

Über die Permanente des verallgemeinerten tensoriellen Produkts der Matrizen

Herrn Professor B. Gyires zum 60. Geburtstag gewidmet

Von SZILVESZTER ROCHLITZ (Debrecen)

§ 1.

Die Definition des wohlbekannten tensoriellen Produkts zweier Matrizen stammt von Kronecker. Bezüglich dieses Produkts fand er den folgenden Determinantensatz:

$$(1.1) \quad A_\mu = [a_{ik}], \quad B_\nu = [b_{jl}], \quad i, k = 1, \dots, \mu; \quad j, l = 1, \dots, \nu$$

$$\det(A_\mu \times B_\nu) = (\det(A_\mu))^\nu (\det(B_\nu))^\mu$$

Es seien die Elemente der Matrizen A_μ und B_ν nichtnegativ. Dann gilt eine Ungleichung für die Permanente des Produkts, die von R. A. BRUALDI ([4]) stammt:

$$(1.2) \quad \text{per}(A_\mu \times B_\nu) \cong (\text{per}(A_\mu))^\nu (\text{per}(B_\nu))^\mu$$

G. RADOS ([1]) und später GY. HAJÓS und B. GYIRES ([2], [3]) haben sich mit der Verallgemeinerung des tensoriellen Produkts beschäftigt. Sie haben Sätze auch über die Determinante des verallgemeinerten Produkts.

Es seien die Matrizen

$$(1.3) \quad A_\mu^{(i)} = [a_{kl}^{(i)}] \quad i = 1, \dots, \nu; \quad k, l = 1, \dots, \mu$$

$$B_\nu^{(j)} = [b_{st}^{(j)}] \quad j = 1, \dots, \mu; \quad s, t = 1, \dots, \nu$$

gegeben. Bilden wir ein Element N_{kj} der Matrix N der Ordnung $\nu\mu$

$$(1.4) \quad N_{kj} = \begin{pmatrix} a_{kj}^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & a_{kj}^{(\nu)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11}^{(j)} & \dots & b_{1\nu}^{(j)} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ b_{\nu 1}^{(j)} & \dots & b_{\nu\nu}^{(j)} \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} N_{11} & \dots & N_{1\mu} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ N_{1\mu} & \dots & N_{\mu\mu} \end{pmatrix}$$

dann laut des Satzes von Rados

$$(1.5) \quad \det(N) = \prod_{i=1}^{\nu} \det(A_{\mu}^{(i)}) \prod_{j=1}^{\mu} \det(B_{\nu}^{(j)})$$

gilt. In dem speziellen Fall — falls $A_{\mu}^{(i)} = A_{\mu}$ und $B_{\nu}^{(j)} = B_{\nu}$ — bekommen wir die Behauptung in (1.1).

Es gibt eine Ungleichung auch für die Permanente von N , wenn wir noch weitere Beschränkung machen.

Es sei durch die Formel

$$(1.6) \quad N_{kj} = \begin{pmatrix} a_{kj}^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & a_{kj}^{(\nu_k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11}^{(j)} & \dots & b_{1\nu_j}^{(j)} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ b_{\nu_k 1}^{(j)} & \dots & b_{\nu_k \nu_j}^{(j)} \end{pmatrix}$$

ein Element aus der Matrix N der Ordnung $\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_{\mu} = n$ definiert:

$$(1.7) \quad N = \begin{pmatrix} N_{11} & \dots & N_{1\mu} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ N_{\mu 1} & \dots & N_{\mu\mu} \end{pmatrix}$$

Bezeichnen wir durch A_j und B_k die aus der $a_{ik}^{(j)}$ bzw. $b_{gh}^{(k)}$ Elementen bestehenden Matrizen:

$$(1.8) \quad A_j = \begin{pmatrix} a_{11}^{(j)} & \dots & a_{1\mu_j}^{(j)} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{\mu_j 1}^{(j)} & \dots & a_{\mu_j \mu_j}^{(j)} \end{pmatrix}$$

und

$$(1.9) \quad B_k = \begin{pmatrix} b_{11}^{(k)} & \dots & b_{1\nu_k}^{(k)} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ b_{\nu_k 1}^{(k)} & \dots & b_{\nu_k \nu_k}^{(k)} \end{pmatrix}$$

