Das verallgemeinerte freie Produkt in primitiven Klassen universeller Algebren I[1])

RENATE LANCKAU

Herrn Professor O. Varga zum 60. Geburtstag gewidmet

I. Einleitung und Vorbemerkungen

Die vorliegende Arbeit ist ein Beitrag zu der Theorie des verallgemeinerten freien Produktes universeller Algebren, die für gewisse spezielle Klassen algebraischer Strukturen, verstreut in der Literatur über viele Arbeiten, mehr oder weniger ausführlich dargestellt ist.

So wurde das verallgemeinerte freie Produkt mit mehr als einer amalgamierten Unterstruktur in der primitiven Klasse der Loops von G. BATES in [2], in der primitiven Klasse der Gruppen von B. H. NEUMANN und H. NEUMANN neben anderen Arbeiten auch in [13], [14], [15] und [16] studiert, und es wurde mit mehr oder weniger speziellen Amalgamen ferner in der Klasse der nichtassoziativen (linearen) Algebren von Z. E. DIDIDSE in [5], in der Klasse der assoziativen Ringe von P. M. COHN in [3], in der Klasse der Verbände von B. JÓNSSON in [9], in der Klasse der Booleschen Algebren auch von DWINGER und YAQUB in [6] und in der Klasse der Halbgruppen von J. M. HOWIE in [8] untersucht.

Es lag nahe, das verallgemeinerte freie Produkt für beliebige primitive Klassen zu betrachten, um möglichst allgemeine bzw. typische Aussagen bezüglich seiner Eigenschaften und auch seiner Existenz zu erhalten. Daß allerdings bei dieser allgemeineren Betrachtungsweise vor allem hinsichtlich der Existenzuntersuchungen größere Schwierigkeiten auftreten werden, ist von vornherein gewiß. Die Beschränkung auf primitive Klassen scheint vernünftig zu sein, will man noch Existenzaussagen für das verallgemeinerte freie Produkt erwarten.

Die hier dargelegten Untersuchungen beziehen sich auf beliebige primitive Klassen universeller Algebren, d.h., es werden Amalgame eine primitiven Klasse und deren jeweilige verallgemeinerten freien Produkte in dieser primitiven Klasse betrachtet. Auf diese Weise läßt sich eine einheitliche Darstellung der Theorie des verallgemeinerten freien Produktes in primitiven Klassen angeben, und es gelingt, für gewisse primitive Klassen aus der allgemeinen Theorie neue Aussagen zu gewinnen. In Abschnitt II. wird das verallgemeinerte freie Produkt definiert.

[1]) Erster Teil der gekürzten Fassung der gleichnamigen, von der Martin-Luther-Universität Halle—Wittenberg angenommenen Dissertation der Verfasserin Halle 1968.

Es werden zunächst notwendige Bedingungen für die Existenz — analog zur Gruppentheorie — angegeben. Die Definition erfolgt dann auf zwei verschiedene Weisen, beide sind in gewissem Sinne konstruktiv; die Äquivalenz der beiden Definitionen wird nachgewiesen. Existenzuntersuchungen werden dann in Abschnitt III. vorgenommen. Es wird untersucht, inwieweit man Existenzaussagen über das verallgemeinerte freie Produkt in einer primitiven Klasse $\mathfrak{K}$ auf $\mathfrak{K}$ umfassende bzw. auf in $\mathfrak{K}$ enthaltene primitive Klassen übertragen kann, und es wird gezeigt, daß das verallgemeinerte freie Produkt im Durchschnitt zweier primitiver Klassen existiert, wenn es in jeder der beiden Klassen vorhanden ist. Bei der Aufstellung notwendiger bzw. hinreichender Bedingungen für die Existenz des verallgemeinerten freien Produktes werden die Untersuchungen dann allerdings auf spezielle Amalgame bzw. auf spezielle primitive Klassen beschränkt. Amalgame mit nur einer amalgamierten Unterstruktur werden in Abschnitt IV. im zweiten Teil dieser Arbeit behandelt. Dort werden auch solche primitiven Klassen betrachtet, in denen auf Grund der vorangegangenen Untersuchungen allgemeine Aussagen über die Existenz des verallgemeinerten freien Produktes möglich sind. Insbesondere wird gezeigt, daß die primitive Klasse der n-Quasigruppen und die primitive Klasse der Multioperatorloops zu jedem Amalgam auch dessen verallgemeinertes freies Produkt besitzen und daß die primitive Klasse der Multioperatorgruppen die Amalgamationseigenschaft hat. Abschließend werden zwei solche primitive Klassen von Multioperatorgruppen betrachtet, bei denen die Existenzuntersuchungen auf die entsprechenden Untersuchungen in der primitiven Klasse der Gruppen zurückgeführt werden können.

Wir wollen nunmehr einige wichtige Begriffe und ihre hier verwendeten Bezeichnungen aus der Theorie der universellen Algebra angeben. (Man vergleiche dazu auch [4].)

Eine Ω-Algebra A werden wir einfach Algebra nennen und für sie die gleiche Bezeichnung wählen wie für ihren Träger. Wir werden die einem n-ären Operator $\omega \in \Omega_n \subseteqq \Omega$ zugeordnete n-äre Operation selbst mit ω bezeichnen und das Ergebnis der Anwendung der n-ären Operation auf ein Elementesystem $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ mit $a_1 a_2 \ldots a_n \omega$ oder mit $a_i \omega$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ angeben (mitunter auch ω-Produkt nennen). Da eine primitive Klasse $\mathfrak{K}$ von Algebren (auch Mannigfaltigkeit von Algebren; bzw. in der englischen Literatur „variety" genannt) durch Angabe des Operatorenbereiches Ω und der Menge der identischen Relationen J eindeutig festgelegt ist, führen wir die Bezeichnung

$$\mathfrak{K} = (\Omega, J)$$

ein. Soll angedeutet werden, daß die Algebra A zu der primitiven Klasse $\mathfrak{K}$ gehört, so werden wir von der $\mathfrak{K}$-Algebra A sprechen. Ferner sei daran erinnert, daß man eine $\mathfrak{K}$-Algebra A durch eine Präsentation (in der englischen Literatur „presentation") angeben kann, in der Form

$$A = \mathfrak{K}(E|R), \tag{1}$$

wobei E eine erzeugende Menge und R eine zugehörige Menge von Relationen ist. (Die identischen Relationen von $\mathfrak{K}$ treten dabei in R nicht auf.) Die identische Abbildung einer Algebra A auf sich werden wir mit 1_A bezeichnen, das Symbol $\varphi|A$ bedeute die Einschränkung der Abbildung φ auf A; Monomorphismen werden wir in Diagrammen mit $\rightarrowtail$, Epimorphismen mit $\twoheadrightarrow$, Isomorphismen mit $\rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow$ bezeichnen.

Für das Folgende ist weiterhin der Begriff der $\mathfrak{K}$-Hülle (man vergleiche dazu [1]) in einer primitiven Klasse $\mathfrak{K}$ von Algebren von Bedeutung:

Eine $\mathfrak{K}$-Algebra H heißt *$\mathfrak{K}$-Hülle einer Ω-partiellen Algebra* H_0, wenn es einen Homomorphismus ε von H_0 in H gibt, so daß die $\mathfrak{K}$-Algebra H durch $H_0\varepsilon$ erzeugt wird (in Zeichen $H=\langle H_0\varepsilon\rangle$), und jeder beliebige Homomorphismus $\varphi: H_0\to A$, $A\in\mathfrak{K}$, sich zu einem Homomorphismus φ' von H in A fortsetzen läßt, derart, daß $\varepsilon\varphi'|H_0=\varphi$ ist.

Ist insbesondere der kanonische Homomorphismus ε ein Monomorphismus von H_0 in H, so soll H eine exakte $\mathfrak{K}$-Hülle heißen und dieser Sachverhalt mit

$$H = (H_0)_{\mathfrak{K}}$$

bezeichnet werden.

