{\delta^{(0)}},$$
$$a^{(v)} = (\alpha_1^{(v)})^{\delta_1^{(v)}} \dots (\alpha_{k-2}^{(v)})^{\delta_{k-2}^{(v)}} \cdot (\alpha_{k-1}^{(v)})^{\delta_{k-1}^{(v)}} \dots (\alpha_{p^v}^{(v)})^{\delta_{p^v}^{(v)}}.$$

Так как для $\mu = k-1, k, \dots, p^v$ $v = n, n-1, \dots, n-t+1$ смежные классы $\alpha_\mu^{(v)} R \in Z$ и $\alpha_{p^{n-t}}^{(n-t)} R, \dots, \alpha_r^{(n-t)} R \in Z$, то $gR \in Z$ только тогда, когда $g'R \in Z$, где
$$g' = a'^{(m)} \dots a'^{(n-t)} \dots a'^{(1)} \cdot a'^{(0)},$$
$$a'^{(v)} = (\alpha_1^{(v)})^{\delta_1^{(v)}} \dots (\alpha_{k-2}^{(v)})^{\delta_{k-2}^{(v)}}, \qquad (v = 1, 2, \dots, n-t-1, n-t+1, \dots, n),$$
$$a'^{(n-t)} = (\alpha_1^{(n-t)})^{\delta_1^{(n-t)}} \dots (\alpha_{r-1}^{(n-t)})^{\delta_{r-1}^{(n-t)}}.$$

Однако для произвольного фиксированного $n-t+1 \leqq v \leqq n$ элемент $(x^{(v)}, g)$ в своём разложении на базисные множители содержит элементы
$$(\alpha_2^{(v)})^{\delta_1^{(v)}}, (\alpha_3^{(v)})^{\delta_2^{(v)}}, \dots, (\alpha_{k-1}^{(v)})^{\delta_{k-2}^{(v)}},$$
которые в произведении с другими базисными множителями этого элемента не могут дать единицу, поэтому $(x^{(v)}, g') \in R$ только тогда, когда $\delta_1^{(v)} = \dots = \delta_{k-2}^{(v)} = 0$.

Точно так же можно показать, что $\delta_1^{(n-t)} = \dots = \delta_{r-1}^{(n-t)} = 0$, $a^{(n-t-1)} = \dots = a^{(1)} = e$ и $g' = e$.

Тем самым мы установили, что центр Z порождается смежными классами $\alpha_{k-1}^{(v)} R$ $(v = n, n-1, \dots, n-t+1)$ и $\alpha_r^{(n-t)} R$.

Второе утверждение теоремы очевидно.

Определение 5. 1 Пусть s произвольное натуральное число ($s \geqq 1$). Рассмотрим множество M_s, состоящее из C_{s+1}^2 пар чисел (τ_1, τ_2), где $0 \leqq \tau_1 \neq \tau_2 \leqq s$. Будем считать, что $(\tau_1, \tau_2) = (\tau_2, \tau_1)$.

Для пар вида (τ_1, τ_3), $(\tau_1, \tau_2) \in M_s$ введем операцию

$$(\tau_1, \tau_2) \square (\tau_1, \tau_3) = (\tau_2, \tau_3).$$

Очевидно, операция $\square$ коммутативна, так как

$$(\tau_1, \tau_3) \square (\tau_1, \tau_2) = (\tau_3, \tau_2) = (\tau_2, \tau_3).$$

Подмножество $M' \subset M_s$ будем называть независимым, если ни одна из пар этого подмножества не может быть получена из други пар подмножества M' с помощью последовательного применения операции $\square$. Мы говорим, что подмножество $M'' \subset M_s$ максимальное независимое, если оно независимо, и любая пара множества M_s может быть получена из пар подмножества M'' с помощью операции $\square$.

Определение 5.2. Рассмотрим характер $\chi(k_{i_0}^{(n)}, \ldots, k_{i_t}^{(n-t)}) = \chi$, где $0 \leqq \leqq i_0, \ldots, i_t \leqq p-1$; $1 \leqq k^{(n)}, \ldots, k^{(n-t)} \leqq p^{n-t}$; $p^{n-t-1} + 1 \leqq \max(k^{(n)}, \ldots, k^{(n-t)}) \leqq p^{n-t}$. Пусть $k^{(n-\tau_0)}, \ldots, k^{(n-\tau_q)}$ — множество тех индексов характера χ, для которых $i_{\tau_0}, \ldots, i_{\tau_1} \neq 0$. Пусть

$$\bar{k}(\tau_{l_1}, \tau_{j_1}) \geqq \bar{k}(\tau_{l_2}, \tau_{j_2}) \geqq \bar{k}(\tau_{l_3}, \tau_{j_3}) \geqq \ldots$$