Nehmen wir an, daß die Relationen

$$(1.10) \quad \nu_1 \cong \nu_2 \cong \dots \cong \nu_{\mu} (\cong 1)$$

$$\nu_{\mu_i} \cong i \cong \nu_{\mu_i + 1}$$

gelten, und die vorkommende $a_{il}^{(j)}$ bzw. $b_{gh}^{(k)}$ Elemente existieren. Sind diese Bedingungen erfüllt, so gilt der Satz von Gyires:

$$(1.11) \quad \det(N) = \prod_{j=1}^{\nu} \det(A_j) \prod_{k=1}^{\mu} \det(B_k)$$

Daraus folgt der Satz von Rados, wenn $\nu_i = \nu$ und $\mu_j = \mu$ gilt.

In dieser Arbeit sagen wir Sätze über die Permanente bezüglich der beiden hier erwehnten Verallgemeinerung des tensoriellen Produkts aus.

Beide Sätze können von einander unabhängig bewiesen werden. Zum Beweis gebrauchen wir einen Satz, der dem Cauchyschen Satz für die Determinante des Produkts der rechteckigen Matrizen entspricht. Wir werden diesen Satz im zweiten Paragraph beweisen. Auch im zweiten Paragraph wird ein Satz über die Zerlegungsmöglichkeit des Radoschen Produkts der Matrizen bewiesen. Im dritten Paragraph befinden sich die Sätze über die Permanente des von Rados und Gyires stammenden Produkts der Matrizen.

§ 2.

Betrachten wir zuerst einige Eigenschaften der Permanenten, die weiterhin angewandt werden.

Behauptung 1.

$$\text{per} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{i1} + \mu c_{i1} & \dots & \lambda a_{in} + \mu c_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \lambda \text{per} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} + \mu \text{per} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & \dots & c_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Behauptung 2. *Der Wert einer Permanente verändert sich nicht, wenn zwei Reihen bzw. Spalten vertauscht sind.*

Behauptung 3. *Es gilt ein Entwicklungssatz, ähnlich zum Laplaceschen-Satz für die Determinante. Selbstverständlich, hier befinden sich Unterpermanenten, und bei der Entwicklung gibt es keine Vorzeichensregel.*

Es bezeichnet P_n die Permutationen von n Elementen, C_m^n die Kombinationen der Ordnung n von m Elementen und V_m^{*n} die Variationen mit Wiederholung und V_m^n ohne Wiederholung der Ordnung n von m Elementen.

Der folgende Satz entspricht dem Cauchyschen Multiplikationssatz der rechteckigen Matrizen (vgl. z.B. KOWALEWSKI [5]).

Satz 1. *Es seien $m \geq n$ natürliche Zahlen und bestehe die Matrix A aus n Reihen und m Spalten, die Matrix B aus m Reihen und n Spalten. Sind die Elemente der Matrizen A und B nichtnegativ, so gilt die Ungleichung*

$$(2.1) \quad \text{per}(AB) \geq \sum \text{per}(A_n) \text{per}(B_n)$$

wobei A_n und B_n solche Untermatrizen der Ordnung n sind, deren Elemente einander entsprechenden Indizes haben, die Summierung bezieht sich für die allmöglichen Paaren der Untermatrizen.

BEWEIS. Bilden wir die Permanente des Produkts von A und B

$$(2.2) \quad \text{per}(AB) = \text{per} \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} b_{jk} \right) = \sum_{j_n \in V_m^{*n}} \text{per}[a_{ij_n} b_{j_n k}]$$

Diese Zerlegung der Permanente kann wegen der Behauptung 1. durchgeführt werden. So bekommen wir eine Summe von m^n Glieder. Teilen wir die Summe auf zwei Teile. Gehören zum ersten Teil nur solche Glieder der Summe, wobei $j_n \in V_m^n$ ist. Wir machen weitere Umformulierung nur im ersten Teil. Aus der Behauptung 1. folgt:

$$(2.3) \quad \sum_{j_i \in V_m^n} \text{per}[a_{ij_i} b_{j_i k}] = \sum_{j_i \in V_m^n} a_{1j_1} \dots a_{nj_n} \cdot \text{per}[b_{j_i k}]$$