Es ist bekannt, daß es in einer beliebigen primitiven Klasse $\mathfrak{K}$ von Ω-Algebren zu jeder Ω-partiellen Algebra H_0 stets eine $\mathfrak{K}$-Hülle gibt. (Man vergleiche [1].) Unmittelbar klar ist andererseits, daß nicht zu jeder Ω-partiellen Algebra H_0 eine exakte $\mathfrak{K}$-Hülle, $\mathfrak{K}=(\Omega, J)$, existieren muß. Die Existenz wird sowohl von $\mathfrak{K}$ als auch von H_0 abhängen. Existiert aber zu einer vorgegebenen Ω-partiellen Algebra eine exakte $\mathfrak{K}$-Hülle, so ist diese bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Enthält der Operatorenbereich Ω der primitiven Klasse $\mathfrak{K}=(\Omega, J)$ einen 0-ären Operator und ist das dadurch in jeder $\mathfrak{K}$-Algebra ausgezeichnete Element 0 — wir können es ohne Beschränkung der Allgemeinheit in jeder Algebra von $\mathfrak{K}$ gleich bezeichnen — eine Einelementunteralgebra, so sagen wir, $\mathfrak{K}$ sei eine primitive Klasse mit 0. Es ist zu beachten, daß in einem solchen Falle Ω keine weiteren 0-ären Operatoren enthalten kann und in J die identischen Relationen $\{00\ldots 0\,\omega=0$ für alle $\omega\in\Omega\}$ auftreten. Diese primitiven Klassen mit 0 spielen nicht nur in der Theorie der freien Produkte universeller Algebren eine besondere Rolle ([1], [4], [17]), sondern sie erweisen sich auch beim Studium des verallgemeinerten freien Produktes als besonders geeignete Klassen.

Abschließend soll noch auf ein Ergebnis von Baranovič hingewiesen werden, auf das wir später zurückgreifen wollen. Baranovič stellte in [1] Betrachtungen im Durchschnitt zweier primitiver Klassen mit 0

$$\mathfrak{K}_1=(\Omega^{(1)}, J_1) \quad \text{und} \quad \mathfrak{K}_2=(\Omega^{(2)}, J)$$

an, wobei sie voraussetzte, daß $\Omega^{(1)}\cap\Omega^{(2)}=0$ (0 als 0-ärer Operator aufgefaßt) ist und $\{00\ldots 0\,\omega=0$ für alle $\omega\in\Omega_n^{(i)}\subseteq\Omega^{(i)}\}\subseteq J_i$ für $i=1,2$ gilt. Die primitive Klasse $\mathfrak{K}=(\Omega^{(1)}\cup\Omega^{(2)}, J_1\cup J_2)$ ist dann der Durchschnitt von $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$, und Baranovič bewies mit dem Lemma von § 3 in [1] den folgenden Satz.

Satz 1. 1: *Existiert zu einer $(\Omega^{(1)}\cup\Omega^{(2)})$-partiellen Algebra $\overline{B}_0$ sowohl die exakte $\mathfrak{K}_1$-Hülle als auch die exakte $\mathfrak{K}_2$-Hülle, so existiert zu $\overline{B}_0$ auch die exakte $\mathfrak{K}$-Hülle.*

II. Definitionen und Eigenschaften des verallgemeinerten freien Produktes eines Amalgams universeller Algebren

Im folgenden sollen Algebren einer vorgegebenen primitiven Klasse $\mathfrak{K} = (\Omega, J)$ betrachtet werden.

Aus der Theorie der universellen Algebren sind verschiedene Möglichkeiten bekannt, aus einer vorgegebenen Familie von Algebren einer primitiven Klasse $\mathfrak{K}$ eine neue Algebra von $\mathfrak{K}$ so zu konstruieren, daß diese dann die Eigenschaft hat, freie $\mathfrak{K}$-Algebra ihrer Art zu sein: die freie Komposition, das freie Produkt (oder die freie Summe), das direkte Produkt (oder die direkte Summe) von Algebren. (Man vergleiche dazu auch [4].) Es soll nun eine weitere „Konstruktion" in dieser Art angegeben werden, nämlich die Bildung des verallgemeinerten freien Produktes.

§ 1. Notwendige Bedingungen; Amalgam von $\mathfrak{K}$-Algebren

Wir wollen zunächst die Frage klären unter welchen (notwendigen) Bedingungen man eine $\mathfrak{K}$-Algebra A aus einer gegebenen Familie von $\mathfrak{K}$-Algebren $\{A_i\}_{i\in I}$ mit vorgegebenen Unteralgebren $\{U_{ij}\}$, $(i,j)\in I\times I$, (die U_{ij} mit $j\in I$ seien die Unteralgebren von A_i, insbesondere sei $U_{ii} \overset{\text{def}}{=} A_i$), so konstruieren kann, daß

(2) es für alle $i\in I$ Monomorphismen η_i von A_i in A gibt

und

bei diesen Monomorphismen die Durchschnittsbeziehungen

$$A_i\eta_i \cap A_j\eta_j = U_{ij}\eta_i = U_{ji}\eta_j, \qquad (i,j)\in I\times I \tag{3}$$

in A erfüllt sind.

Analog zu den entsprechenden Überlegungen in der Theorie des verallgemeinerten freien Produktes für Gruppen kann man auch hier sofort gewisse notwendige Bedingungen, die an die $\{A_i\}_{i\in I}$ und die $\{U_{ij}\}$, $(i,j)\in I\times I$, zu stellen sind, formulieren. Der Beweis des folgenden Hilfssatzes, der für den Fall der Gruppen von H. Neumann ([15]) angegeben wurde, ist analog zu führen.

Hilfssatz 2. 1: *Die Familie $\{A_i\}_{i\in I}$ von $\mathfrak{K}$-Algebren mit den Unteralgebren $\{U_{ij}\}$ und der Familie der Abbildungen $\{\varphi_{ij}\}$, $(i,j)\in I\times I$, erfülle folgende Voraussetzungen:*

(i) *φ_{ij} sei ein Isomorphismus von U_{ij} auf U_{ji},*
(ii) *φ_{ij} sei zu φ_{ji} invers,*
(iii) *$U_{ij}\cap U_{ik}$ werde durch φ_{ij} isomorph auf $U_{ji}\cap U_{jk}$ abgebildet,*
(iv) *die Abbildung $\varphi_{ij}\varphi_{jk}$ stimme auf $U_{ij}\cap U_{ik}$ mit φ_{ik} überein.*

Ist dann Γ eine i und j enthaltende Teilmenge der Indexmenge I, so wird der Durchschnitt

$$D_i = \bigcap_{k\in\Gamma} U_{ik}$$

durch φ_{ij} isomorph auf

$$D_j = \bigcap_{k\in\Gamma} U_{jk}$$

abgebildet, und die Abbildungen $\varphi_{ij}\varphi_{jk}\dots\varphi_{xy}$ und $\varphi_{il}\varphi_{lm}\dots\varphi_{zy}$ für beliebige aber feste Indizes i bzw. y stimmen für die Elemente, für die sie beide definiert sind, überein.

Wir können daher notwendige Bedingungen für das vorliegende Problem formulieren.

Satz 2. 2: *Um eine Familie von $\mathfrak{K}$-Algebren $\{A_i\}_{i\in I}$ mit den Unteralgebren $\{U_{ij}\}_{(i,j)\in I\times I}$ in eine $\mathfrak{K}$-Algebra A so einbetten zu können, daß der Durchschnitt der Bilder von A_i und A_j mit dem Bild von U_{ij} bzw. dem von U_{ji} übereinstimmt, ist notwendig, daß Isomorphismen φ_{ij} von U_{ij} auf U_{ji} existieren derart, daß für alle $i, j\in I$ gilt:*

(i) *Es ist* $\varphi_{ij}\varphi_{ji}=1_{U_{ij}}$.
(ii) φ_{ij} *bildet* $U_{ij}\cap U_{ik}$ *isomorph auf* $U_{ji}\cap U_{jk}$ *ab.*
(iii) *Auf* $U_{ij}\cap U_{ik}$ *ist* $\varphi_{ij}\varphi_{jk}=\varphi_{ik}$.

Analog zu den Bezeichnungen in der Gruppentheorie werden wir eine Familie von Unteralgebren $\{U_{ij}\}_{(i,j)\in I\times I}$, die bezüglich einer Familie von Isomorphismen $\{\varphi_{ij}\}_{(i,j)\in I\times I}$ den Bedingungen des Satzes 2. 2 genügt, eine *Familie von amalgamierten Unteralgebren* nennen. Entsprechend definieren wir: Eine Familie von $\mathfrak{K}$-Algebren $\{A_i\}_{i\in I}$ mit amalgamierten Unteralgebren $\{U_{ij}\}_{(i,j)\in I\times I}$ heißt ein *Amalgam von $\mathfrak{K}$-Algebren* oder ein *$\mathfrak{K}$-Amalgam.*

Gibt es zu einem Amalgam $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{K}$-Algebren

$$\mathfrak{A}:\{A_i\}_{i\in I}, \{U_{ij}\}, \{\varphi_{ij}\}, \qquad (i,j)\in I\times I$$

eine $\mathfrak{K}$-Algebra A derart, daß Monomorphismen η_i von A_i für jedes $i\in I$ in A existieren, bei denen die Durchschnittsbeziehungen (3) erfüllt sind und dabei $(\eta_i|U_{ij})\,(\eta_j|U_{ji})^{-1}= =\varphi_{ij}$, $(i,j)\in I\times I$, ist, so wollen wir sagen: *Die Algebra A bettet das Amalgam $\mathfrak{A}$ ein, die η_i sind die einbettenden Monomorphismen.*