Из множества M_q, состоящего из C_{q+1}^2 пар (τ_l, τ_j), следующим образом выбираем максимальное независимое подмножество M': $(\tau_{l_1}, \tau_{j_1}), (\tau_{l_2}, \tau_{j_2}) \in M'$. Если пара (τ_{l_3}, τ_{j_3}) не может быть получена из пар $(\tau_{l_1}, \tau_{j_1}), (\tau_{l_2}, \tau_{j_2})$ с помощью операции $\square$ (см. определение 5. 1), то (τ_{l_3}, τ_{j_3}) включаем в M', в противном случае отбрасываем. Полученное при этом подмножество $M_3' = \{(\tau_{l_1}, \tau_{j_1}), (\tau_{l_2}, \tau_{j_2}), (\tau_{l_3}, \tau_{j_3})$ независимо, потому что если

$$(\tau_{l_2}, \tau_{j_2}) \square (\tau_{l_3}, \tau_{j_3}) = (\tau_{l_1}, \tau_{j_1}),$$

то, например, $l_2 = l_3$, и значит $j_2 = l_1$ и $j_2 = j_1$, что невозможно, так как $(\tau_{l_1}, \tau_{j_1}) \neq (\tau_{l_2}, \tau_{j_2})$. Затем поступим так же с парой (τ_{l_4}, τ_{j_4}), итд. Очевидно, M' содержит точно q пар.

Лемма 5. 1. *Пусть дан характер χ, указанный в определении 5. 2. Тогда ядро R этого характера может быть представлено в виде*

$$R = A_{\hat{k}^{(n)}}^{(n)} \cdot A_{\hat{k}^{(n-1)}}^{(n-1)} \ldots A_{\hat{k}^{(n-t)}}^{(n-t)} \cdot \{\bar{\sigma}^{(l_1, j_1)}\} \cdot \{\bar{\sigma}^{(l_2, j_2)}\} \ldots \{\bar{\sigma}^{(l_q, j_q)}\},$$

где

$$\bar{\sigma}^{(l_\lambda, j_\lambda)} = \alpha_{k^{(n-\tau_{l_\lambda})}}^{(n-\tau_{l_\lambda})} \cdot (\alpha_{k^{(n-\tau_{j_\lambda})}}^{(n-\tau_{j_\lambda})})^{v^{(l_\lambda, j_\lambda)}}; \quad i_{\tau_{l_\lambda}} + v^{(l_r, j_\lambda)} \cdot i_{\tau_{j_\lambda}} \equiv 0 \pmod p)$$

$$(\lambda = 1, 2, \ldots, q).$$

$$\hat{k}^{(n-j)} = \begin{cases} k^{(n-j)}, & i_j = 0 \\ k^{(n-j)} + 1 & i_j \neq 0. \end{cases} \qquad (j = 0, 1, \ldots, t).$$

Доказательство. Для определённости предположим, что $i_0, \ldots, i_q \neq 0$; $i_{q+1} = \ldots = i_t = 0$. Из процесса последовательного линейного продолжения характеров ясно, что тогда $k^{(n-q-1)}=k^{(n-q-2)}=\ldots=k^{(n-t)}=k$ и $1\leqq k\leqq \leqq\min(k^{(n)}, \ldots, k^{(n-q)})$. Теперь для доказательства теоремы нужно показать, что R может быть представлен в виде

$$(5.1)\qquad R = A^{(n)}_{k^{(n)}+1}\ldots A^{(n-q)}_{k^{(n-q)}+1}\cdot A^{(n-q-1)}_{k^{(n-q-1)}}\ldots A^{(n-t)}_{k}\cdot\{\bar\sigma^{(l_1, j_1)}\}\ldots\{\bar\sigma^{(l_q, j_q)}\}.$$

Сначала мы покажем, что ядро R может быть записано в виде

$$(5.2)\qquad R = A\cdot\{\alpha^{(n)}_{k^{(n)}}\cdot(\alpha^{(n-1)}_{k^{(n-1)}})^{v_1^{(1)}}\}\cdot\{\alpha^{(n)}_{k^{(n)}}\cdot(\alpha^{(n-2)}_{k^{(n-2)}})^{v_1^{(2)}}\}\ldots\{\alpha^{(n)}_{k^{(n)}}\cdot(\alpha^{(n-q)}_{k^{(n-q)}})^{v_1^{(q)}}\},$$