Weil für jede festgegebene j_1, \dots, j_n die Anzahl der möglichen Reihenfolge $n!$ ist, können die Glieder der Summe in der rechten Seite von (2.3) gruppiert werden, falls wir noch auch die Behauptung 2. gebrauchen. So wird jede Gruppe aus $n!$ Gliedern bestehen, und aus diesen Gruppen kann $\text{per}[b_{j_i, k}]$ ausgehoben werden. So bekommen wir

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \sum_{j_i \in V_m^n} a_{1j_1} \dots a_{nj_n} \cdot \text{per}[b_{j_i k}] &= \sum_{j_i \in C_m^n} \left(\sum_{j_n \in P_n} a_{1j_1} \dots a_{nj_n} \right) \text{per}[b_{j_i k}] = \\ &= \sum_{j_i \in C_m^n} \text{per}[a_{ij_i}] \text{per}[b_{j_i k}] \end{aligned}$$

Die Summe in der Formel (2.2) wurde auf zwei Teile geteilt. Aus dem ersten Teil folgt die Formel (2.4), falls wir den zweiten Teil weglassen, wessen Wert nur grösser-gleich Null sein kann, bekommen wir eine Ungleichung

$$\text{per} \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} b_{jk} \right) \cong \sum_{j_i \in C_m^n} \text{per}[a_{ij_i}] \text{per}[b_{j_i k}],$$

d. h.

$$\text{per}(AB) \cong \sum \text{per}(A_n) \text{per}(B_n)$$

und sie war zu beweisen.

Anmerkung. Ist $n=m$, Satz 1. hat die Form

$$\text{per}(AB) \cong \text{per}(A) \text{per}(B).$$

Das tensorielle Produkt hat die Eigenschaft

$$(A \times B)(C \times D) = AC \times BD.$$

Die Verallgemeinerung des Produkts von Rados erfüllt ähnliche Gleichung, falls wir die tensorielle Produkte mit den Einheitsmatrizen bilden. Darüber lautet genauer in dem folgenden Satz.

Satz 2. Seien die Matrizen N_1, N_2 und N durch (1.3) und (1.4) definiert, wobei es

- a) im Fall $N_1 \quad B_v^{(j)} = E_v$ sei, d.h. $b_{st}^{(j)} = \delta_{st}$
- b) im Fall $N_2 \quad A_\mu^{(i)} = E_\mu$ sei, d.h. $a_{kl}^{(i)} = \delta_{kl}$

dann

$$N_1 \cdot N_2 = N$$

gilt. (δ_{kl} ist das Symbol von Kronecker.)

BEWEIS. Wenn n_{rt} ein beliebiges Element der Matrix N ist, können wir es gemäß den Bildungsregeln (1. 3) und (1. 4) in der Form

$$n_{rt} = a_{ul}^{(k)} \cdot b_{kv}^{(l)}$$

darstellen. Da erfüllen die Indizes k, l, u, v und r, t die folgende Relationen:

$$v \equiv t \pmod{v}$$

$$k \equiv r \pmod{v}$$

$$(2.5) \quad l = 1 + \left\{ \frac{t-1}{v} \right\}$$

$$u = 1 + \left\{ \frac{r-1}{v} \right\}$$

wobei das Symbol $\{x\}$ den ganzen Teil von x bedeutet. Wenn $c_{rs} \in N_1$ und $d_{st} \in N_2$ ist, dann

$$c_{rs} = a_{ij}^{(k)} \delta_{kl} \quad \text{und} \quad d_{st} = b_{pq}^{(v)} \cdot \delta_{uv}$$

Für die entsprechende Indizes gibt ein Relationssystem der Type (2. 5).

Bilden wir ein Element von $N_1 \cdot N_2$

$$(2.6) \quad \sum_s c_{rs} d_{st} = \sum_s a_{ij}^{(k)} \cdot b_{pq}^{(v)} \cdot \delta_{kl} \cdot \delta_{uv}$$

Ein Glied der letzten Summe verschwindet identisch nicht, wenn $k=l$ und dann auch $u=v$ ist. Kann dieser Fall überhaupt vorkommen? Unser Problem ist gleichwertig — wegen (2. 5) — mit der Frage:

