Zur Lösung einer nichtlinearen Integrodifferentialgleichung mit Hadamard-Integralen

Herrn Otto Varga zu seinem 60. Geburtstag gewidmet

Von KLAUS WIENER (Halle)

Die vorliegende Arbeit enthält Lösbarkeitsaussagen über die nichtlineare Integrodifferentialgleichung (1. 9), deren divergentes Integral im Sinne des Hadamardschen endlichen Bestandteils zu verstehen ist (die Definition siehe z.B. in [1], 448), wobei der Schaudersche Fixpunktsatz und die Methode der sukzessiven Approximationen Anwendung finden. Hierbei haben die Werte (1. 7) den Relationen (1. 5) und (1. 6) zu genügen, die wesentlich anders aufgebaut sind als bei der entsprechenden Integrodifferentialgleichung, in der unter dem Hadamard-Integral die k-te Ableitung von $\cot \frac{s-x}{2}$ durch die k-te Ableitung der Funktion $(s-x)^{-1}$ ersetzt wird (vgl. z.B. [4]). Bei der vorliegenden Integrodifferentialgleichung (1. 9) sind ferner die zusätzlichen Bedingungen (1. 8) an die Werte (1. 7) und die Lösungen ψ der nichtlinearen Integralgleichung (1. 12) zu stellen, um Lösbarkeitsaussagen zu erhalten.

Bezeichnungen

(1) $$F_{s_2}^{(j)}(x, s, \varphi(s), \lambda) = \frac{d^j}{ds^j} F(x, s, \varphi(s), \lambda)$$

bei festgehaltenem x, d.h.

(2) $$F_{s_2}^{(j)}(x, s, \varphi(s), \lambda) = \Phi_j(x, s, \varphi(s), \varphi'(s), \dots, \varphi^{(j)}(s), \lambda) = \Phi_j(x, s, u, \dots, u^{(j)}, \lambda),$$

(3) $$\Phi'_{k,\lambda}(x, s, \varphi(s), \dots, \varphi^{(k)}(s), \lambda) = F_{s_2\lambda}^{(k+1)}(x, s, \varphi(s), \lambda) = \frac{\partial}{\partial\lambda} F_{s_2}^{(k)}(x, s, \varphi(s), \lambda),$$

(4) $$\Phi''_{k,\lambda u^{(i)}}(x, s, \varphi(s), \dots, \varphi^{(k)}(s), \lambda) = \frac{\partial}{\partial u^{(i)}} F_{s_2\lambda}^{(k+1)}(x, s, \varphi(s), \lambda).$$

Hilfssatz. *Ist die Funktion $f(x, s)$ in x und s periodisch mit der Periode 2π, beschränkt und ist*

$$|f(x_2, s_2) - f(x_1, s_1)| \leqq r_1 |x_2 - x_1|^{\mu_1} + r_2 |s_2 - s_1|^{\mu}; \qquad \mu_1 > \mu;\ 0 < \mu < 1,$$

so gelten für die periodische Funktion

$$h(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x, s) \cot \frac{s-x}{2}\, ds$$

die Relationen

$$|h(x)| \leqq c_3 r_2, \ |h(x_2) - h(x_1)| \leqq (c_1 r_1 + c_2 r_2)|x_2 - x_1|^\mu,$$

wobei die Konstanten c_j, $j = 1, 2, 3$ *nicht von* r_1 *und* r_2 *abhängen.*

Den Beweis siehe [3], 294—296.

Im folgenden sollen unter periodischen Funktionen immer nur solche mit der Periode 2π verstanden werden.

Satz 1. *Die periodische Funktion* $\varphi(x)$ *sei* k*-mal stetig differenzierbar mit*

$$|\varphi^{(k)}(x)| \leqq N; \quad |\varphi^{(k)}(x_2) - \varphi^{(k)}(x_1)| \leqq L|x_2 - x_1|^\mu;$$
$$-\pi \leqq x_1, x_2 \leqq \pi \quad 0 < \mu < 1; \tag{1.1}$$

