Über die Mächtigkeit gewisser Vereinigungsmengen

Von LUDWIG STAMMLER (Halle/Saale)

1. Aufgabenstellung

1. 1 Allgemeine Beschreibung

Gegeben seien eine nichtleere Menge Γ und ein durch sie indiziertes System (in anderer Terminologie: Familie oder Funktion) $\mathfrak{S}=\{\mathfrak{x}_\nu\}_{\nu\in\Gamma}$ von Mächtigkeiten $\mathfrak{x}_\nu>0$. Wir betrachten die Klasse $\mathscr{K}$ derjenigen durch Γ indizierten Mengensysteme $S=\{X_\nu\}_{\nu\in\Gamma}$, in denen für jedes $\nu\in\Gamma$ die Menge X_ν die Mächtigkeit $|X_\nu|=\mathfrak{x}_\nu$ hat. (Die Mächtigkeit einer Menge X werde aus technischen Gründen nicht, wie oft üblich, mit $\overline{\overline{X}}$, sondern mit $|X|$ bezeichnet.)

Wir wollen aus $\mathscr{K}$ durch weitere Voraussetzungen (s. 1. 3) Unterklassen aussondern und (wenn S ein System in einer solchen Unterklasse ist) Aussagen über die Mächtigkeit $\mathfrak{v}$ der Vereinigungsmenge $V=\cup S=\bigcup\limits_{\nu\in\Gamma}X_\nu$ herleiten. Weiteres zur allgemeinen Charakterisierung dieser Aussagen wird unten in 2, einleitend vor 2. 1, angeführt.*)

Wir verwenden eines der üblichen Axiomensysteme der Mengenlehre, etwa das *Zermelo—Frenkel*sche, einschließlich des Auswahlaxioms. Sobald wir auch die Alephhypothese (verallgemeinerte Kontinuumhypothese) heranziehen, wird dies ausdrücklich bemerkt. Hierzu sowie zum Gebrauch der Sprache der naiven Mengenlehre sei etwa auf [1] verwiesen, desgl. für weitere Literatur über die (als Folgerungen aus den genannten Axiomen) benutzten Sätze.

1. 2 Vorbereitende Bezeichnungen

1.21 Als *Supremum* $\sup\mathfrak{u}$ eines Systems $\mathfrak{u}$ mit Elementen aus einer wohlgeordneten Menge $\mathfrak{C}$ bezeichnen wir hier *nicht* wie in [1] das kleinste Element $s^{[1]}\in\mathfrak{C}$ mit $s^{[1]}>u$ für alle $u\in\mathfrak{u}$, *sondern das kleinste Element $s\in\mathfrak{C}$ mit $s\geqq u$ für alle $u\in\mathfrak{u}$.* Im einzelnen ist also entweder s dasjenige Element, das $s^{[1]}$ vorangeht, d.h. das

* Zusatz bei der Korrektur: Durch Verlust einer Postsendung ist ein vorgesehenes den Inhalt zusammenfassendes Vorwort weggefallen. Zur ersten Überícht lese man (außer dem Absatz vor 2.1) aus Abschnitt 2 öunächst die Aussagengruppe 2.311, 2.142 mit 2.132, 2.144 und 2. 133, 2,145, ferner 2.121 mit 2.123 und dann die Aussagengruppe 2.233, 2.212, 2.215 mit den Gegenstücken 2.213, 2.214, 2.232. Die hierzu notwendigen Begrifiserklärungen stehen in 1.3 sowie 1.21, 1.29.

größte Element $\max \mathfrak{u}$ von $\mathfrak{u}$, wenn dieses existiert, oder aber $s = s^{[1]}$, wenn $\max \mathfrak{u}$ nicht existiert.