где

$$i_0+v_1^{(\lambda)}\cdot i_\lambda\equiv 0 \pmod p\quad (\lambda=1, 2, \ldots, q),$$

$$A = A^{(n)}_{k^{(n)}+1}\ldots A^{(n-q)}_{k^{(n-q)}+1}\cdot A^{(n-q-1)}_{k}\ldots A^{(n-t)}_{k}.$$

Так как характер χ определён в группе

$$\widehat{F} = A^{(n)}_{k^{(n)}}\ldots A^{(n-t)}_{k^{(n-t)}}$$

и

$$A^{(n-q-1)}_{k}\ldots A^{(n-t)}_{k}\subseteqq R;\quad A^{(n-j)}_{k^{(n-j)}+1}\subseteqq R\qquad (j=0, 1, \ldots, q),$$

то для доказательства равенства (5.2) достаточно показать, что если характер χ равен единице на произведении элементов

$$a = (\alpha^{(n)}_{k^{(n)}})^{\delta_0}\cdot(\alpha^{(n-1)}_{k^{(n-1)}})^{\delta_1}\ldots(\alpha^{(n-q)}_{k^{(n-q)}})^{\delta_q},$$

то элемент a может быть записан в виде произведения некоторых степеней элементов, стоящих в фигурных скобках в правой части (5.2) и элементов группы A.

Имеем

$$a = a'[\alpha^{(n)}_{k^{(n)}}\cdot(\alpha^{(n-1)}_{k^{(n-1)}})^{v_1^{(1)}}]^{\delta_1'}\ldots[\alpha^{(n)}_{k^{(n)}}\cdot(\alpha^{(n-q)}_{k^{(n-q)}})^{v_1^{(q)}}]^{\delta_q'}\cdot(\alpha^{(n)}_{k^{(n)}})^{\delta_0'},$$

где

$$v_1^{(j)}\cdot\delta_j'\equiv\delta_j \pmod p\qquad (j=1, 2, \ldots, q);\quad a'\in R;$$

$$\delta_0'+\delta_1'+\ldots+\delta_q'\equiv\delta_0 \pmod p.$$

Так как

$$\chi a=1,\quad \chi a'=1\quad\text{и}\quad \chi[\alpha^{(n)}_{k^{(n)}}\cdot(\alpha^{(n-j)}_{k^{(n-j)}})^{v_1^{(j)}}]^{\delta_j'}=1,$$

то также $\chi[\alpha^{(n)}_{k^{(n)}}]^{\delta_0'}=1$, то есть $\delta_0'\equiv 0 \pmod p$, что и требовалось доказать.

Так как множество

$$M' = \{(\tau_{l_1}, \tau_{j_1}), \ldots, (\tau_{l_q}, \tau_{j_q})\}$$

максимальное независимое, то каждая пара $(0, 1)$; $(0, 2)$;..., $(0, q)$ может быть получена из элементов M' с помощью операции $\Box$. Отсюда следует, что для любого j найдутся такие $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_q$, что

$$\alpha^{(n)}_{k^{(n)}} \cdot (\alpha^{(n-j)}_{k^{(n-j)}})^{v_1^{(j)}} = (\bar{\sigma}^{(l_1, j_1)})^{\varepsilon_1} \ldots (\bar{\sigma}^{(l_q, j_q)})^{\varepsilon_q}.$$

Лемма доказана.

Теорема 5. 3. *Пусть дан характер χ, указанный в определении 5. 2. Тогда характер χ линейно продолжается в группе*

$$F = A^{(n)}_{\widehat{k}^{(n)}} \cdot A^{(n-1)}_{\widehat{k}^{(n-1)}} \ldots A^{(n-t)}_{\widehat{k}^{(n-t)}} \cdot \{\sigma^{(l_1, j_1)}\} \ldots \{\sigma^{(l_q, j_q)}\},$$

где

$$\widehat{k}^{(n-\lambda)} = \begin{cases} k^{(n-\lambda)} & \text{если} \quad k^{(n-\lambda)} = 1 \quad \text{или} \quad i_\lambda \neq 0, \\ k^{(n-\lambda)} - 1 & \text{если} \quad k^{(n-\lambda)} \neq 1 \quad \text{и} \quad i_\lambda = 0, \end{cases}$$

$$(\lambda = 0, 1, \ldots, t).$$

а элементы $\sigma^{(l_\eta, j_\eta)}$ строятся следующим образом: Если $\bar{k}(\tau_{l_\eta}, \tau_{j_\eta}) > 1$, то

$$\sigma^{(l_\eta, j_\eta)} = \alpha^{(n-\tau_{l\eta})}_{k^{(n-\tau_{l\eta})}-1} \cdot (\alpha^{(n-\tau_{j\eta})}_{k^{(n-\tau_{j\eta})}-1})^{v^{(l_\eta, j_\eta)}},$$