μ unabhängig von k. *Die in* x *und* s *periodischen Funktionen* (vgl. (1) bis (3))

$$F_{s_2}^{(i)}(x, s, \varphi(s), \lambda); \quad \frac{\partial}{\partial u^{(i)}} F_{s_2}^{(k)}(x, s, \varphi(s), \lambda); \quad i = 0, 1, \dots, k; \quad F_{s_2 \lambda}^{(k+1)}(x, s, \varphi(s), \lambda)$$

seien stetig, und es sollen die Relationen (vgl. (2))

$$\frac{\partial}{\partial u^{(i)}} \Phi_k(x, s, u, u', \dots, u^{(k)}, \lambda) = 0 \quad \text{für} \quad \lambda = 0; \qquad i = 0, 1, \dots, k, \tag{1.2}$$

$$|\Phi_k(x_2, s_2, u_2, u_2', \dots, u_2^{(k)}, \bar{\lambda}) - \Phi_k(x_1, s_1, u_1, u_1', \dots, u_1^{(k)}, \bar{\lambda})| \leqq$$
$$\leqq a_{k1}|x_2 - x_1|^{\mu_1} + a_{k2}|s_2 - s_1|^\mu + \sum_{j=0}^{k} b_{kj}|u_2^{(j)} - u_1^{(j)}|, \tag{1.3}$$

$$|\Phi'_{k,\lambda}(x_2, s_2, u_2, \dots, u_2^{(k)}, \bar{\lambda}) - \Phi'_{k,\lambda}(x_1, s_1, u_1, \dots, u_1^{(k)}, \bar{\lambda})| \leqq$$
$$\leqq \tilde{a}_{k1}|x_2 - x_1|^{\mu_1} + \tilde{a}_{k2}|s_2 - s_1|^\mu + \sum_{j=0}^{k} \tilde{b}_{kj}|u_2^{(j)} - u_1^{(j)}| \tag{1.4}$$

mit $\mu_1 > \mu$; $0 < \mu < 1$ ($\bar{\lambda}$ *ein fester Wert,* $-\pi \leqq x_i, s_i \leqq \pi$; $i = 1, 2$) *erfüllt sein. Außerdem seien*

$$F_{s_2}^{(j)}(x, \pm\pi, \varphi(\pm\pi), \lambda) \equiv 0; \qquad j = 0, 1, \dots, k-1; \qquad |\lambda| \leqq \lambda^* \tag{1.5}$$

und (vgl. (2))

$$\Phi_k(\pm\pi, \pm\pi, \varphi(\pm\pi), \dots, \varphi^{(k-1)}(\pm\pi), \hat{u}^{(k)}, \lambda) = 0; \quad |\lambda| \leqq \lambda^*, \tag{1.6}$$

$\hat{u}^{(k)}$ *beliebige Zahl, die Werte*

$$\varphi^{(j)}(-\pi) = P_j; \quad \varphi^{(j)}(\pi) = q_j; \qquad j = 0, 1, \dots, k-1 \tag{1.7}$$

haben den Relationen (1. 5) *und* (1. 6) *zu genügen. Unter diesen Voraussetzungen besitzt die Integralgleichung* (1. 12) *für* $|\lambda| \leqq \lambda^*$, *wobei* λ^* *durch* (1. 19) *definiert ist,* *mindestens eine stetige und periodische Lösung $\psi(x)$ mit den Eigenschaften* (1. 13). *Genügt diese Funktion ψ den Relationen* (vgl. (1. 7))

$$(1.8)\qquad q_i = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(\pi-t)^{k-1-i}}{(k-1-i)!}\psi(t)\,dt + \sum_{j=i}^{k-1} \frac{(2\pi)^{j-i}}{(j-i)!} P_j; \qquad i=0, 1, \ldots, k-1,$$

so besitzt die nichtlineare Integrodifferentialgleichung

$$(1.9)\qquad \varphi^{(k)}(x) = \int_{-\pi}^{\pi} F(x, s, \varphi(s), \lambda)\left[\frac{d^k}{ds^k}\cot\frac{s-x}{2}\right] ds \qquad k\in\{1, 2, \ldots, \bar{k}\},$$

deren Integral im Sinne des Hadamardschen endlichen Bestandteils zu verstehen ist, für $|\lambda| \leqq \lambda^*$ mindestens eine periodische Lösung $\varphi(x)$, die k-mal stetig differenzierbar ist und die Relationen (1. 1) *erfüllt.*