Das Supremum des Systems $\mathfrak{S}$ nennen wir $\sup\limits_{\nu \in \Gamma} \mathfrak{x}_\nu = \sup \mathfrak{S} = \mathfrak{s}$, seine Summe $\sum\limits_{\nu \in \Gamma} \mathfrak{x}_\nu = \sum \mathfrak{S} = \mathfrak{z}$. Ferner setzen wir $|\Gamma| = \mathfrak{C}$. Es gilt $\mathfrak{s} \leqq \mathfrak{z} \leqq \mathfrak{C} \cdot \mathfrak{s}$.

1. 22 Es sei irgend eine Äquivalenzrelation $\equiv$ in Γ vorgelegt mit der Eigenschaft, daß aus $\nu \equiv \nu'$ stets $\mathfrak{x}_\nu = \mathfrak{x}_{\nu'}$ folgt ($\nu, \nu' \in \Gamma$). Es sei $\Gamma_1 = \Gamma / \equiv$ die Menge der Äquivalenzklassen, in die Γ nach $\equiv$ zerfällt. Für jedes $i \in \Gamma_1$ kann man dann alle (einander gleichen) $\mathfrak{x}_\nu$ mit $\nu \in i$ auch $\mathfrak{x}_i$ nennen. So erhält man ein neues System $\mathfrak{S}_1 = \{\mathfrak{x}_i\}_{i \in \Gamma_1}$. Wir sagen kurz, $\mathfrak{S}_1$ sei aus $\mathfrak{S}$ durch *Übergang zur Indexmenge* Γ_1 entstanden. Hierbei bleibt $\sup \mathfrak{S}_1 = \mathfrak{s}$.

1. 23 Ist S irgend ein System aus $\mathscr{K}$, so erhält man ein Beispiel für 1. 22, indem man genau dann $\nu \equiv \nu'$ definiert, wenn $X_\nu = X_{\nu'}$ gilt ($\nu, \nu' \in \Gamma$). In diesem Fall kann man analog zu 1. 22 auch in S den Übergang zur Indexmenge Γ_1 durchführen und so das System $S_1 = \{X_i\}_{i \in \Gamma_1}$ erhalten. Wir wollen (bei gegebenem S) die Bezeichnungen $\equiv$, Γ_1, $\mathfrak{S}_1$, S_1 stets in dieser Bedeutung verwenden. Es bleibt $\bigcup S_1 = V$.

1. 24 Eine weitere Äquivalenzrelation $\triangleq$ als Beispiel für 1. 22 erhält man, indem man genau dann $\nu \triangleq \nu'$ definiert, wenn $\mathfrak{x}_\nu = \mathfrak{x}_{\nu'}$ gilt ($\nu, \nu' \in \Gamma$). Für diesen Fall verwenden wir die Bezeichnungen $\Gamma^* = \Gamma / \triangleq$; $\mathfrak{S}^* = \{\mathfrak{x}_{\mu^*}\}_{\mu^* \in \Gamma^*}$ sowie $|\Gamma^*| = \mathfrak{C}^*$.

1. 25 In Γ^* wird eine Wohlordnung $<$ definiert, indem man genau dann $\mu^* < \mu'^*$ setzt, wenn $\mathfrak{x}_{\mu^*} < \mathfrak{x}_{\mu'^*}$ gilt ($\mu^*, \mu'^* \in \Gamma^*$). Wird dabei Γ^* vom Typ θ, also ähnlich zur Menge $W(\theta)$ der Ordnungszahlen $\mu < \theta$, so bezeichnen wir jeweils die einem $\mu^* \in \Gamma^*$ zugeordnete Ordnungszahl mit μ. Wir schreiben dann auch $\mathfrak{x}_{\mu^*} = \mathfrak{x}_\mu$ und $|\mu^*| = \mathfrak{c}_\mu$. Ist ferner Z irgend eine Untermenge von $W(\theta)$, so bezeichnen wir die Vereinigungsmenge aller derjenigen Äquivalenzklassen μ^*, deren zugeordnete Ordnungszahlen μ in Z liegen, auch mit $\bigcup\limits_{\mu \in Z} \mu^* = Z^*$.