где

$$i_{l_\eta} + v^{(l_\eta, j_\eta)} \cdot i_{j_\eta} \equiv 0 \pmod p, \qquad (\eta = 1, 2, \ldots, q),$$

но

$$\sigma^{(l_\eta, j_\eta)} = e \quad \text{если} \quad \bar{k}(\tau_{l_\eta}, \tau_{j_\eta}) = 1.$$

Все линейные продолжения характера χ в группе F имеют вид

$$(**) \qquad \chi(k^{(n)}_{i_0}, \ldots, k^{(n-t)}_{i_t})\,(x^{(1)})_{\tau_{l_1}, \tau_{j_1}} \ldots (x^{(q)})_{\tau_{l_q}, \tau_{j_q}},$$

где $x^{(\lambda)} = 0, 1, \ldots, p-1$, если $\sigma^{(l_\lambda, j_\lambda)} \neq e$. (При $\sigma^{(l_\lambda, j_\lambda)} = e$ в формуле $(**)$ число $x^{(\lambda)}$ отсутствует.)

Доказательство. Как и в доказательстве леммы 5. 1, для удобства записи мы предположим, что $i_0, \ldots, i_q \neq 0; i_{q+1} = \ldots = i_t = 0$, то есть рассмотрим характер

$$\chi(k^{(n)}_{i_0}, \ldots, k^{(n-q)}_{i_q}, k_0, \ldots, k_0).$$

Очевидно, это предположение не влияет на общность рассуждений, так как

$$(a^{(n-\lambda)}, a^{(n-\lambda')}) \in A^{(n)}_{p^{n-t}+1} \ldots A^{(n-t)}_{p^{n-t}+1}$$

для всех $0 \leqq \lambda, \lambda' \leqq t$.

Согласно лемме 5. 1, ядро R характера χ может быть представлено в виде (5. 1).

Рассмотрим центр Z фактор-группы G/R. Очевидно,

$$\alpha^{(n)}_{k^{(n)}} R, \ldots, \alpha^{(n-q)}_{k^{(n-q)}} R \in Z.$$

Ясно также, что

$$\alpha^{(n-q-1)}_{k-1} R, \ldots, \alpha^{(n-t)}_{k-1} R \in Z$$

тогда и только тогда, когда $k > 1$. Из теорем 4. 5 и 4. 5' следует, что $\sigma^{(l_\lambda, j_\lambda)} R \in Z$

$(\lambda=1, 2, \ldots, q)$ тогда и только тогда, когда $\bar{k}(\tau_{l_\lambda}, \tau_{j_\lambda})>1$. Очевидно, если элемент $g\in G$ представим в виде

$$g = a^{(n)}\cdot a^{(n-1)}\ldots a^{(n-t)}\cdot a^{(n-t-1)}\ldots a^{(1)}\cdot (a^{(0)})^{\delta_0},$$

то $gR\in Z$ только тогда, когда $a^{(n-t-1)}=\ldots=a^{(1)}=(a^{(0)})^{\delta_0}=e$, так как $(a^{(m)}, a^{(n-t-\lambda)})\in A^{(n-t-\lambda)}\subsetneqq R$ для всех $m<n-t-1$; $\lambda=1, 2, \ldots, n-1$. Элементы $a^{(\lambda)}$ записываются в виде

$$a^{(\lambda)} = (\alpha_{p^\lambda}^{(\lambda)})^{\delta_{p^\lambda}^{(\lambda)}}\ldots(\alpha_1^{(\lambda)})^{\delta_1^{(\lambda)}}\qquad (\lambda=n, n-1, \ldots, n-t).$$