Beweis. Um Lösungen von (1. 9) mit den Eigenschaften (1. 1) zu erhalten, werden wegen

$$\frac{d^{2j}}{ds^{2j}}\cot\frac{s-x}{2} = \left(\cos\frac{s-x}{2}\right)\sum_{\nu=0}^{j-1} \frac{a_{2j, 2j+1-2\nu}}{\left(\sin\frac{s-x}{2}\right)^{2j+1-2\nu}}; \qquad j=1, 2, \ldots,$$

$$\frac{d^{2j-1}}{ds^{2j-1}}\cot\frac{s-x}{2}\sum_{\nu=0}^{j-1} \frac{a_{2j-1, 2j-2\nu}}{\left(\sin\frac{s-x}{2}\right)^{2j-2\nu}}; \qquad j=1, 2, \ldots; \quad a_{i,j}=\text{const.}$$

die Voraussetzungen (1. 5) und (1. 6) gestellt (vgl. Bemerkung), so daß man die Gleichung (vgl. (1), (2))

$$\varphi^{(k)}(x) = (-1)^k \int_{-\pi}^{\pi} F_{s_2}^{(k)}(x, s, \varphi(s), \lambda)\cot\frac{s-x}{2}\,ds$$

erhält. Substituiert man hierin

$$(1.10)\qquad \varphi^{(k)}(x) = \psi(x),$$

so folgt wegen

$$(1.11)\qquad \varphi^{(i)}(x) = \int_{-\pi}^{x} \frac{(x-t)^{k-1-i}}{(k-1-i)!}\psi(t)\,dt + \sum_{j=i}^{k-1} \frac{(x+\pi)^{j-i}}{(j-i)!} P_j; \qquad i=0, 1, \ldots, k-1$$

die nichtlineare Integralgleichung (vgl. (2))

$$(1.12)\qquad \begin{aligned} \psi(x) = (-1)^k \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_k\Bigg(x, s, &\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(s-t)^{k-1}}{(k-1)!}\psi(t)\,dt + \\ &+ \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(s+\pi)^j}{j!} P_j, \ldots, \int_{-\pi}^{s} \psi(t)\,dt + P_{k-1}, \psi(s), \lambda\Bigg)\cot\frac{s-x}{2}\,ds. \end{aligned}$$

Die in (1. 12) und (1. 8) auftretenden Werte (1. 7) werden nach Möglichkeit aus (1. 5) und (1. 6) bestimmt, sollte es jedoch unmöglich sein, alle $\varphi^{(j)}(\pm\pi)$ zu erhalten, so seien die restlichen eindeutig so vorgegeben, daß sie diesen Relationen genügen. Die Werte (1. 7) werden daher im folgenden als bekannt angesehen. Sind überzählige Gleichungen vorhanden, so stellen sie Bedingungen an die vorgegebene Funktion F und ihre Ableitungen dar, die im folgenden erfüllt seien.

Es sei C der Raum der auf einer abgeschlossenen Menge G stetigen Funktionen mit der Norm $\|\psi\| = \max\limits_{x \in G} |\psi(x)|$ und dem Abstand $\varrho(\psi_1, \psi_2) = \|\psi_1 - \psi_2\|$ sowie H die abgeschlossene Menge, deren Elemente $\psi(x)$ die Bedingungen

$$|\psi(x)| \leqq N; \ |\psi(x_2) - \psi(x_1)| \leqq L|x_2 - x_1|^{\mu}; \qquad 0 < \mu < 1 \tag{1. 13}$$

erfüllen; offensichtlich ist H eine konvexe Menge.

Wegen (1. 2) hängt die Funktion $\Phi_k\,(x, s, u, u', \ldots, u^{(k)}, 0)$ nicht von $u, u', \ldots, u^{(k)}$ ab und soll daher mit $\Phi_k\,(x, s, 0, \ldots, 0)$ bezeichnet werden. Damit erhält man unter Verwendung von (1. 3), (1. 4), (1. 10), (1. 11), (1. 13) und $0 < \tilde{\lambda} < 1$