Es gibt ein System der Relationen

$$r \equiv s \pmod{v}$$

$$(2.7) \quad \left\{ \frac{t-1}{v} \right\} = \left\{ \frac{s-1}{v} \right\}$$

wobei

$$1 \leq r, t \leq v \cdot \mu$$

gegeben sind, kann es in s ($1 \leq s \leq v \cdot \mu$) gelöst werden? Die Antwort ist positiv; ein und nur ein solches s existiert.

$$s = \left\{ \frac{t-1}{v} \right\} \cdot v + \varepsilon + 1, \quad \text{wobei} \quad \varepsilon < v.$$

Also

$$r \equiv \varepsilon + 1 \pmod{v}$$

so folgt, daß ε im Fall der gegebenen r, t, v immer eindeutig bestimmt ist, d.h. nur ein einziges s erfüllt die Relationen in (2. 7).

Auf der rechten Seite von (2. 6) wird nur ein Glied nicht identisch Null sein. Deswegen, und wegen (2. 5)

$$n_{rt} = \sum_s c_{rs} d_{st}$$

gilt, d.h.

$$N = N_1 \cdot N_2.$$

§ 3.

Mit der Hilfe der im zweiten Paragraph bewiesenen Sätze können wir Sätze über die Permanente der verallgemeinerten tensoriellen Produkte beweisen.

Satz 3. *Wenn die Matrizen in (1. 3) nur nichtnegativ Elemente haben, gilt die folgende Ungleichung*

$$\text{per}(N) \cong \prod_{i=1}^v \text{per}(A_\mu^{(i)}) \prod_{j=1}^\mu \text{per}(B_\nu^{(j)}),$$

wobei die Matrix N durch (1. 4) definiert wurde.

BEWEIS. Zerlegen wir die Matrix N gemäß dem Satze 2, und wenden wir den Satz 1. an

$$\text{per}(N) \cong \text{per}(N_1) \cdot \text{per}(N_2) \quad .$$

Wir möchten jetzt die rechte Seite bestimmen. Die Matrix N_2 ist nicht anders, als die Direktsumme der Matrizen $B_\nu^{(j)}$. Im Sinn der Behauptung 3. ist die Gleichung

$$\text{per}(N_2) = \prod_{j=1}^\mu \text{per}(B_\nu^{(j)})$$

richtig. Es kann immer eine Permutationsmatrix so gefunden werden, daß die Matrix

$$Q = P^T N_1 P$$

schon die Direktsumme der Matrixen $A_\mu^{(i)}$ sei. So gilt.

$$\text{per}(Q) = \prod_{i=1}^v \text{per}(A_\mu^{(i)})$$

Die Permanente der Matrix P und P^T

$$\text{per}(P) = \text{per}(P^T) = 1$$

sind, es bedeutet

$$\text{per}(Q) = \text{per}(N_1)$$

so

$$\text{per}(N) \cong \prod_{i=1}^v \text{per}(A_\mu^{(i)}) \prod_{j=1}^\mu \text{per}(B_\nu^{(j)}),$$

d.h. der Satz wurde bewiesen.

Anmerkung. Der Satz 3. enthält als einen speziellen Fall die Ungleichung in (1. 2); und entspricht dem Determinantensatz von Rados in (1. 5).

Wenn wir das Produkt der Matrizen bilden, was von Gyires ([2]) eingeführt wurde, so können wir über seine Permanente auch einen Satz aussagen.

Satz 4. *Nehmen wir an, daß die Relationen (1. 6)—(1. 10) erfüllt, und die $a_{ij}^{(j)}$ bzw. $b_{gh}^{(k)}$ Elemente nichtnegativ sind, dann ist die Formel*

$$\text{per}(N) \cong \prod_{j=1}^{\nu} \text{per}(A_j) \prod_{k=1}^{\mu} \text{per}(B_k)$$

richtig.