Так как $\alpha_{p^\lambda}^{(\lambda)}R, \ldots, \alpha_{k(\lambda)+1}^{(\lambda)}R\in Z$ для всех $\lambda=n, n-1, \ldots, n-q$, и $\alpha_{k-1}^{(n-q-1)}R, \ldots, \alpha_{k-1}^{(n-t)}R\in Z$, то мы можем предположить, что элемент g имеет вид

$$g = (\alpha_{k^{(n)}-1}^{(n)})^{\delta_{k^{(n)}-1}^{(n)}}\ldots(\alpha_1^{(n)})^{\delta_1^{(n)}}\cdot(\alpha_{k^{(n-1)}-1}^{(n-1)})^{\delta_{k^{(n-1)}-1}^{(n-1)}}\ldots(\alpha_1^{(n-1)})^{\delta_1^{(n-1)}}\ldots$$
$$\ldots(\alpha_{k^{(n-q)}-1}^{(n-q)})^{\delta_{k^{(n-q)}-1}^{(n-q)}}\ldots(\alpha_1^{(n-q)})^{\delta_1^{(n-q)}}\cdot(\alpha_{k-2}^{(n-q-1)})^{\delta_{k-2}^{(n-q-1)}}\ldots$$
$$\ldots(\alpha_1^{(n-q-1)})^{\delta_1^{(n-q-1)}}\ldots(\alpha_{k-2}^{(n-t)})^{\delta_{k-2}^{(n-t)}}\ldots(\alpha_1^{(n-t)})^{\delta_1^{(n-t)}}.$$

Так как разложение коммутатора $(a^{(0)}, g)$ содержит множители

$$(\alpha_{k^{(n)}-1}^{(n)})^{\delta_{k^{(n)}-2}^{(n)}}, \ldots, (\alpha_2^{(n)})^{\delta_1^{(n)}}, \ldots, (\alpha_{k^{(n-q)}-1}^{(n-q)})^{\delta_{k^{(n-q)}-2}^{(n-q)}}, \ldots, (\alpha_2^{(n-q)})^{\delta_1^{(n-q)}},$$
$$(\alpha_{k-2}^{(n-q-1)})^{\delta_{k-3}^{(n-q-1)}}, \ldots, (\alpha_2^{(n-q-1)})^{\delta_1^{(n-q-1)}}, \ldots, (\alpha_{k-2}^{(n-t)})^{\delta_{k-3}^{(n-t)}}, \ldots, (\alpha_2^{(n-q)})^{\delta_1^{(n-t)}}\notin R,$$

то g имеет вид

$$(5.3)\qquad \begin{aligned} g &= (\alpha_{k^{(n)}-1}^{(n)})^{\delta_{k^{(n)}-1}^{(n)}}\cdot(\alpha_{k^{(n-1)}-1}^{(n-1)})^{\delta_{k^{(n-1)}-1}^{(n-1)}}\ldots(\alpha_{k^{(n-q)}-1}^{(n-q)})^{\delta_{k^{(n-q)}-1}^{(n-q)}} = \\ &= a[\alpha_{k^{(n)}-1}^{(n)}\cdot(\alpha_{k^{(n-1)}-1}^{(n-1)})^{\nu_1^{(1)}}]^{\delta_1'}\ldots[\alpha_{k^{(n)}-1}^{(n)}\cdot(\alpha_{k^{(n-q)}-1}^{(n-q)})^{\nu_1^{(q)}}]^{\delta_q'}\cdot(\alpha_{k^{(n)}-1}^{(n)})^{\delta_0'},\end{aligned}$$

где $i_0+\nu_j^{(1)}\cdot i_j\equiv 0 \pmod p$, $(j=1, \ldots, q)$. Как в доказательстве леммы 5. 1, можно показать, что элементы в каждой квадратной скобке могут быть выражены в виде произведения некоторых степеней элементов

$$\alpha_{k(n-\tau_{l_1})-1}^{(n-\tau_{l_1})}\cdot(\alpha_{k(n-\tau_{j_1})-1}^{(n-\tau_{j_1})})^{\nu^{(l_1, j_1)}}, \ldots, \alpha_{k(n-\tau_{l_q})-1}^{(n-\tau_{l_q})}\cdot(\alpha_{k(n-\tau_{j_q})-1}^{(n-\tau_{j_q})})^{\nu^{(l_q, j_q)}},$$

$$i_{\tau_{l_\lambda}}+\nu^{(l_\lambda, j_\lambda)}i_{\tau_{j_\lambda}}\equiv 0 \pmod p\qquad (\lambda=1, 2, \ldots, q).$$

