Über invertierbare Lösungen der additiven Cauchy-Funktionalgleichung

Herrn Professor O. Varga zum 60. Geburtstag gewidmet

Von I. MAKAI (Debrecen)

Formulierung des Problems

Es seien die reellen Funktionen $\varepsilon(x)$, $\bar{\varepsilon}(x)$ gesucht, die die folgenden Eigenschaften besitzen:

1) $\varepsilon, \bar{\varepsilon}$ sind über dem Körper der reellen Zahlen erklärt,
2) $\varepsilon, \bar{\varepsilon}$ erfüllen die additive Cauchy-Funktionalgleichung

$$\varphi(x+y) = \varphi(x)+\varphi(y) \tag{1}$$

und die Relationen

$$\varepsilon[\bar{\varepsilon}(x)]=x, \ \bar{\varepsilon}[\varepsilon(x)]=x. \tag{2}$$

Die Bedingungen 1), 2) sind natürlich verträglich, z.B. die Funktionen

$$\varepsilon(x) = cx, \quad \bar{\varepsilon}(x) = \frac{1}{c}x \qquad (c \neq 0) \tag{3}$$

haben die Eigenschaften 1), 2).

Es ist bekannt (s. [1], S. 45.), daß alle Lösungen von (1), die stetig in einem Punkt x_0, oder beschränkt über eine endliche Intervall der reellen Zahlen, bzw. majorisierbar (bzw. minorisierbar) durch eine meßbare Funktion auf einer Menge von positivem Masse sind, die Form

$$\varphi(x)=cx \qquad (c \text{ Konstante})$$

haben. Es entsteht die Frage, ob eine dieser letzten Bedingungen schwächer als 1), 2) ist, oder sie äquivalent mit 1), 2) ist. Wir werden uns überzeigen, daß die Situation in der Tat ganz anders ist; die allgemeine Lösung des Problems ist allgemeiner als (3).

Wir werden auch solche Funktionen finden, für welche die Bedingungen

a) $\varphi(x)$ ist nirgendswo stetig,
b) $\varphi[\varphi(x)]=x$,
c) $\varphi(x+y) = \varphi(x)+\varphi(y)$

gleichzeitig erfüllen.

Lösung des Problems

Definition. Eine Lösung $\varphi(x)$ der Gleichung (1) werden wir *regulär* nennen, wenn φ zu einer Hamel-Basis

$$\{b_\alpha\} \quad (\alpha \in \mathfrak{A} \text{ Indexmenge})$$

der reellen Zahlen (vgl. [2], S. 171—172.) wieder eine Hamel-Basis

$$\{\varphi(b_\alpha)\}$$

ordnet.

Bemerkung. Es gibt reguläre Lösung von (1), z.B. $\varphi(x)=x$.

Lemma 1. *Ist* $\varepsilon(x)$ *eine Lösung von* (1), *zu welcher eine* $\bar{\varepsilon}(x)$ *mit Eigenschaften* 1), 2) *existiert, so ist* $\varepsilon(x)$ *eine reguläre Lösung.*

Beweis. Es soll bewiesen werden, daß

$$\{\varepsilon(b_\alpha)\} \qquad (\alpha \in \mathfrak{A})$$

eine Hamel-Basis ist, d.h.

1) es ist jede endliche Teilfolge von $\{\varepsilon(b_\alpha)\}$ linear unabhängig über dem Körper der rationalen Zahlen,

2) es gibt für jede Zahl $x \neq 0$ unter den Elementen $\varepsilon(b_\alpha)$ endlich viele $\varepsilon(b_{\alpha_1}), \ldots, \varepsilon(b_{\alpha_k})$, und zu diesen rationalen Zahlen $r^1, \ldots, r^k$, die sämtlich von Null verschieden sind so, daß

$$x = \sum_{i=1}^{k} r^i \varepsilon(b_{\alpha_i}) \tag{4}$$

ist.

Zu 1) Aus $\sum_{i=1}^{k} R^i\varepsilon(b_{\alpha_i})=0$ folgt die Relation $\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{k} R^i b_{\alpha_i}\right)=0$, also

$$\sum_{i=1}^{k} R^i b_{\alpha_i} = \bar{\varepsilon}\left[\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{k} R^i b_{\alpha_i}\right)\right] = \bar{\varepsilon}(0) = 0.$$

Nach Voraussetzung bildet $\{b_\alpha\}$ eine Hamel-Basis, folglich gilt

$$R^1 = \ldots = R^k = 0,$$

w.z.b.w.