§ 2. Definition mit Hilfe von Präsentationen

Gegeben sei das Amalgam $\mathfrak{A}$ der $\mathfrak{K}$-Algebren

$$\mathfrak{A}:\{A_i\}_{i\in I}, \{U_{ij}\}, \{\varphi_{ij}\}, \qquad (i,j)\in I\times I$$

mit $A_i=\mathfrak{K}(E_i|R_i)$ und $U_{ij}=\mathfrak{K}(E_{ij}|R_{ij})$, wobei $E_{ij}\subseteq A_i$ gilt und R_{ij} geeignete Relationen sind, die sich aus denen von R_i herleiten lassen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können die E_i $(i\in I)$ als disjunkt angenommen werden, und da U_{ij} vermöge φ_{ij} isomorph zu U_{ji} ist, kann man die E_{ij} bzw. E_{ji} sogar so wählen, daß

$$E_{ji} = \{u_{ji\nu} \overset{\text{def}}{=} u_{ij\nu}\varphi_{ij} \;/\; u_{ij\nu}\in E_{ij}\}$$

ist, wobei $u_{ij\nu}$ alle Elemente von E_{ij} durchläuft, wenn ν eine geeignete Indexmenge Γ_{ij} durchläuft.

Dann betrachten wir die folgende $\mathfrak{K}$-Algebra

$$P = \mathfrak{K}\Big(\bigcup_{i\in I} E_i \Big| \bigcup_{i\in I} R_i,\ \{u_{ij\nu} = u_{ji\nu};\ \nu\in\Gamma_{ij}\}_{(i,j)\in I\times I}\Big).$$

P ist durch diese Präsentation als $\mathfrak{K}$-Algebra bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ([4]). Diese $\mathfrak{K}$-Algebra besitzt nun folgende Eigenschaften:

Satz 2. 3: *Gibt es eine $\mathfrak{R}$-Algebra B, die das Amalgam von $\mathfrak{R}$-Algebren*

$$\mathfrak{A}:\{A_i\}_{i\in I}, \{U_{ij}\}, \{\varphi_{ij}\}, \qquad (i,j)\in I\times I$$

einbettet — δ_i seien die einbettenden Monomorphismen —, so bettet auch die oben angegebene $\mathfrak{R}$-Algebra P das Amalgam $\mathfrak{A}$ ein — η_i seien die einbettenden Monomorphismen —, und es existiert ein Homomorphismus φ von P in B derart, daß $\eta_i\varphi=\delta_i$ für alle $i\in I$ ist und dabei $(A_i\eta_i \cap A_j\eta_j)\varphi = A_i\delta_i \cap A_j\delta_j$ für alle $i, j\in I$ gilt.

Wir werden also zeigen, daß die Diagramme

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, tail, "\eta_i"] \arrow[d, tail, "\delta_i"'] & P \arrow[dl, "\varphi"] \\ B & \end{tikzcd}$$

für alle $i\in I$ kommutativ sind und die genannten Durchschnittsbedingungen erfüllt sind. Im Prinzip verläuft der Beweis dieses Satzes so wie der des entsprechenden Satzes in der Gruppentheorie ([13]).

Beweis. Zunächst erklären wir Abbildungen η_i von A_i in P für alle $i\in I$, dabei bieten sich bei der speziellen Wahl des Erzeugendensystems von P die identischen Abbildungen an: für $e_i\in E_i$ sei $e_i\eta_i=e_i\in P$. Diese Abbildungen $\{\eta_i\}_{i\in I}$ lassen sich trivialer Weise zu Homomorphismen von A_i $(i\in I)$ in die $\mathfrak{R}$-Algebra P fortsetzen — nach dem Satz von Dyck ([4]) —, sie sollen wieder mit η_i bezeichnet werden.

Wir definieren ferner eine Abbildung φ von $\bigcup_{i\in I} E_i \subseteqq P$ in B durch die Festsetzung: $e_i\varphi=e_i\delta_i$ für alle $i\in I$. φ denke man sich auf natürliche Weise auf die Elemente von P fortgesetzt. Dann kann man ziemlich einfach zeigen, die Voraussetzung, daß B das Amalgam $\mathfrak{A}$ mit den Monomorphismen $\{\delta_i\}$ einbettet, benützend, daß jede der definierenden Relationen von P bei φ in eine in B gültige Relation überführt wird. Daher kann man wieder nach dem Satz von Dyck schließen, daß φ ein Homomorphismus von P in B ist. Beschränkt man φ auf $A_i\eta_i$ für ein beliebiges aber festgehaltenes $i\in I$, so gilt nach Definition von φ

$$\eta_i\varphi = \delta_i,$$

woraus sofort folgt, daß η_i ein Monomorphismus von A_i in P und φ ein Monomorphismus von $A_i\eta_i$ in B ist. Daß dabei

$$(\eta_i|U_{ij})\,(\eta_j|U_{ji})^{-1} = \varphi_{ij}$$

gilt, folgt unmittelbar aus der Konstruktion von P.

Es bleibt nun noch zu zeigen, daß die Durchschnittsbedingungen (3) in P erfüllt sind. Auf Grund der identifizierenden Relationen gilt

$$U_{ij}\eta_i = U_{ji}\eta_j \subseteqq A_i\eta_i \cap A_j\eta_j.$$

Sei $u\in A_i\eta_i\cap A_j\eta_j$, so ist

$$u\varphi \in A_i\delta_i \cap A_j\delta_j = U_{ij}\delta_i = U_{ji}\delta_j,$$

und daraus folgt, daß $u\varphi = u'\delta_i = (u'\eta_i)\varphi$ für ein $u' \in U_{ij}$ ist. Da $\varphi | A_i\eta_i$ ein Monomorphismus ist, gilt also $u = u'\eta_i$, d.h., es ist

$$u \in U_{ij}\eta_i = U_{ji}\eta_j,$$

womit (3) gilt. Daß schließlich die im Satz genannte Beziehung

$$(A_i\eta_i \cap A_j\eta_j)\varphi = A_i\delta_i \cap A_j\delta_j$$

gilt, ist offensichtlich.

Mit Hilfe dieses Satzes 2. 3 kann man nun in der üblichen Weise zeigen, daß, falls es eine $\mathfrak{K}$-Algebra gibt, die das Amalgam $\mathfrak{A}$ einbettet, die $\mathfrak{K}$-Algebra P unabhängig von der Wahl der Präsentationen der A_i, $i \in I$, ist, P also bis auf Isomorphie durch ein vorgegebenes Amalgam eindeutig bestimmt ist. Wir können daher definieren:

Definition: $\mathfrak{A}$: $\{A_i = \mathfrak{K}(E_i | R_i)\}_{i \in I}$, $\{U_{ij}\}$, $\{\varphi_{ij}\}$, $(i, j) \in I \times I$ sei ein Amalgam der primitiven Klasse $\mathfrak{K}$. Bettet die $\mathfrak{K}$-Algebra

$$P = \mathfrak{K}\Big(\bigcup_{i \in I} E_i \Big| \bigcup_{i \in I} R_i, \{u_{ij\nu} = u_{ij\nu}\varphi_{ij}; \nu \in \Gamma_{ij}\}_{(i,j) \in I \times I}\Big)$$

dieses Amalgam ein, so heiße sie das *verallgemeinerte freie Produkt von* $\mathfrak{A}$ *in* $\mathfrak{K}$.

Daß nicht zu jedem Amalgam von $\mathfrak{K}$-Algebren ein verallgemeinertes freies Produkt zu existieren braucht, ist schon von der primitiven Klasse der Gruppen her bekannt ([13], [15]). Zwar kann man die Algebra P durch ein vorgegebenes Amalgam stets bilden, das Problem ist aber zu zeigen, daß dieses P das Amalgam auch einbettet. Allgemeine Aussagen hinsichtlich der Existenz des verallgemeinerten freien Produktes dürfte man bei so allgemeiner Betrachtungsweise (beliebige primitive Klasse, beliebiges Amalgam) kaum erwarten können. Das verallgemeinerte freie Produkt eines Amalgams kann man andererseits auch mit Hilfe des Hüllenbegriffes „konstruieren", was sich hinsichtlich der Existenzuntersuchungen mitunter als günstig erweisen wird.