Значит

$$(5.4)\qquad \begin{aligned} g = [\alpha_{k(n-\tau_{l_1})-1}^{(n-\tau_{l_1})}\cdot(\alpha_{k(n-\tau_{j_1}-1)}^{(n-\tau_{j_1})})^{\nu^{(l_1, j_1)}}]^{\delta_1''}\ldots[\alpha_{k(n-\tau_{l_q})-1}^{(n-\tau_{l_q})}\cdot(\alpha_{k(n-\tau_{j_q})-1}^{(n-\tau_{j_q})})^{\nu^{(l_q, j_q)}}]^{\delta_q''}\cdot \\ \cdot(\alpha_{k^{(n)}-1}^{(n)})^{\delta_0'}\end{aligned}$$

Отсюда следует, что для доказательства теоремы достаточно показать, что если некоторые из элементов, стоящих в квадратных скобках в правой части (5. 4), порождают смежный класс по R, не принадлежащий центру Z, то смежный класс, порождённый любым произведением σ этих элементов, также не лежит в Z.

Пусть для определённости

$$\alpha_{k(n-\tau_{l_\lambda})-1}^{(n-\tau_{l_\lambda})}\cdot\left(\alpha_{k(n-\tau_{j_\lambda})-1}^{(n-\tau_{j_\lambda})}\right)^{\nu(l_\lambda,\, j_\lambda)} R\notin Z \qquad (\lambda=1, \ldots, s).$$

Это значит, что $\bar{k}(\tau_{l_\lambda}, \tau_{j_\lambda})=1$, и существуют такие $\mu_{l_\lambda, j_\lambda}$, для которых один и только один из коммутаторов

$$(***) \qquad \left(\alpha_1^{(\mu_{l_\lambda},\, j_\lambda)}, \alpha_{k(n-\tau_\lambda)-1}^{(n-\tau_{l_\lambda})}\right), \left(\alpha_1^{(\mu_{l_\lambda},\, j_\lambda)}, \alpha_{k(n-\tau_{j_\lambda})-1}^{(n-\tau_{j_\lambda})}\right)$$

равен единице. Пусть $\min\limits_{\lambda}(\mu_{l_\lambda, j_\lambda})=\mu$. Так как $\mu_{l_\lambda, j_\lambda}\neq\mu_{l_\lambda, j_\lambda}$, если $\lambda\neq\lambda_1$, то все коммутаторы $(***)$ равны единице, кроме одного, который не принадлежит ядру R. Следовательно $(\alpha_1^{(\mu)}, \sigma)\notin R$, что и требовалось доказать. Теорема доказана.

Теорема 5. 4. *Пусть дан характер*

$$(5.5) \qquad \chi(k_{i_0}^{(n)}, \ldots, k_{i_t}^{(n-t)})_{(x_1^{(1)}, \ldots, x_{m_1}^{(1)})_{\tau_{l_1}, \tau_{j_1}}\cdots(x_1^{(q)}, \ldots, x_{m_q}^{(q)})_{\tau_{l_q}, \tau_{j_q}}} = \chi,$$

где $0\leqq x_1^{(1)}, \ldots, x_{m_1}^{(1)}, \ldots, x_1^{(q)}, \ldots, x_{m_q}^{(q)}\leqq p-1$ *и* χ *получен из характера, указанного в определении 5. 2 последовательными линейными продолжениями. Тогда характер* χ *линейно продолжается в группе*

$$F = A_{\hat{k}^{(n)}}^{(n)}\ldots A_{\hat{k}^{(n-t)}}^{(n-t)}\cdot\{\sigma_1^{(1)}, \ldots, \sigma_{m_1}^{(1)}, \sigma_{m_1+1}^{(1)}\}\ldots\{\sigma_1^{(q)}, \ldots, \sigma_{m_q}^{(q)}, \sigma_{m_q+1}^{(q)}\},$$

где

$$\hat{k}^{(n-r)} = \begin{cases} k^{(n-r)}, & \textit{если} \quad k^{(n-r)}=1 \quad \textit{или} \quad i_r\neq 0 \\ k^{(n-r)}-1 & \textit{если} \quad k^{(n-r)}\neq 1 \quad \textit{и} \quad i_r=0, \end{cases}$$