$$\begin{aligned} &|\Phi_k(x_2, s_2, u(s_2), u'(s_2), \ldots, u^{(k)}(s_2), \lambda) - \Phi_k(x_1, s_1, u(s_1), u'(s_1), \ldots, u^{(k)}(s_1), \lambda)| = \\ &= |\lambda\{\Phi'_{k,\lambda}(x_2, s_2, u(s_2), \ldots, u^{(k)}(s_2), \tilde{\lambda}) - \Phi'_{k,\lambda}(x_1, s_1, u(s_1), \ldots, u^{(k)}(s_1), \tilde{\lambda}) + \\ &+ \Phi_k(x_2, s_2, 0, \ldots, 0) - \Phi_k(x_1, s_1, 0, \ldots, 0)| \leqq \\ &\leqq (|\lambda|\,\tilde{a}_{k1} + a_{k1})\,|x_2 - x_1|^{\mu_1} + (|\lambda|\,\tilde{a}_{k2} + M)\,|s_2 - s_1|^{\mu} \end{aligned} \tag{1. 14}$$

mit

$$M = a_{k2} + L\tilde{b}_{kk} + \tilde{b}_{k(k-1)} N (2\pi)^{1-\mu} + \beta_k \sum_{i=0}^{k-2} \tilde{b}_{ki}\{N g_i + g_i^*\}, \tag{1. 15}$$

hierbei sind

$$g_i^* = \sum_{j=i+1}^{k-1} \frac{|P_j|\,2^{1-\mu}}{(j-i)!} \sum_{\nu=0}^{j-i-1} \binom{j-i}{\nu} (j-i-\nu)\,\pi^{j-i-\mu} \tag{1. 16}$$

$$g_i = \frac{1}{(k-1-i)!} \sum_{\nu=0}^{k-2-i} \binom{k-1-i}{\nu} \frac{k-1-i-\nu}{\nu+1}\, 2^{2+\nu-\mu} \pi^{k-\mu-i} + \frac{(2\pi)^{k-i-\mu+1}}{(k-i)!};$$

$$i = 0, 1, \ldots, k-2, \tag{1. 17}$$

$$\beta_k = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad k = 2, 3, \ldots \\ 0 & \text{für} \quad k = 1. \end{cases} \tag{1. 18}$$

Aus (1. 12) folgt wegen (1. 14) und

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_k(x, s, u(s), \ldots, u^{(k)}(s), \lambda) \cot\frac{s-x}{2}\, ds =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \{\Phi_k(x, s, u(s), \ldots, u^{(k)}(s), \lambda) - \Phi_k(x, x, u(x), \ldots, u^{(k)}(x), \lambda)\} \cot\frac{s-x}{2}\, ds$$

die Abschätzung

$$|\psi(x)| \leqq (|\lambda| \tilde{a}_{k2} + M) 2^{1+\mu} \pi^{\mu},$$

und unter Verwendung des Hilfssatzes erhält man

$$|\psi(x_2) - \psi(x_1)| \leqq \{c_1(|\lambda| \tilde{a}_{k1} + a_{k1}) + c_2(|\lambda| \tilde{a}_{k2} + M)\} |x_2 - x_1|^{\mu}.$$

Daher sollen (vgl. (1. 13)) die Relationen

$$(|\lambda| \tilde{a}_{k2} + M) 2^{1+\mu} \pi^{\mu} \leqq N,$$

$$c_1(|\lambda| \tilde{a}_{k1} + a_{k1}) + c_2(|\lambda| \tilde{a}_{k2} + M) \leqq L$$

erfüllt sein, und es sei

$$\lambda^* = \min\left\{\frac{2^{-1-\mu}\pi^{-\mu}N - M}{\tilde{a}_{k2}};\ \frac{L - c_1 a_{k1} - c_2 M}{c_1 \tilde{a}_{k1} + c_2 \tilde{a}_{k2}}\right\}, \tag{1. 19}$$

wobei M durch (1. 15) bis (1. 18) definiert ist, c_1 und c_2 ergeben sich aus dem Hilfssatz. Ist daher $|\lambda| \leqq \lambda^*$, so wird durch

$$B(x) = A(\psi) = (-1)^k \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_k(x, s, u(s), \ldots, u^{(k)}(s), \lambda) \cot\frac{s-x}{2}\, ds$$

(vgl. (1. 12)) die Menge H in sich abgebildet. Daß der Operator $A(\psi)$ stetig ist, kann analog zu [3], 298—299 gezeigt werden; die Kompaktheit der Menge der Punkte $B(x)$ folgt aus

$$|B(x)| \leqq N;\ |B(x_2) - B(x_1)| \leqq L|x_2 - x_1|^{\mu}.$$

Damit sind alle Voraussetzungen des Schauderschen Fixpunktsatzes (vgl. [2], 201) erfüllt. Die Bedingungen (1. 8) müssen wegen (1. 11) und (1. 7) gelten.