Zu 2) Nach (2) und (1) folgt aus (4)

$$\bar{\varepsilon}(x) = \sum_{i=1}^{k} r^i \bar{\varepsilon}\big(\varepsilon(b_{\alpha_i})\big) = \sum_{i=1}^{k} r^i b_{\alpha_i},$$

die genau die (eindeutige) Zerlegung der Zahl $\bar{\varepsilon}(x)$ bezüglich der Hamel-Basis $\{b_\alpha\}$ ist, daher sind die rationale Zahlen $r^1, \ldots, r^k$ durch (4) eindeutig bestimmt.

Es gilt auch die Umkehrung der Lemma 1:

Lemma 2. *Eine reguläre Lösung* $\varepsilon(x)$ *von* (1) *besitzt genau eine Funktion* $\bar{\varepsilon}(x)$ *so, daß* ε *und* $\bar{\varepsilon}$ *die Forderungen* (1), (2) *befriedigen.*

BEWEIS. *Existenz:*

Nach Voraussetzung ist

$$\{\varepsilon(b_\alpha)\} \qquad (\alpha \in \mathfrak{A}) \tag{5}$$

eine Hamel-Basis. Es ist bekannt (s. [2], S. 173.), daß wir jede der Lösungen von (1) darstellen können, wenn wir die Funktionenwerte $\varphi[\varepsilon(b_\alpha)]$ vorschreiben; im Falle (4) definieren wir die Funktionenwerte $\varphi(x)$ nach

$$\varphi(x) \overset{\text{df}}{=} \sum_{i=1}^{k} r^i \varphi[\varepsilon(b_{\alpha_i})]. \tag{6}$$

Es sei jetzt

$$\varphi[\varepsilon(b_\alpha)] \overset{\text{df}}{=} b_\alpha, \qquad (\alpha \in \mathfrak{A}) \tag{7}$$

dann geht (6) in

$$\varphi(x) \overset{\text{df}}{=} \sum_{i=1}^{k} r^i b_{\alpha_i} \qquad \left(x = \sum_{i=1}^{k} r^i \varepsilon(b_{\alpha_i})\right) \tag{8}$$

über.

Die Funktion $\varphi(x)$ ist naturgemäß eine additive Cauchy-Funktion. Um die Eigenschaften (2) der Funktionen ε, φ zu beweisen, geben wir die Zerlegung von x auch für die Basis $\{b_\alpha\}$ an:

$$x = \sum_{j=1}^{m} \varrho^j b_{\alpha_j}; \tag{9}$$

dann folgen aus (9) bzw. (4) die Gleichheiten

$$\varphi[\varepsilon(x)] = \varphi[\sum \varrho^j \varepsilon(b_{\alpha_j})] = \sum \varrho^j \varphi[\varepsilon(b_{\alpha_j})] = \sum \varrho^j b_{\alpha_j} = x,$$

bzw.

$$\varepsilon[\varphi(x)] = \varepsilon\left[\sum r^i b_{\alpha_i}\right] = \sum r^i \varepsilon(b_{\alpha_i}) = x,$$

w.z.b.w.

Unizität:

Ist $\varepsilon(x)$ eine reguläre Cauchy-Funktion, die zusammen mit $\bar{\varepsilon}$ die Forderungen (1), (2) erfüllt, dann ist $\{\varepsilon(b_\alpha)\}$ eine Hamel-Basis, bzw.

$$\bar{\varepsilon}[\varepsilon(b_\alpha)] = b_\alpha \qquad (\alpha \in \mathfrak{A})$$

$$\bar{\varepsilon}(x) = \sum_{i=1}^{k} r^i b_{\alpha_i} \qquad \left(x = \sum_{i=1}^{k} r^i \varepsilon(b_{\alpha_i})\right)$$

gelten, wo die letzte stimmen mit der Definitionsrelationen (7), (8) der Funktion φ überein. Folgerungsgemäß bekommen wir

$$\varphi(x) = \bar{\varepsilon}(x),$$

w.z.b.w.