$$(r = 0, 1, \ldots, t).$$

а элементы $\sigma_{m_\lambda+1}^{(\nu)}$ *строятся следующим образом:*

Пусть $x_{h_1^{(\lambda)}}^{(\lambda)}, \ldots, x_{h_{s_\lambda}^{(\lambda)}}^{(\lambda)}$ — *система ненулевых компонент вектора* $(x_1^{(\lambda)}, \ldots, x_{m_\lambda}^{(\lambda)})$, $(\lambda=1, 2, \ldots, q;\ 1\leqq h_1^{(\lambda)}<h_2^{(\lambda)}<\ldots<h_{s_\lambda}^{(\lambda)}\leqq\bar{k}(\tau_{l_\lambda}, \tau_{j_\lambda}))$. *Пусть* $h_1^{(\lambda)}\equiv h_2^{(\lambda)}\equiv\ldots\equiv h_{s_2}^{(\lambda)}\equiv 0 \pmod{p^{\bar{\mu}_\lambda}}$, *но хотя бы одно из чисел* $h_\varepsilon^{(\lambda)}$ $(\varepsilon=1, \ldots, s_\lambda)$ *не делится на* $p^{\bar{\mu}_\lambda+1}$ $(\bar{\mu}_\lambda\leqq\mu_{l_\lambda, j_\lambda})$. *Пусть остатки от деления чисел* $k^{(n-\tau_{l_\lambda})}-h_{s_\lambda}^{(\lambda)}$; $k^{(n-\tau_{l_\lambda})}-(h_{s_\lambda}^{(\lambda)}-h_1^{(\lambda)})$; $\ldots$, $k^{(n-\tau_{l_\lambda})}-(h_{s_\lambda}^{(\lambda)}-h_{s_\lambda-1}^{(\lambda)})$; $k^{(n-\tau_{l_\lambda})}-1$ *на* $p^{\bar{\mu}_\lambda+1}$ *соответственно равны числам* $r_0^{(\lambda)}, \ldots, r_{s_\lambda}^{(\lambda)}$. *Положим* $\min(r_0^{(\lambda)}, \ldots, r_{s_\lambda}^{(\lambda)})=\bar{r}^{(\lambda)}$ *и* $m_\lambda=qp^{\bar{\mu}_\lambda+1}+m'_\lambda$ $(1\leqq m'_\lambda\leqq p^{\bar{\mu}_\lambda+1})$. *Если* $x_{m_\lambda}^{(\lambda)}=0$ *и* $\bar{r}^{(\lambda)}-m'_\lambda>1$, *то* $\sigma_{m_\lambda+1}^{(\lambda)}=\underline{\sigma}_{m_\lambda}^{(\lambda)}$ *(см. обозначения 4. 1), а при* $x_{m_\lambda}^{(\lambda)}=0$,

$\bar{r}^{(\lambda)}-m'_\lambda=1$ *имеет место равенство* $\sigma^{(\lambda)}_{m_\lambda+1}=e$. *Если* $x^{(\lambda)}_{m_\lambda}\neq 0$, $\bar{r}^{(\lambda)}-m'_\lambda>1$, *то* $\sigma^{(\lambda)}_{m_\lambda+1}=\underline{\sigma}^{(\lambda)}_{m_\lambda}\cdot(\alpha^{(n-\tau_{j\lambda})}_{k^{(n-\tau_{j\lambda})}-1})^{v^{(\lambda)}_{m_\lambda}}$, *где*

$$x^{(\lambda)}_{m_\lambda}+v^{(\lambda)}_{m_\lambda}\cdot i_{\tau_\lambda}\equiv 0 \pmod p).$$

При $x^{(\lambda)}_{m_\lambda}\neq 0$ *и* $\bar{r}^{(\lambda)}-m'_\lambda=1$ *выполняется* $\sigma^{(\lambda)}_{m_\lambda+1}=e$.

Доказательство. Теорема верна при $m_1=\ldots=m_q=0$ (теорема 5. 3). Предположим, что нами уже построен характер χ (см. (5. 5)). Ядро характера χ имеет вид

$$R=A^{(n)}_{\widehat{k}^{(n)}}\cdot A^{(n-1)}_{\widehat{k}^{(n-1)}}\ldots A^{(n-t)}_{\widehat{k}^{(n-t)}}\cdot\{\bar{\sigma}^{(1)}_1,\ldots,\bar{\sigma}^{(1)}_{m_1},\sigma^{(1)}_{m_1}\cdot(\alpha^{(n-\tau_{j1})}_{k^{(n-\tau_{j1})}})^{v^{(1)}_{m_1}}\}\ldots$$

$$\ldots\{\bar{\sigma}^{(q)}_1,\ldots,\bar{\sigma}^{(q)}_{m_q},\sigma^{(q)}_{m_q}\cdot(\alpha^{(n-\tau_{jq})}_{k^{(n-\tau_{jq})}})^{v^{(q)}_{m_q}}\},$$

где элементы $\bar{\sigma}^{(\lambda)}_r$ ($\lambda=1,\ldots,q$; $r=1,\ldots,m_\lambda$) построены индуктивным путём, и $x^{(\lambda)}_{m_\lambda}+\gamma^{(\lambda)}_{m_\lambda}\cdot i_{\tau_{j_\lambda}}\equiv 0 \pmod p$ (см. обозначения 4. 1).