§ 3. Definition mit Hilfe der exakten $\mathfrak{K}$-Hülle

Vorgegeben sei das Amalgam von $\mathfrak{K}$-Algebren

$$\mathfrak{A}: \{A_i\}_{i \in I}, \{U_{ij}\}, \{\varphi_{ij}\}, \qquad (i, j) \in I \times I,$$

und ohne Beschränkung der Allgemeinheit wollen wir annehmen, daß die $\mathfrak{K}$-Algebren A_i, $i \in I$, elementefremd seien. Wir bilden die mengentheoretische Vereinigung dieser $\mathfrak{K}$-Algebren

$$B_0 = \bigcup_{i \in I} A_i$$

und werden auf dieser Menge ein Äquivalenzrelation einführen: Für $a, b \in B_0$ gelte $a \sim b$ dann und nur dann, wenn ein φ_{ij} aus $\{\varphi_{ij}\}_{(i,j) \in I \times I}$ existiert derart, daß $a\varphi_{ij} = b$ ist.

Man bemerkt sofort, daß danach aus $a \sim b$ und $a, b \in A_i \subseteq B_0$ die Gleichheit $a = b$ folgt und daß aus $a \sim b$ mit $a \in A_i$, $b \in A_j$ $(i \neq j)$ geschlossen werden kann, daß $a \in U_{ij}$ und $b \in U_{ji}$ ist.

Diese binäre Relation ist offenbar reflexiv und symmetrisch, sie ist auch transitiv, berücksichtigt man, daß mit $\mathfrak{A}$ ein Amalgam vorliegt, Hilfssatz 2. 1 also gilt. $\bar{B}_0$ sei die durch diese Äquivalenzrelation auf B_0 bestimmte Quotientenmenge. Mit $\bar{a} \in \bar{B}_0$ werden wir die Klasse von B_0 bezeichnen, in der $a \in B_0$ liegt. Auf $\bar{B}_0$ werden die Operatoren $\omega \in \Omega_n \subseteqq \Omega$ $(n \geqq 1)$ jetzt nur für solche Tupel $\bar{a}_k \in \bar{B}_0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ erklärt, in denen jedes $\bar{a}_k$ mindestens ein Element a_k aus ein und demselben A_i enthält, und zwar sei

$$\bar{a}_1\, \bar{a}_2 \ldots \bar{a}_n \omega \stackrel{\text{def}}{=} \overline{a_1\, a_2 \ldots a_n \omega}$$

mit $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A_i$ und $a_1 a_2 \ldots a_n \omega \in A_i$. Daß es sich dabei tatsächlich um eine n-äre Operation handelt, d.h. daß diese Definition eindeutig ist, unabhängig von der Wahl der Vertreter der Klassen, läßt sich schnell nachprüfen. Die 0-ären Operatoren können auch auf $\bar{B}_0$ definiert werden. Sei $\omega_0 \in \Omega_0$, so entspricht diesem 0-ären Operator ein Element in jedem A_i $(i \in I)$, und dieses liegt in jedem U_{ij} $(j \in I)$. In B_0 bilden diese dem 0-ären Operator ω_0 entsprechenden Elemente daher eine Klasse, und dieses Element von $\bar{B}_0$ werde dem 0-ären Operator ω_0 zugeordnet.

Mit dieser Ω-partiellen Struktur ist die Menge $\bar{B}_0$ eine Ω-partielle Algebra. Die eineindeutigen Abbildungen von A_i in $\bar{B}_0$

$$\delta_i : a_i \to \bar{a}_i \quad \text{für} \quad a_i \in A_i \quad (i \in I)$$

sind auf Grund dieser Ω-partiellen Struktur sogar Monomorphismen von A_i in $\bar{B}_0$ für jedes $i \in I$. Daß dabei $(\delta_i | U_{ij})(\delta_j | U_{ji})^{-1} = \varphi_{ij}$ gilt, folgt aus der Definition der $\{\delta_i\}_{i \in I}$ und der in B_0 erklärten Äquivalenzrelation. Weiter ist

$$A_i \delta_i \cap A_j \delta_j = U_{ij} \delta_i = U_{ji} \delta_j .$$

Gibt es nun zu dieser Ω-partiellen Algebra $\bar{B}_0$ eine exakte $\mathfrak{K}$-Hülle $B = (\bar{B}_0)_{\mathfrak{K}}$, so ist B eine $\mathfrak{K}$-Algebra, die das Amalgam $\mathfrak{A}$ einbettet. Der Einfachheit halber werden wir den kanonischen Monomorphismus von $\bar{B}_0$ in B — falls es ein solches B gibt — mit $1_{\bar{B}_0}$ angeben. Wir können jetzt den folgenden Satz beweisen, der die Isomorphie der beiden aus einem vorgegebenen Amalgam $\mathfrak{A}$ „konstruierten" $\mathfrak{K}$-Algebren $B = (\bar{B}_0)_{\mathfrak{K}}$ und P (man vergleiche § 2) sichert.

Satz 2. 4: *Existiert zu der Ω-partiellen Algebra $\bar{B}_0$ die exakte $\mathfrak{K}$-Hülle B, so existiert in $\mathfrak{K}$ auch das verallgemeinerte freie Produkt P des Amalgams $\mathfrak{A}$, und es gilt $P \cong B$.*

Beweis. Der erste Teil der Behauptung folgt unmittelbar aus obigen Bemerkungen und aus Satz 2. 3. Wir zeigen noch, daß die Isomorphie $P \cong B$ gilt. Dazu benutzen wir die in Satz 2. 3 gegebenen Bezeichnungen. Es gibt einen Homomorphismus φ von P in B derart, daß $\eta_i \varphi = \delta_i$ ist, und es gilt für $i, j \in I$

$$(A_i \eta_i \cap A_j \eta_j)\varphi = A_i \delta_i \cap A_j \delta_j .$$

Da $B = (\bar{B}_0)_{\mathfrak{K}}$ ist, ist φ sogar ein Homomorphismus von P auf B. Für jedes $i \in I$ läßt sich also das folgende kommutative Diagramm angeben:

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, tail, "\eta_i"] \arrow[d, tail, "\delta_i"'] & P \arrow[d, "\varphi"] \\ \bar{B}_0 \arrow[r, tail, "1_{\bar{B}_0}"'] & B \end{tikzcd}$$

Andererseits läßt sich ein Homomorphismus ψ von $\bar{B}_0$ in P wie folgt definieren:

$$\psi|(A_i\delta_i) \overset{\text{def}}{=} \psi_i \overset{\text{def}}{=} \delta_i^{-1}\eta_i.$$

Dieses ψ ist eine (eindeutige) Abbildung von $\bar{B}_0$ in P, da ψ auch auf den nichtleeren Durchschnitten $A_i\delta_i \cap A_j\delta_j = U_{ij}\delta_i = U_{ji}\delta_j$, $(i, j) \in I \times I$, eindeutig definiert ist, wie man durch „Ausrechnen" sofort bestätigen kann. ψ ist sogar ein Homomorphismus von $\bar{B}_0$ in P, denn die Operatoren von Ω wurden (partiell) in $\bar{B}_0$ dadurch erklärt, daß man sie auf die entsprechenden Operationen in den A_i zurückführte und δ^{-1} und η_i sind Homomorphismen. Nun läßt sich ψ zu einem Homomorphismus ψ' von B in P fortsetzen, wobei $\psi'|\bar{B}_0 = \psi$ gilt. ψ' ist sogar ein Homomorphismus von B auf P, denn jedes Wort aus P ist ein Wort in Elementen von $\bigcup_{i \in I} A_i\eta_i$. Das oben angegebene Diagramm läßt sich vervollständigen:

$$\begin{tikzcd}
A_i \arrow[r, tail, "\eta_i"] \arrow[d, tail, "\delta_i"'] & P \arrow[d, shift left, "\varphi"] \\
\bar{B}_0 \arrow[ur, "\psi"] \arrow[r, tail, "1_{\bar{B}_0}"'] & B \arrow[u, shift left, "\psi'"]
\end{tikzcd}$$

$\varphi\psi'$ ist ein Homomorphismus von P auf sich, dabei gilt für alle $i \in I$ und jedes $a_i \in A_i$ die Beziehung

$$(a_i\eta_i)\varphi\psi' = (a_i\delta_i)\psi' = (a_i\delta_i)\psi_i = a_i\eta_i,$$

d.h., es ist

$$\varphi\psi'|(A_i\eta_i) = 1_{A_i\eta_i}.$$

Da die $\{A_i\eta_i\}_{i\in I}$ die $\mathfrak{K}$-Algebra P erzeugen, ist $\varphi\psi' = 1_P$. Daraus folgt, daß φ eineindeutig ist und somit ein Isomorphismus von P auf B ist.

Aus diesem Satz werden wir in Abschnitt IV. Existenzaussagen für das verallgemeinerte freie Produkt in gewissen primitiven Klassen gewinnen können.