BEWEIS. Zuerst werden wir zwei Type der Matrizen definieren.

$$A_{kj} = \begin{pmatrix} a_{kj}^{(1)} & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vdots \\ \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{kj}^{(\nu_k)} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad k, j = 1, \dots, \mu$$

$$B'_j = \begin{pmatrix} b_{11}^{(j)} & \dots & b_{1\nu_j}^{(j)} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ b_{\nu_1 1}^{(j)} & \dots & b_{\nu_1 \nu_j}^{(j)} \end{pmatrix}$$

wobei die Matrizen A_{kj} ν_k Reihen und ν_1 Spalten, die Matrizen B'_j ν_1 Reihen und ν_j Spalten haben. Dann können wir die Formel

$$N_{kj} = A_{kj} \cdot B'_j$$

gebrauchen, und mit deren Hilfe die Matrix N zerlegen. Es seien

$$N_1 = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1\mu} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ A_{\mu 1} & \dots & A_{\mu\mu} \end{pmatrix}$$

und

$$N_2 = \begin{pmatrix} B'_1 & (0) & \dots & (0) \\ (0) & B'_2 & (0) & \vdots \\ \vdots & \cdot & \cdot & (0) \\ (0) & \dots & (0) & B'_\mu \end{pmatrix}$$

wobei (0) die Nullmatrix ist. Da ist N_1 der Type $n \times \mu \nu_1$ und N_2 der Type $\mu \nu_1 \times n$ wobei $\mu \nu_1 \cong n$ ist.

Es folgt aus der Definitionen der A_{kj} und B'_j , daß die Formel

$$N = N_1 \cdot N_2$$

richtig ist. N_1 und N_2 erfüllen die Annahmen des Satzes 1., so dürfen wir ihn anwenden. Dazu müssen wir die entsprechenden Paaren der Untermatrizen bzw. Unterpermanenten bestimmen.

Es kann einfach eingesehen werden, daß die Unterpermanenten von N_2 dann und nur dann nicht idäntisch Null sind, wenn sie aus jeden B'_j Matrizen eine Untermatrix der Ordnung v_j enthalten. So zusammen

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} v_1 \\ v_\mu \end{pmatrix}$$

Möglichkeiten entstehen. Greifen wir aus N_1 eine Untermatrix A heraus

$$A = \begin{pmatrix} A'_{11} & \cdots & A'_{1\mu} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ A'_{\mu 1} & \cdots & A'_{\mu\mu} \end{pmatrix}$$

wobei

$$A'_{kk} = \begin{pmatrix} a_{kk}^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{kk}^{(v_k)} \end{pmatrix}$$

$$A'_{kj} = \begin{pmatrix} a_{kj}^{(1)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & a_{kj}^{(v_j)} \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ v_j \\ \vdots \\ v_k \end{matrix}, \quad \text{wenn } k < j$$

$$A'_{kj} = \begin{pmatrix} a_{kj}^{(1)} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{kj}^{(v_k)} & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \cdots & v_k & \cdots & v_j \end{pmatrix}, \quad \text{wenn } k > j$$

Über diese Matrix A kann ausgezogen werden (vgl. GYIRES [2]), daß sie die einzige solche Untermatrix von N_1 ist, welche keine aus Nullen bestehenden Reihen oder Spalten hat. So, nach der Vertauschung der Reihen bzw. Spalten ist A die Direktsomme von A_{kj} , d.h.

$$\text{per}(A) = \prod_{j=1}^v \text{per}(A_j)$$

Wir brauchen wegen dem Satz 1. nur der Matrix A entsprechende Matrix B zu bestimmen. Die Permanente von B (wenn die Indizes der Elemente von B den Indizes der Elementen von A entsprechen) ist gleich

$$\text{per}(B) = \prod_{k=1}^{\mu} \text{per}(B_k)$$

d. h.

$$\text{per}(N) \cong \prod_{j=1}^{\nu} \text{per}(A_j) \prod_{k=1}^{\mu} \text{per}(B_k),$$

also unser Satz wurde bewiesen.

Literaturverzeichnis

- [1] G. RADOS, Egy determináns-tétel általánosítása, *Matematikai és Természettudományi Értesítő*, **46** (1929), 724—734.
- [2] B. GYIRES, Ein Determinantensatz, *Acad. Repub. Pop. Romane. Stud. Cerc. Mat.*, **2** (1951), 1—22.
- [3] B. GYIRES, Eine Verallgemeinerung eines Kroneckerschen Determinantensatzes, *Publ. Math. Debrecen*, **4** (1955), 43—48.
- [4] R. A. BRUALDI, Permanent of the direct Product of Matrices, *Pacific J. Math.*, **16** (1966), 471—482.
- [5] G. KOWALEWSKI, Einführung in die Determinantentheorie, *Berlin*, 1942.

(Eingegangen am 21. August 1968.)