Смежные классы $\alpha^{(n)}_{k^{(n)}}R,\ldots,\alpha^{(n-t)}_{k^{(n-t)}}R$ принадлежат центру Z фактор-группы G/R. $\alpha^{(n-r)}_{k^{(n-r)}-1}R\in Z$ тогда и только тогда, когда $k^{(n-r)}>1$ и $i_r=0$.

Согласно теореме 4. 11, $\sigma^{(\lambda)}_{m_\lambda+1}R\in Z$ тогда и только тогда, когда $\bar{r}^{(j)}-m'_j>1$.

Точно так же, как в доказательстве теоремы 5. 3, можно показать, что центр Z порождается смежными классами вида

$$\alpha^{(n-\tau_\lambda)}_{k^{(n-\tau_\lambda)}}R \qquad (\lambda=l_1,\ldots,l_q,j_1,\ldots,j_q),$$

$$\alpha^{(n-r)}_{k^{(n-r)}}R \qquad (k^{(n-r)}>1,\ i_r=0),$$

$$\sigma^{(\mu)}_{m_\mu+1}R \qquad (\mu=1,2,\ldots,q).$$

Теорема доказана.

Следствие 5. 1. *Все линейные части неприводимых комплексных характеров группы G имеют вид*

$$\chi(k^{(n)}_{i_0},\ldots,k^{(n-t)}_{i_t})_{(x^{(1)}_1,\ldots,x^{(1)}_{m_1})_{\tau_{l_1},\tau_{j_1}}\ldots(x^{(q)}_1,\ldots,x^{(q)}_{m_q})_{\tau_{l_q},\tau_{j_q}}}=\chi,$$

где характер $\chi(k^{(n)}_{i_0},\ldots,k^{(n-t)}_{i_t})$ *описан в определении 5. 2. Характер* χ *определён на группе*

$$F=A^{(n)}_{\widehat{k}^{(n)}}\cdot A^{(n-1)}_{\widehat{k}^{(n-1)}}\ldots A^{(n-t)}_{\widehat{k}^{(n-t)}}\cdot\{\sigma^{(1)}_1,\ldots,\sigma^{(1)}_{m_1}\}\ldots\{\sigma^{(q)}_1,\ldots,\sigma^{(q)}_{m_q}\},$$

где $\widehat{k}^{(n-s)}=1$, *если* $i_s=0$, *причём* $\bar{r}^{(\lambda)}-m'_\lambda=1$; $s=0,1,\ldots,t$; $\lambda=1,2,\ldots,q$. *Элементы* $\sigma^{(\lambda)}_i$, *числа* m'_λ *и ядро R характера* χ *определяются в соответствии с теоремой 5. 4.*

Доказательство вытекает из того факта, что линейные части всех неприводимых комплексных характеров группы G исчерпываются всеми линейными характерами нормальных делителей H группы G, не допускающими линейного продолжения ни в одном нормальном делителе $F\supset H$ группы G.

Литература

[1] L. Kaloujnine, Sur les p-groupes de Sylow du groupe symetrique de degré m, *C. R. Acad. Sci. Paris* **221** (1945), 222—224.

[2] L. Kaloujnine, La structure des p-groupes de Sylow des groupes symetriques finis, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (3) **65** (1948).

[3] A. I. Weir, Sylow p-subgroups of the classical groups over finite fields with characteristic prime to p, *Proc. Amer. Math. Soc.* **6** (1955), 529—533.

[4] A. I. Weir, The Sylow subgroups of the symmetric group, *Proc. Amer. Math. Soc.* **6** (1955), 534—541.

[5] С. Д. Берман, О характерах конечных нильпотентных групп, Успехи мат. наук 1959, 14, No**5** (217—218).

[6] С. Д. Берман, Нормальные делители группы треугольных матриц над конечным полем, Докл. и сообщ. Ужг. унив. 1960, No3 (50).

[7] К. Бузаши, Ядра неприводимых представлений силовской p-подгруппы S_3 симметрической группы S_{p^3}, *Publ. Math. Debrecen*, **14** (1967), 285—310.

[8] К. Бузаши, О строении конечного числа циклических групп простого порядка, *Publ. Math. Debrecen*, **15** (1968), 107—129.

(Поступило 13. VIII. *1968.)*