Existiert das verallgemeinerte freie Produkt eines Amalgams $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{K}$-Algebren, so hat man jetzt zwei Möglichkeiten, diese $\mathfrak{K}$-Algebra zu bilden. Welche von beiden „Konstruktionen" die geeignetere und aussagekräftigere ist, sei dahingestellt. Das Existenzproblem wird im Falle der Konstruktion über die Ω-partielle Algebra $\bar{B}_0$ auf die Frage zurückgeführt, ob zu $\bar{B}_0$ die exakte $\mathfrak{K}$-Hülle existiert. Dieses Problem dürfte in dieser Allgemeinheit nicht weniger schwierig sein als die Suche nach einer $\mathfrak{K}$-Algebra, die ein Amalgam $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{K}$-Algebren einbettet. Wie schon erwähnt, wird eine umfassende Antwort auf diese allgemeinen Existenzfragen nicht gegeben. Wir werden uns vielmehr auf die Untersuchung beliebiger Amalgame spezieller primitiver Klassen bzw. spezieller Amalgame (solche mit nur einer amalgamierten Unteralgebra) in bestimmten primitiven Klassen beschränken.

Es soll vorher noch bemerkt werden, daß die Existenz des verallgemeinerten freien Produktes eines Amalgams von $\mathfrak{K}$-Algebren eine Eigenschaft endlichen Charakters dieses Amalgams ist. D.h., man kann zeigen, daß das verallgemeinerte freie Produkt P des Amalgams $\mathfrak{A}$ genau dann existiert, wenn es für jedes endliche Unteramalgam von $\mathfrak{A}$ das verallgemeinerte freie Produkt gibt.[2])

[2]) Man vergleiche dazu die gleichnamige Dissertation.

III. Existenzuntersuchungen des verallgemeinerten freien Produktes in primitiven Klassen

§ 4. Amalgame mit mehreren amalgamierten Unteralgebren

Es soll jetzt ein beliebiges Amalgam $\mathfrak{A}$ einer primitiven Klasse betrachtet und untersucht werden, inwiefern man Existenzaussagen über das verallgemeinerte freie Produkt des Amalgams $\mathfrak{A}$ von der jeweiligen primitiven Klasse auf sie umfassende oder in ihr enthaltene primitive Klassen übertragen kann.

Mögen $\mathfrak{K}'=(\Omega', J')$ und $\mathfrak{K}=(\Omega, J)$ zwei primitive Klassen mit $\Omega'\subseteqq\Omega$ und $J'\subseteqq J$ sein, es ist also $\mathfrak{K}\subseteqq\mathfrak{K}'$. Insbesondere ist jedes $\mathfrak{K}$-Amalgam $\mathfrak{A}$ zugleich auch ein $\mathfrak{K}'$-Amalgam.

Folgerung 3. 1 aus Satz 2. 3: *Existiert zu einem $\mathfrak{K}$-Amalgam $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{K}$ das verallgemeinerte freie Produkt P, so existiert auch in $\mathfrak{K}'$ das verallgemeinerte freie Produkt P' des $\mathfrak{K}'$-Amalgams $\mathfrak{A}$.*

Interessanter und auch schwieriger ist die Frage, ob und unter welchen Voraussetzungen man etwas über die Existenz des verallgemeinerten freien Produktes eines $\mathfrak{K}$-Amalgams in $\mathfrak{K}$ aussagen kann, wenn bekannt ist, daß das verallgemeinerte freie Produkt dieses $\mathfrak{K}$-Amalgams (als $\mathfrak{K}'$-Amalgam aufgefaßt) in $\mathfrak{K}'$ existiert. In gewisser Weise, allerdings unter ziemlich einschränkenden Voraussetzungen, gibt der folgende Satz darauf eine Antwort.

Wir setzen dabei voraus, daß $\Omega_0(\subseteqq\Omega)$ nur aus einem einzigen 0-ären Operator 0 besteht, Ω' die 0 und mindestens alle die Operatoren enthält, die in den identischen Relationen

$$J\setminus\{00\ldots0\omega=0, \quad \text{falls} \quad 00\ldots0\omega=0\in J \quad \text{mit} \quad \omega\in\Omega\}$$

auftreten, und $\Omega'\subseteqq\Omega$ ist, und daß

$$J\setminus\{00\ldots0\omega=0, \quad \text{falls} \quad 00\ldots0\omega=0\in J \quad \text{mit} \quad \omega\in\Omega\}\subseteqq J',$$

aber $J'\subseteqq J$ gilt. Damit läßt sich der folgende Satz formulieren.

Satz 3.2: *Ist $\mathfrak{K}'=(\Omega', J')$ eine primitive Klasse mit 0 und existiert zu dem Amalgam*

$$\mathfrak{A}:\{A_i\}_{i\in I}, \{U_{ij}\}, \{\varphi_{ij}\}, \qquad (i,j)\in I\times I$$

von Algebren der primitiven Klasse $\mathfrak{K}=(\Omega, J)$ mit $\Omega\supseteqq\Omega'$ und $J\supseteqq J'$, wobei Ω' und J' den oben genannten Bedingungen genügen mögen, in der primitiven Klasse $\mathfrak{K}'$ das verallgemeinerte freie Produkt P', so existiert auch in $\mathfrak{K}$ das verallgemeinerte freie Produkt von $\mathfrak{A}$.

Beweis. $P'\in\mathfrak{K}'$ bettet $\mathfrak{A}$ ein, bezeichnen also die $\{\eta_i'\}_{i\in I}$ die einbettenden Ω'-Monomorphismen, so gilt

(4) $$(\eta_i'|U_{ij})(\eta_j'|U_{ji})^{-1} = \varphi_{ij}$$

und

(5) $$A_i\eta_i'\cap A_j\eta_j' = U_{ij}\eta_i' = U_{ji}\eta_j'.$$

Wir werden jetzt durch geeignete Festsetzungen die Ω-Struktur von A_i $(i\in I)$ auf $A_i\eta_i'$ $(i\in I)$ in P' übertragen und somit der Ω'-Algebra P' eine Ω-partielle Struktur geben. Dazu erklären wir $\omega \in \Omega_n \subseteqq \Omega \setminus \Omega'$ ($n \geqq 1$) genau für solche Tupel $p_1, p_2, \ldots, p_n \in P'$, für die ein $i \in I$ existiert, so daß $p_1, p_2, \ldots, p_n \in A_i\eta_i'$ ist, gilt dann $p_k = a_k\eta_i'$, $k = 1, 2, \ldots, n$ ($a_k \in A_i$), so sei

$$p_1 p_2 \ldots p_n \omega \stackrel{\text{def}}{=} (a_1 a_2 \ldots a_n \omega)\eta_i' .$$

Daß diese Zuordnungsvorschrift für alle diese $\omega \in \Omega$ eindeutig ist — auch für die Elemente des Durchschnitts $A_i\eta_i' \cap A_j\eta_j'$ — zeigt man leicht, man muß nur beachten, daß die amalgamierenden Abbildungen φ_{ij} Ω-Isomorphismen sind und P' das Amalgam $\mathfrak{A}$ einbettet. Die $\mathfrak{K}'$-Algebra P' läßt sich daher als Ω-partielle Algebra auffassen, die einbettenden Ω'-Monomorphismen $\{\eta_i'\}$ sind vermöge dieser Vorschrift sogar Ω-Monomorphismen, die den Beziehungen (4) und (5) genügen. Die Ω-partielle Algebra P' bettet daher das Amalgam $\mathfrak{A}$ sogar Ω-monomorph ein.

Aus dieser Ω-partiellen Algebra P' wird nun eine $\mathfrak{K}$-Algebra konstruiert, die $\mathfrak{A}$ einbettet. Dazu bilden wir eine aufsteigende Folge von Ω-partiellen $\mathfrak{K}'$-Algebren:

$$H_0 = P',$$

$$H_1 = P' \underset{\mathfrak{K}'}{*} \Pi^*_{\mathfrak{K}'} \mathfrak{K}'(p_1 p_2 \ldots p_n \omega)$$

mit

$$p_1, p_2, \ldots, p_n \in P',$$

aber

$$p_1 p_2 \ldots p_n \omega \notin P', \quad \omega \in \Omega_n \subseteqq \Omega.$$

H_1 sei also das freie Produkt in $\mathfrak{K}'$ von P' und den freien $\mathfrak{K}'$-Algebren, die durch die Elemente der Form $p_1 p_2 \ldots p_n \omega$ erzeugt werden. Da $\mathfrak{K}'$ nicht nur eine primitive Klasse ist, sondern sogar eine solche mit 0, existieren nicht nur die freien $\mathfrak{K}'$-Algebren, sondern auch die angegebenen freien Produkte. H_1 ist somit eine $\mathfrak{K}'$-Algebra mit einer Ω-partiellen Struktur. So fahre man fort; sei

$$H_n = H_{n-1} \underset{\mathfrak{K}'}{*} \Pi^*_{\mathfrak{K}'} \mathfrak{K}'(h_1 h_2 \ldots h_n \omega)$$

mit

$$h_1, h_2, \ldots, h_n \in H_{n-1},$$

$$h_1 h_2 \ldots h_n \omega \notin H_{n-1}, \quad \omega \in \Omega_n \subseteqq \Omega,$$