Bemerkung. Analoge Untersuchungen lassen sich durchführen, wenn man die Voraussetzungen (1. 5) durch andere ersetzt (siehe unten). Die Bedingungen (1. 6) müssen wegen der Forderungen (1. 1) erhalten bleiben, da bei der Berechnung des endlichen Bestandteils des divergenten Integrals in (1. 9) an den Stellen $x = \pm\pi$ Zusatzsummanden auftreten.

Die zu untersuchende Gleichung lautet jetzt (vgl. (1. 9))

$$\varphi^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i F_{s_2}^{(i)}(x, \pi, \varphi(\pi), \lambda) \left[\frac{d^{k-1-i}}{ds^{k-1-i}} \cot\frac{\pi - x}{2}\right] +$$

$$+ \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{i+1} F_{s_2}^{(i)}(x, -\pi, \varphi(-\pi), \lambda) \left[\frac{d^{k-1-i}}{ds^{k-1-i}} \cot\frac{-\pi - x}{2}\right] +$$

$$+ (-1)^k \int_{-\pi}^{\pi} F_{s_2}^{(k)}(x, s, \varphi(s), \lambda) \cot\frac{s-x}{2}\, ds,$$

für die in den Summen auftretenden Funktionen hat man dann geeignete Beschränktheitsbedingungen sowie H-Bedingungen bezüglich der Veränderlichen x mit dem Exponenten μ_1 zu stellen.

Satz 2. *Die Voraussetzungen von Satz* 1 *seien erfüllt, außerdem seien die in* x *und* s *periodischen Funktionen* $\Phi''_{k,\lambda u^{(\nu)}}\,(x, s, u, \dots, u^{(k)}, \lambda)$; $\nu=0, 1, \dots, k$ (vgl. (4)) stetig mit

$$|\Phi''_{k,\lambda u^{(\nu)}}(x, s, u, \dots, u^{(k)}, \lambda)| \leqq A_k, \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} &|\Phi''_{k,\lambda u^{(\nu)}}(x_2, s_2, u_2, \dots, u_2^{(k)}, \tilde{\lambda}) - \Phi''_{k,\lambda u^{(\nu)}}(x_1, s_1, u_1, \dots, u_1^{(k)}, \tilde{\lambda})| \leqq \\ &\leqq d_{k\nu}|x_2-x_1|^{\mu_1} + e_{k\nu}|s_2-s_1|^{\mu} + \sum_{i=0}^{k} f_{k\nu i}|u_2^{(i)} - u_1^{(i)}|. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Dann kann die Integralgleichung (1. 12) *für* $|\lambda| < \lambda^{**}$, *wobei* λ^{**} *durch* (2. 17) *definiert ist, mit der Methode der sukzessiven Approximationen gelöst werden, und die Lösungen besitzen die in Satz* 1 *angegebenen Eigenschaften. Sind die Werte* (1. 7), *die den Bedingungen* (1. 5) *und* (1. 6) *genügen, eindeutig bestimmt, so ist auch die Lösung der Integralgleichung* (1. 12) *eindeutig bestimmt. Genügt diese Funktion* ψ *den Relationen* (1. 8), *so besitzt die nichtlineare Integrodifferentialgleichung* (1. 9) *für* $|\lambda| < \lambda^{**}$ *eine eindeutig bestimmte Lösung mit den in Satz* 1 *angegebenen Eigenschaften.*