Zusammenfassend unsere Ergebnisse bekommen wir den folgenden

Satz 1. *Eine Lösung $\varepsilon(x)$ von (1) ist genau dann regulär, wenn es eine solche Funktion $\bar{\varepsilon}(x)$ gibt, die zusammen mit $\varepsilon(x)$ die Forderungen (1), (2) befriedigt. Die Funktion $\varepsilon(x)$ ist im Falle der Regularität von $\varepsilon(x)$ eindeutig bestimmt.*

Satz 2. *Es gibt nirgendswo stetige reguläre Lösung von (1).*

Beweis. Es sei die Hamel-Basis wohlgeordnet:

$$\{b_\alpha\} = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}. \qquad (b_\alpha \neq 0, \quad \alpha \in \mathfrak{A})$$

Erklären wir $\varphi(x)$ nach

$$(10) \qquad \varphi(b_1) = b_2, \quad \varphi(b_2) = b_1, \quad \varphi(b_\alpha) = b_\alpha \qquad (\alpha \in \mathfrak{A}, \quad \alpha \neq 1, 2),$$

$$(11) \qquad \varphi\left(\sum_{i=1}^{k} r^i b_{\alpha_i}\right) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sum_{i=1}^{k} r^i \varphi(b_{\alpha_i}),$$

so wird $\varphi(x)$ nach (10) eine reguläre Lösung von (1).

Ist $\varphi(x)$ in einem Punkt x_0 stetig, so hat φ die Gestalt

$$\varphi(x) = cx,$$

wo c eine nach (10) von Null verschiedene Konstante ist. Folglich bestehen die Gleichheiten

$$\frac{\varphi(b_1)}{\varphi(b_2)} = \frac{cb_1}{cb_2} = \frac{b_1}{b_2}, \quad \text{bzw.} \quad \frac{\varphi(b_1)}{\varphi(b_2)} = \frac{b_2}{b_1},$$

also ist auch die Relation

$$b_1 = \pm b_2$$

erfüllt, die der linearen Unabhängigkeit von b_1, b_2 über dem Körper der rationalen Zahlen widerspricht.

Die Funktion $\varphi(x)$ soll daher nirgendswo stetig sein.

Satz 3. *Es existiert reelle Funktion $\varphi(x)$, die die folgende Eigenschaften hat:*

a) *$\varphi(x)$ ist nirgendswo stetig,*

b) $\varphi[\varphi(x)] = x$,

c) $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$.

Beweis. Wählen wir die Funktion φ nach (10), (11), so wird sie die Eigenschaften a), c) besitzen. Es folgt aus (11)

$$\varphi[\varphi(b_1)] = \varphi(b_2) = b_1, \quad \varphi[\varphi(b_2)] = \varphi(b_1) = b_2,$$

$$\varphi[\varphi(b_\alpha)] = \varphi(b_\alpha) = b_\alpha \quad (\alpha \in \mathfrak{A}, \quad \alpha \neq 1, 2),$$

bzw., falls $x = \sum_{i=1}^{k} r^i b_{\alpha_i}$ ist,

$$\varphi[\varphi(x)] = \varphi\left[\sum r^i \varphi(b_{\alpha_i})\right] = \sum r^i \varphi[\varphi(b_{\alpha_i})] = \sum r^i b_{\alpha_i} = x,$$

w.z.b.w.

Bemerkung. Wenn wir die Definitionsrelationen (10) nach

$$\varphi(b_i) = b_{i+1}, \quad \varphi(b_n) = b_1, \quad \varphi(b_\alpha) = b_\alpha$$

$$(i = 1, \dots, n, \quad \alpha \in \mathfrak{A}, \quad \alpha \neq 1, \dots, n)$$

vorschreiben, so können wir leicht beweisen, daß die Funktion φ die folgende Eigenschaften hat:

a) $\varphi(x)$ ist nirgendswo stetig,

b) $\varphi^{(n)}(x) = x$, wo $\varphi^{(n)}(x)$ die n-te iterierte Funktion von φ bedeutet,

c) $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$.

Literatur

[1] J. Aczél, Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen, *Berlin*, 1961.

[2] E. Kamke, Mengenlehre, *Berlin*, 1962.

(Eingegangen am 2. September 1968.)