H_n ist wieder eine $\mathfrak{K}'$-Algebra mit Ω-partieller Struktur. Von dieser aufsteigenden Folge

$$H_0 \subseteqq H_1 \subseteqq H_2 \subseteqq \ldots \subseteqq H_n \subseteqq \ldots$$

bilde man die (mengentheoretische) Vereinigung

$$H = \bigcup_{k=0}^{\infty} H_k .$$

Dann ist H eine Ω-Algebra mit den identischen Relationen J'. H ist aber sogar eine Algebra der primitiven Klasse $\mathfrak{K} = (\Omega, J)$, denn sollte es in J Relationen der Form $00\ldots0\omega = 0$, $\omega \in \Omega \setminus \Omega'$ geben, so sind diese in der Ω-partiellen Algebra P' bereits erfüllt, da $0 \in A_i$ und $A_i \in \mathfrak{K}$ und $0\eta_i' = 0$ für alle $i \in I$ ist. Diese $\mathfrak{K}$-Algebra H bettet dann aber auch das Amalgam $\mathfrak{A}$ ein und die Anwendung von Satz 2. 3 vollendet den Beweis.

Folgerung 3. 3 aus Satz 3. 2 und Satz 2. 3: *Die oben konstruierte $\mathfrak{K}$-Algebra H ist isomorph zu dem verallgemeinerten freien Produkt P des $\mathfrak{K}$-Amalgams $\mathfrak{A}$.*

Beweis. Mit obigen Bezeichnungen und nach Satz 2. 3 ergibt sich für jedes $i \in I$ folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, tail, "\eta_i"] \arrow[d, tail, "\eta_i'"'] & P \arrow[dl, "\varphi"] \\ H & \end{tikzcd}$$

wobei also $\eta_i \varphi = \eta_i'$ $(i \in I)$ ist. Ferner ist $\varphi | A_i \eta_i$ ein Isomorphismus von $A_i \eta_i$ auf $A_i \eta_i'$, und da die Elemente der $\{A_i \eta_i'\}_{i \in I}$ die Algebra H erzeugen, ist die Abbildung φ ein Homomorphismus von P auf H. Wir zeigen noch, daß φ eineindeutig ist. Dazu definieren wir eine Abbildung

$$\sigma \colon a_i \eta_i' \to a_i \eta_i$$

für alle $a_i \in A_i$ und alle $i \in I$. Fassen wir $\bigcup\limits_{i \in I} A_i \eta_i'$ als Erzeugendenmenge von H auf, so ist σ eine Abbildung von dieser Menge in P. Diese Abbildung läßt sich zu einem Homomorphismus von H in P fortsetzen, denn die Relationen von P' gehen bei σ in solche von P über. H besitzt nach Konstruktion außer diesen und den identischen Relationen, die offenbar auch in P gelten, keine weiteren Relationen. Ferner ist σ ein Homomorphismus von H auf P, und somit ergibt sich für jedes $i \in I$:

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, tail, "\eta_i"] \arrow[d, tail, "\eta_i'"'] & P \arrow[dl, shift right, "\varphi"'] \\ H \arrow[ur, shift right, "\sigma"'] & \end{tikzcd}$$

Dabei ist

$$\varphi\sigma | A_i \eta_i = 1 A_i \eta_i$$

Daraus folgt wieder, daß $\varphi\sigma = 1_P$ ist, und es ergibt sich, daß φ ein Isomorphismus von P auf H ist.

Schränkt man die Untersuchungen auf primitive Klassen mit 0 ein, so kann man auf eine andere Frage, nämlich auf die, ob das verallgemeinerte freie Produkt im Durchschnitt zweier primitiver Klassen existiert, wenn es in jeder der beiden Klassen vorhanden ist, eine positive Antwort geben.

$\mathfrak{K}_1 = (\Omega^{(1)}, J_1)$ und $\mathfrak{K}_2 = (\Omega^{(2)}, J_2)$ seien zwei primitive Klassen mit 0, $\Omega^{(1)} \cap \Omega^{(2)}$ bestehe nur aus dem 0-ären Operator 0. Der Durchschnitt von $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ ist dann die primitive Klasse

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_1 \cap \mathfrak{K}_2 = (\Omega^{(1)} \cup \Omega^{(2)}, J_1 \cup J_2).$$

Beachtet, man, daß sowohl $\mathfrak{K} \subseteqq \mathfrak{K}_1$ als auch $\mathfrak{K} \subseteqq \mathfrak{K}_2$ gilt, so kann man folgenden Satz beweisen.

Satz 3. 4 *Existiert zu dem $\mathfrak{K}$-Amalgam*

$$\mathfrak{A} \colon \{A_i\}_{i \in I}, \{U_{ij}\}, \{\varphi_{ij}\}, \qquad (i, j) \in I \times I$$

sowohl in $\mathfrak{K}_1$ als auch in $\mathfrak{K}_2$ das verallgemeinerte freie Produkt, so existiert es auch im Durchschnitt $\mathfrak{K}=\mathfrak{K}_1 \cap \mathfrak{K}_2$.

Beweis. Man benütze die Konstruktion des verallgemeinerten freien Produktes über die exakte $\mathfrak{K}$-Hülle. Gemäß § 3 bilde man $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ und dann die Quotientenmenge $\bar{B}_0$, auf der eine $(\Omega^{(1)}\cup\Omega^{(2)})$-partielle Struktur erklärt werden kann. Nach der Voraussetzung und Satz 1. 1 folgt dann unmittelbar die Behauptung.

Bleiben wir in unseren Betrachtungen bei den primitiven Klassen mit 0, so kann man eine, wenn auch ziemlich spezielle, hinreichende Bedingung für die Existenz des verallgemeinerten freien Produktes eines Amalgams $\mathfrak{A}$ angeben.

Satz 3. 5. *$\mathfrak{K}$ sei eine primitive Klasse mit* 0;

$$\mathfrak{A}:\{A_i\}_{i\in I}, \{U_{ij}\}, \{\varphi_{ij}\}, \qquad (i,j)\in I\times I$$

sei ein Amalgem von $\mathfrak{K}$. Existiert zu jedem $i\in I$ eine Familie von Endomorphismen $\{\varepsilon_{ij}\}_{j\in I}$ von A_i auf U_{ij} derart, daß

$$\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ik}=\begin{cases}\varepsilon_{ij} & \text{für } j=k, \\ 0 & \text{für } j\neq k,\ i\neq k,\ i\neq j\end{cases}$$

gilt, so existiert in $\mathfrak{K}$ das verallgemeinerte freie Produkt dieses Amalgams $\mathfrak{A}$.

Beweis. Wir bemerken zunächst, daß auf Grund der Voraussetzungen nur solche Amalgame in Betracht kommen, bei denen für alle $i, j, k\in I$ $(i\neq j,\ i\neq k,\ j\neq k)$

$$U_{ki}\cap U_{kj}=0$$

ist. Jede $\mathfrak{K}$-Algebra A_i $(i\in I)$ und jede ihrer Unteralgebren U_{ij} denke man sich durch eine Präsentation gegeben und die $\mathfrak{K}$-Algebra P gebildet (wie es in Satz 2. 3 ausgeführt wurde). Wir werden mit Hilfe der gegebenen Voraussetzungen zeigen, daß die Homomorphismen η_i von A_i in P für alle $i\in I$ Monomorphismen sind und daß dabei die gewünschten Durchschnittsbeziehungen (3) mit

$$(\eta_i|U_{ij})\,(\eta_j|U_{ji})^{-1}=\varphi_{ij}$$

in P gelten.