Beweis. Nach Wahl einer periodischen Funktion $\psi_0(x)$ mit den Eigenschaften (1. 13) sollen die sukzessiven Approximationen

$$\begin{aligned} \psi_{n+1}(x) = (-1)^k \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_k \Bigg(x, s, \int_{-\pi}^{s} \frac{(s-t)^{k-1}}{(k-1)!}\psi_n(t)\,dt + \sum_{j=0}^{k-1}\frac{(s+\pi)^j}{j!}P_j, \dots,\\ \dots, \int_{-\pi}^{s}\psi_n(t)\,dt + P_{k-1}, \psi_n(s), \lambda\Bigg)\cot\frac{s-x}{2}\,ds; \qquad n=0, 1, \dots \end{aligned} \tag{2.3}$$

betrachtet werden. Wie in Satz 1 wird gezeigt, daß wenn $\psi_j(x)$ die Eigenschaften (1. 13) besitzt, für $|\lambda| \leqq \lambda^*$ auch ψ_{j+1} diese Eigenschaften hat. Es sei

$$\begin{aligned} H_n(t) = \Phi'_{k,\lambda}\big(x_2, s_2, u_{n-1}(s_2) + t\big(u_n(s_2) - u_{n-1}(s_2)\big), \dots,\\ \dots, u_{n-1}^{(k)}(s_2) + t\big(u_n^{(k)}(s_2) - u_{n-1}^{(k)}(s_2)\big), \lambda\big) -\\ -\Phi'_{k,\lambda}\big(x_1, s_1, u_{n-1}(s_1) + t\big(u_n(s_1) - u_{n-1}(s_1)\big), \dots, u_{n-1}^{(k)}(s_1) + t\big(u_n^{(k)}(s_1) - u_{n-1}^{(k)}(s_1)\big), \lambda\big), \end{aligned} \tag{2.4}$$

und es soll zur Abkürzung

$$H_n(t) = \Phi'_{k,\lambda}(\mathrm{II}) - \Phi'_{k,\lambda}(\mathrm{I}) \tag{2.5}$$

geschrieben werden. Nach dem Mittelwertsatz ist

$$H'_n(t^*) = H_n(1) - H_n(0); \qquad 0 < t^* < 1. \tag{2.6}$$

Setzt man

$$\omega_n(x, s, \lambda) = \Phi_k\big(x, s, u_n(s), \dots, u_n^{(k)}(s), \lambda\big) - \Phi_k\big(x, s, u_{n-1}(s), \dots, u_{n-1}^{(k)}(s), \lambda\big), \tag{2.7}$$

so gilt $\omega_n(x_j, s_j, 0) = 0$, da die Funktionen $\Phi_k\big(x, s, u_i(s), \dots, u_i^{(k)}(s), 0\big)$ wegen (1. 2) nicht von $u_i, \dots, u_i^{(k)}$ abhängen. Daher ist

$$\omega_n(x_2, s_2, \lambda) - \omega_n(x_1, s_1, \lambda) = \lambda[\omega'_{n,\lambda}(x_2, s_2, \tilde{\lambda}) - \omega'_{n,\lambda}(x_1, s_1, \tilde{\lambda})]; \qquad 0 < \tilde{\lambda} < \lambda,$$

und wegen (2. 7), (2. 4) und (2. 6) erhält man

$$\omega_n(x_2, s_2, \lambda) - \omega_n(x_1, s_1, \lambda) = \lambda H_n'(t^*); \quad 0 < t^* < 1. \tag{2. 8}$$

Aus (2. 4) folgt (vgl. (2. 5))

$$\begin{aligned} H_n'(t) = {} & \sum_{i=0}^{k} \Phi''_{k,\lambda u^{(i)}}(\mathrm{II})[u_n^{(i)}(s_2) - u_{n-1}^{(i)}(s_2) - u_n^{(i)}(s_1) + u_{n-1}^{(i)}(s_1)] + \\ & + \sum_{i=0}^{k} [\Phi''_{k,\lambda u^{(i)}}(\mathrm{II}) - \Phi''_{k,\lambda u^{(i)}}(\mathrm{I})] \big(u_n^{(i)}(s_1) - u_{n-1}^{(i)}(s_1)\big). \end{aligned} \tag{2. 9}$$