Sei k ein beliebiger, aber festgehaltener Index aus I. Wir zeigen, daß η_k ein Monomorphismus von A_k in P ist. Dazu definieren wir Abbildungen ψ_{ik} von A_i $(i\in I)$ in A_k durch folgende Festsetzung:

$$\psi_{ik}\overset{\text{def}}{=}\varepsilon_{ik}\varphi_{ik}\quad \text{(insbesondere ist also}\quad \psi_{kk}=1_{A_k}).$$

ψ_{ik} ist offenbar ein Homomorphismus von A_i in A_k für jedes $i\in I$. Ferner geben wir eine Abbildung $\varphi^{(k)}$ von P in A_k durch folgende Vorschrift an: Für jedes $e_i\in E_i$, $i\in I$, sei

$$(e_i\eta_i)\,\varphi^{(k)}\overset{\text{def}}{=}e_i\psi_{ik}.$$

$\varphi^{(k)}$ ist mit dieser Definition eine Abbildung des Erzeugendensystems von P in A_k. Man kann sich $\varphi^{(k)}$ auf natürliche Weise auf die Wörter von P fortgesetzt denken. Um zu zeigen, daß $\varphi^{(k)}$ ein Homomorphismus von P auf A_k ist, muß man wieder nachweisen, daß die definierenden Relationen aus P bei $\varphi^{(k)}$ in gültige Relationen in A_k übergehen. Daß die Relationen aus $\bigcup_{i \in I} R_i$ in Relationen übergehen, die in A_k gelten, folgt sofort aus der Tatsache, daß die ψ_{ik} für alle $i \in I$ Homomorphismen sind. Wir haben noch die identifizierenden Relationen in P zu betrachten:

$$u_{ij\nu} = u_{ij\nu}\eta_i = u_{ji\nu}\eta_j = u_{ji\nu}.$$

Nun ist

$$u_{ij\nu}\eta_i\varphi^{(k)} = u_{ij\nu}\psi_{ik} = \begin{cases} u_{kj\nu}, & i=k, \\ u_{ki\nu}, & i \neq k, \quad j=k, \\ 0, & i \neq k, \quad j \neq k, \end{cases}$$

und

$$u_{ji\nu}\eta_j\varphi^{(k)} = u_{ji\nu}\psi_{jk} = \begin{cases} u_{kj\nu}, & i=k, \\ u_{ki\nu}, & i \neq k, \quad j=k, \\ 0, & i \neq k, \quad j \neq k. \end{cases}$$

Vergleicht man entsprechende Fälle, so findet man

$$(u_{ij\nu}\eta_i)\varphi^{(k)} = (u_{ji\nu}\eta_j)\varphi^{(k)}.$$

Also läßt sich $\varphi^{(k)}$ zu einem Homomorphismus von P auf A_k fortsetzen, ist insbesondere $i=k$, so ergibt sich

$$\eta_k\varphi^{(k)} = \psi_{kk} = 1_{A_k}.$$

Daraus folgt nun aber sofort, daß η_k ein Monomorphismus von A_k in P ist. Da k beliebig aus I gewählt war, folgt, daß für alle $i \in I$ die Homomorphismen η_i Monomorphismen von A_i in P sind und dabei auf Grund der Konstruktion von P auch

$$(\eta_i|U_{ij})(\eta_j|U_{ji})^{-1} = \varphi_{ij} \quad \text{für} \quad (i,j) \in I \times I$$

ist.

Es bleibt noch die Gültigkeit der Durchschnittsbeziehungen (3) nachzuweisen. Dabei genügt es, diese Durchschnittsbeziehungen für den Fall $j=k$ (dies soll das oben benützte k sein) zu betrachten. Nach Konstruktion von P gilt sicher

$$U_{ik}\eta_i = U_{ki}\eta_k \subseteqq A_i\eta_i \cap A_k\eta_k.$$

Sei $a \in A_i\eta_i \cap A_k\eta_k$, dann gibt es ein $b \in A_i$ und ein $c \in A_k$ derart, daß $a = b\eta_i$ und $a = c\eta_k$ ist. Bildet man a bei $\varphi^{(k)}$ ab, so erhält man einerseits

$$a\varphi^{(k)} = (c\eta_k)\varphi^{(k)} = c\psi_{kk} = c$$

und andererseits

$$a\varphi^{(k)} = (b\eta_i)\varphi^{(k)} = b\psi_{ik} \in U_{ki}.$$

Daher ist $c \in U_{ki}$, und folglich ist

$$a = c\eta_k \in U_{ki}\eta_k,$$

womit (3) erfüllt ist. P ist somit das verallgemeinerte freie Produkt von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{K}$.

Daß diese in Satz 3. 5 formulierte hinreichende Bedingung für die Existenz des verallgemeinerten freien Produktes eines Amalgams nicht notwendig ist, ist offensichtlich.

Aus Satz 3. 5 lassen sich unmittelbar zwei Folgerungen herleiten:

Folgerung 3. 6 aus Satz 3. 5: *Ist $\mathfrak{K}$ eine primitive Klasse mit* 0, *so existiert zu jedem $\mathfrak{K}$-Amalgam $\mathfrak{A}$ der Form*

$$\mathfrak{A}:\left\{A_i = \prod^*_{\substack{\mathfrak{K}\\ \nu\in\Gamma}} U_{i\nu}\right\}_{i\in I\subseteq\Gamma}, \{U_{ij}\}, \{\varphi_{ij}\}, \qquad (i,j)\in I\times I$$

in $\mathfrak{K}$ das verallgemeinerte freie Produkt.

($\prod^*_{\mathfrak{K},\,\nu\in\Gamma} U_{i\nu}$ bezeichne dabei das freie Produkt der $U_{i\nu}$ in $\mathfrak{K}$, d.h., die $\{U_{ij}\}_{j\in I}$ treten als „freie Faktoren" in A_i auf.)

Folgerung 3. 7 aus Satz 3. 5: *Ist $\mathfrak{K}$ eine primitive Klasse mit* 0, *so existiert zu jedem $\mathfrak{K}$-Amalgam $\mathfrak{A}$ der Form*

$$\mathfrak{A}:\left\{A_i = \sum_{\substack{\mathfrak{K}\\ \nu\in\Gamma}} U_{i\nu}\right\}_{i\in I\subseteq\Gamma}, \{U_{ij}\}, \{\varphi_{ij}\}, \qquad (i,j)\in I\times I$$

in $\mathfrak{K}$ das verallgemeinerte freie Produkt.

($\sum_{\mathfrak{K},\,\nu\in\Gamma} U_{i\nu}$ bezeichne die direkte Summe der $U_{i\nu}$ in $\mathfrak{K}$.) In beiden Fällen sind die Voraussetzungen von Satz 3. 5 erfüllbar.

Nach Jónsson [10] wollen wir definieren: Eine primitive Klasse $\mathfrak{K}$ *besitzt die Amalgamationseigenschaft* genau dann, wenn in $\mathfrak{K}$ zu jedem Amalgam mit nur einer amalgamierten Unteralgebra stets das verallgemeinerte freie Produkt existiert.

Primitive Klassen mit Amalgamationseigenschaft sind zum Beispiel die primitive Klasse der Gruppen, die der abelschen Gruppen und die der Booleschen Algebren; weitere Beispiele finden sich in Abschnitt IV.

Für solche primitive Klassen läßt sich eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz des verallgemeinerten freien Produktes angeben. Es handelt sich dabei um eine Verallgemeinerung des entsprechenden Satzes für Gruppen, nämlich des Reduktionssatzes von H. Neumann.

Satz 3. 8: *$\mathfrak{K}$ sei eine primitive Klasse mit Amalgamationseigenschaft. Das verallgemeinerte freie Produkt P des $\mathfrak{K}$-Amalgams*

$$\mathfrak{A}:\{A_i\}_{i\in I}, \{U_{ij}\}, \{\varphi_{ij}\}, \qquad (i,j)\in I\times I$$

existiert genau dann, wenn das verallgemeinerte freie Produkt U des $\mathfrak{K}$-Amalgams

$$\mathfrak{U}:\{U_i\}_{i\in I}, \{U_{ij}\}, \{\varphi_{ij}\}, \qquad (i,j)\in I\times I$$

in $\mathfrak{K}$ existiert. Dabei sei die $\mathfrak{K}$-Algebra U_i $(i\in I)$ die von den Algebren $\{U_{ij}\}_{j\in I}$ in A_i erzeugte Unteralgebra.

Zum Beweis nehme man an, daß die zu bildenden verallgemeinerten freien Produkte die Ausgangsalgebren identisch enthalten. Dann verläuft der Beweis genau so einfach wie im Falle der Gruppen, man vergleiche dazu [14] und benütze Satz 2. 3.

Aus diesem Satz folgt dann unmittelbar der bekannte entsprechende Satz für die primitive Klasse der abelschen Gruppen ([14], [16]). Auch die entsprechende Folgerung für die primitive Klasse der Booleschen Algebren dürfte interessant sein.

Wir wollen die Untersuchungen hinsichtlich der Existenz des verallgemeinerten freien Produktes eines beliebigen Amalgams mit einer notwendigen Bedingung abschließen, die es gestatten wird, in gewissen primitiven Klassen Amalgame anzugeben, für die das verallgemeinerte freie Produkt in diesen Klassen nicht existiert.

Dazu führen wir den Begriff des durchschnittstreuen Enthaltenseins einer primitiven Klasse $\mathfrak{K}=(\Omega, J)$ in einer anderen primitiven. Klasse $\mathfrak{K}'=(\Omega', J')$ ein.

Definition: $\mathfrak{K}$ ist durchschnittstreu in $\mathfrak{K}'$ enthalten genau dann, wenn $\mathfrak{K}\subseteqq\mathfrak{K}'$ und jeder nichtleere Durchschnitt je zweier in einer $\mathfrak{K}'$-Algebra enthaltener $\mathfrak{K}$-Algebren (in dieser $\mathfrak{K}'$-Algebra) stets wieder eine $\mathfrak{K}$-Algebra ist.

Es sollen einige Beispiele für durchschnittstreues Enthaltensein — ohne Beweise — angegeben werden:

1. Die primitive Klasse $\mathfrak{K}=(\Omega, J)$ ist durchschnittstreu in der primitiven Klasse $\mathfrak{K}'=(\Omega, J')$ mit $J'\subseteqq J$ enthalten.
2. Die primitive Klasse $\mathfrak{K}=(\Omega, J)$ ist dann durchschnittstreu in der primitiven Klasse $\mathfrak{K}'=(\Omega', J')$ enthalten, wenn $J'\subseteqq J$ und $\Omega'\subseteqq\Omega$ ist und $\Omega\setminus\Omega'$ nur aus bezüglich Ω' hauptderivierten Operatoren besteht.
3. Die primitive Klasse der Gruppen ist durchschnittstreu in der primitiven Klasse der Halbgruppen enthalten.
4. Die primitive Klasse der Ringe ist durchschnittstreu in der primitiven Klasse der Semiringe enthalten.
5. Die primitive Klasse der Loops ist durchschnittstreu in der primitiven Klasse der Quasigruppen enthalten.
6. Die primitive Klasse der Booleschen Algebren ist durchschnittstreu in der primitiven Klasse der distributiven Verbände mit 0 und 1 (beide als 0-äre Operatoren aufgefaßt) enthalten.

Daß die beiden Begriffe „Enthaltensein einer primitiven Klasse $\mathfrak{K}$ in einer anderen primitiven Klasse $\mathfrak{K}'$" und „durchschnittstreues Enthaltensein von $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{K}'$" nicht identisch sind, ist offensichtlich. Es soll nun die angekündigte notwendige Bedingung angegeben werden.

Satz 3.9. *Die primitive Klasse $\mathfrak{K}=(\Omega, J)$ sei durchschnittstreu in der primitiven Klasse $\mathfrak{K}'=(\Omega', J')$ enthalten. Ist*

$$\mathfrak{A}:\{A_i\}_{i\in I}, \{U_{ij}\}, \{\varphi_{ij}\}, \qquad (i,j)\in I\times I$$

ein Amalgam von $\mathfrak{K}'$, und sind alle A_i $(i\in I)$ sogar $\mathfrak{K}$-Algebren, so existiert das verallgemeinerte freie Produkt P von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{K}'$ nur dann, wenn $\mathfrak{A}$ ein $\mathfrak{K}$-Amalgam ist, d.h., wenn sämtliche U_{ij} $(j\in I)$ in A_i $(i\in I)$ $\mathfrak{K}$-Unteralgebren und die φ_{ij} Ω-Isomorphismen sind.

Beweis. Angenommen das verallgemeinerte freie Produkt P von $\mathfrak{A}$ existiere in $\mathfrak{K}'$ die $\{\eta_i\}_{i\in I}$ seien die einbettenden Ω'-Monomorphismen. Dann besitzen die $\mathfrak{K}'$-Algebren $A_i\eta_i$ und $A_j\eta_j$ in P den Durchschnitt

$$A_i\eta_i \cap A_j\eta_j = U_{ij}\eta_i = U_{ji}\eta_j, \qquad (i,j)\in I\times I.$$

Die A_i $(\ \in I)$ sind nach Voraussetzung $\mathfrak{K}$-Algebren; ihre Ω-Struktur läßt sich vermöge folgender Festsetzung auf die Bilder $A_i\eta_i$ übertragen: Für $\omega\in\Omega_n\subseteqq\Omega\setminus\Omega'$ $(n\geqq 1)$ und $p_1, p_2, \ldots, p_n\in A_i\eta_i$ mit $p_k=a_k\eta_i$, $k=1,2,\ldots,n$, gelte

$$p_1 p_2 \ldots p_n\omega \stackrel{\text{def}}{=} (a_1 a_2 \ldots a_n\omega)\eta_i.$$

Ist $\omega_0\in\Omega_0\subseteqq\Omega\setminus\Omega'$, so ist durch ω_0 in A_i $(i\in I)$ genau ein Element ausgezeichnet, und dessen Bild bei η_i sei das dem ω_0 in $A_i\eta_i$ zugeordnete Element. Mit dieser Festsetzung sind die $\omega\in\Omega\setminus\Omega'$ so auf $A_i\eta_i$ erklärt, daß die $A_i\eta_i$ $\mathfrak{K}$-Algebren in der $\mathfrak{K}'$-Algebra P und die Ω'-Monomorphismen η_i sogar Ω-Monomorphismen von A_i auf $A_i\eta_i$, also Ω-Isomorphismen von A_i auf $A_i\eta_i$ sind. Nach Voraussetzung müssen dann die Durchschnitte

$$A_i\eta_i \cap A_j\eta_j = U_{ij}\eta_i = U_{ji}\eta_j$$

in P auch $\mathfrak{K}$-Algebren sein. Da ferner η_i^{-1} ein Ω-Monomorphismus von $A_i\eta_i$ auf A_i ist, folgt, daß die U_{ij} $(j \in I)$ $\mathfrak{K}$-Unteralgebren von A_i sein müssen und die Abbildungen

$$\varphi_{ij} = (\eta_i|U_{ij})(\eta_j|U_{ji})^{-1}$$

Ω-Isomorphismen für alle $(i, j) \in I \times I$ sind.

Folgerungen aus diesem Satz und den vorausgegangenen Bemerkungen insbesondere für Amalgame mit nur einer amalgamierten Unteralgebra werden im Teil II dieser Arbeit angegeben werden. [3])

Bei der Abfassung dieser Arbeit erhielt ich von Herrn Prof. Dr. A. KERTÉSZ wertvolle Hinweise, für die ich ihm hiermit herzlich danke.

Literatur

[1] T. M. BARANOVIČ, Freie Zerlegungen im Durchschnitt primitiver Klassen von Algebren (russisch), *Mat. Sbornik* **67** (109) 1 (1965) 135—153.
[2] G. E. BATES, Free loops and nets and their generalizations, *Amer. Journ. of Math.* **69** (1947), 499—549.
[3] P. M. COHN, On the free product of associative rings, *Math. Z.* **71** (1959), 380—398.
[4] P. M. COHN, Universal Algebra, New York, Evanston, London, 1965.
[5] Z. E. DIDIDSE, Nichtassoziative freie Summen von Algebren mit amalgamierten Unteralgebren (russisch), *Mat. Sbornik* **43** (85) (1957), 379—396.
[6] P. H. DWINGER—F. M. YAQUB Generalized free products of Boolean algebras with an amalgamated subalgebra, *Ind. Math.* **25** (1963), 225—231.
[7] P. J. HIGGINS, Groups with multiple operators, *Proc. London Math. Soc.* (3) **6** (1956), 366—416.
[8] J. M. HOWIE, Embedding theorems with amalgamation for semigroups, Proc. London Math. Soc. (3) **12** (1962), 511—534.
[9] B. JÓNSSON, Universal relational systems, *Math. Scand.* **4** (1956), 193—208.
[10] B. JÓNSSON, Sublattices of a free lattice, *Can. Journ. of Math.* **13** (1961), 256—264.
[11] B. JÓNSSON, Extensions of relational structures, Symposium on the theory of Models, North-Holland Publ. co., Amsterdam 1965.
[12] A. G. KUROŠ, Freie Summen von Multioperatorgruppen (russisch), *Acta Sci. Math. Szeged* **21** (1960), 187—196.
[13] B. H. NEUMANN, Lectures on topics in the theory of infinite groups, Institute of fundamental research, Bombay 1960.
[14] H. NEUMANN—B. H. NEUMANN, A remark on generalized free products, *Journ. London Math.* Soc. **25** (1950), 202—204.
[15] H. NEUMANN, Generalized free products with amalgamated subgroup I, *Amer. Journ. Math.* **70** (1948), 590—625.
[16] H. NEUMANN, On an Amalgam of abelian groups, *Journ. London Math. Soc.* **26** (1951), 228—232.
[17] R. SIKORSKI, Products of abstract algebras, *Fund. Math.* **39** (1953), 211—228.
[18] SMIRNOW, Geordnete Multioperatorgruppen (russisch), *Sibirsk. Math. Journ.* **6** (1965), 433—458.

(Eingegangen am 15. März 1968.)

[3]) „Das verallgemeinerte freie Produkt in primitiven Klassen universeller Algebren II" erscheint im Band 17 dieser Zeitschrift.