Daher erhält man aus (2. 8) und (2. 9) unter Verwendung von (2. 1), (2. 2), (1. 10), (1. 11) sowie

$$\begin{aligned} & |\psi_n(s) - \psi_{n-1}(s)| \leqq \gamma_n; \quad |\psi_n(s_2) - \psi_{n-1}(s_2) - \psi_n(s_1) + \psi_{n-1}(s_1)| \leqq \\ & \qquad \leqq \gamma_n |s_2 - s_1|^{\mu}; \qquad n = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{2. 10}$$

die Abschätzung

$$|\omega_n(x_2, s_2, \lambda) - \omega_n(x_1, s_1, \lambda)| \leqq |\lambda| \gamma_n \{h_1 |x_2 - x_1|^{\mu_1} + h_2 |s_2 - s_1|^{\mu}\} \tag{2. 11}$$

mit

$$h_1 = \sum_{\nu=0}^{k} d_{k\nu} \frac{(2\pi)^{k-\nu}}{(k-\nu)!}, \tag{2. 12}$$

$$\begin{aligned} h_2 = {} & A_k \left\{\beta_k \sum_{i=0}^{k-2} g_i + (2\pi)^{1-\mu} + 1\right\} + \sum_{\nu=0}^{k} \frac{(2\pi)^{k-\nu}}{(k-\nu)!} \times \\ & \times \left\{e_{k\nu} + \beta_k \sum_{\nu=0}^{k-2} f_{k\nu i}(N g_i + g_i^*) + f_{k\nu(k-1)} N (2\pi)^{1-\mu} + f_{k\nu k} L\right\}; \end{aligned} \tag{2. 13}$$

hierbei sind g_i^*, g_i durch (1. 16), (1. 17) und β_k durch (1. 18) definiert. Aus (2. 3) und (2. 7) folgt

$$\psi_{n+1}(x) - \psi_n(x) = (-1)^k \int_{-\pi}^{\pi} \omega_n(x, s, \lambda) \cot \frac{s-x}{2} \, ds,$$

und hieraus erhält man wegen des Hilfssatzes unter Verwendung von (2. 11) die Relationen

$$|\psi_{n+1}(x) - \psi_n(x)| \leqq 2^{1+\mu} \pi^{\mu} |\lambda| \gamma_n h_2, \tag{2. 14}$$

$$|\psi_{n+1}(x_2) - \psi_n(x_2) - \psi_{n+1}(x_1) + \psi_n(x_1)| \leqq |\lambda| \gamma_n (c_1 h_1 + c_2 h_2) |x_2 - x_1|^{\mu}. \tag{2. 15}$$

Sind daher die Bedingungen

$$|\lambda| h_2 2^{1+\mu} \pi^{\mu} < q < 1; \qquad |\lambda| (c_1 h_1 + c_2 h_2) < q < 1 \tag{2. 16}$$

erfüllt, so konvergiert wegen (2. 10), (2. 14) und (2. 15) die Folge der sukzessiven Approximationen (2. 3). Daß die auf diese Weise konstruierte Funktion $\psi(x) =$

$= \lim_{n\to\infty} \psi_n(x)$ die einzige Lösung der Integralgleichung (1. 12) ist, zeigt man analog wie in [3], 303—305. Unter Verwendung von (2. 16) erhält man

$$\lambda^{**} = \min\left\{\lambda^*; \frac{2^{-1-\mu}\pi^{-\mu}q}{h_2}; \frac{q}{c_1 h_1 + c_2 h_2}\right\}; \qquad q<1 \tag{2. 17}$$

hierbei sind λ^* durch (1. 19), h_1 durch (2. 12), h_2 durch (2. 13) definiert, c_1 und c_2 ergeben sich aus dem Hilfssatz.

Literatur

[1] J. Naas und H. L. Schmid, Mathematisches Wörterbuch, Bd. I. *Berlin* und *Leipzig*, 1961.

[2] W. Pogorzelski, Integral equations and their applications, Vol. I. *Oxford—New York—Paris—Frankfurt—Warszawa*, 1966.

[3] A. I. Guseinov,: Existenz- und Eindeutigkeitssätze für nichtlineare singuläre Integralgleichungen [Russ.]. *Matem. Sbornik N. S.* **20** (1947), 293—309.

[4] K. Wiener,: Über nichtlineare Integrodifferentialgleichungen mit Hadamard-Integralen. *Math. Z.* **106** (1968), 123—138.

(Eingegangen am 12. September 1968.)