1. 26 Abweichend von 1. 22 definieren wir noch eine Äquivalenzrelation $\triangle$ in Γ, indem wir genau dann $\nu \triangle \nu'$ setzen, wenn entweder $\mathfrak{x}_\nu$ und $\mathfrak{x}_{\nu'}$ beide endlich sind oder andernfalls $\mathfrak{x}_\nu = \mathfrak{x}_{\nu'}$ gilt ($\nu, \nu' \in \Gamma$). Wir schreiben $\Gamma^\Diamond = \Gamma / \triangle$ sowie $|\Gamma^\Diamond| = \mathfrak{C}^\Diamond$. Es gilt $\mathfrak{C}^\Diamond \leqq \mathfrak{C}^* \leqq \mathfrak{s}$.

1. 27 Ist irgend eine Untermenge $T \subseteqq \Gamma$ gegeben, so bezeichnen wir das durch sie indizierte Teilsystem von $\mathfrak{S}$ mit $\mathfrak{S}_{(T)} = \{\mathfrak{x}_\nu\}_{\nu \in T}$. Bildet man allgemein zu Begriffen, die ausgehend von $\mathfrak{S}$ definiert wurden, analoge Begriffe ausgehend von $\mathfrak{S}_{(T)}$, so werden diese ebenfalls durch den Index $_{(T)}$ gekennzeichnet.

So ist etwa $\mathfrak{s}_{(T)} = \sup \mathfrak{S}_{(T)} = \sup\limits_{\nu \in T} \mathfrak{x}_\nu$; ferner ist $\mathscr{K}_{(T)}$ die Klasse der Mengensysteme $S_{(T)} = \{X_\nu\}_{\nu \in T}$ (mit $|X_\nu| = \mathfrak{x}_\nu$ für alle $\nu \in T$) und $\mathfrak{v}_{(T)}$ die Mächtigkeit der Vereinigungsmenge $V_{(T)} = \bigcup S_{(T)} = \bigcup\limits_{\nu \in T} X_\nu$ eines solchen Mengensystems. Oder wir können z.B. im Anschluß an 1. 26 das System $\mathfrak{S}$ in die Teilsysteme $\mathfrak{S}_{(r)}$ zerlegen ($r \in \Gamma^\Diamond$).

1.28 Es sei $\mathfrak{U} = \{\mathfrak{c}_\mu\}_{\mu < \theta}$ eine Folge vom Typ θ (mit an sich beliebiger Ordnungszahl θ; wir benötigen weiter unter aber gerade das θ aus 1. 25), wobei die $\mathfrak{c}_\mu$ Elemente irgend einer Menge $\mathfrak{C}'$ sind (beispielsweise, wie wir es im folgenden brauchen werden, Mächtigkeiten). Für jedes $\mu < \theta$ sei noch die Bezeichnung $R(\mu) = W(\theta) \setminus W(\mu)$ eingeführt.

Es sei ferner $\mathfrak{F}$ ein Funktional, das jeder Folge (von nicht größerem Typ als θ und mit Elementen aus $\mathfrak{E}'$) ein Element einer wohlgeordneten Menge $\mathfrak{E}$ (beispielsweise wieder eine Mächtigkeit) zuordnet und folgende Eigenschaft hat: Bildet man für jedes $\mu < \theta$ die Folge $\mathfrak{u}^{(\mu)} = \{\mathfrak{e}_\vartheta\}_{\vartheta \in R(\mu)}$ und ihren Funktionalwert $\mathfrak{f}_\mu = \mathfrak{F}(\mathfrak{u}^{(\mu)})$, so folgt aus $\mu < \mu' < \theta$ stets $\mathfrak{f}_\mu \geqq \mathfrak{f}_{\mu'}$. Beispielsweise (für Mächtigkeiten) ist das Supremum ein solches Funktional, desgleichen die Summe.

Wegen der Wohlordnung von $\mathfrak{E}$ gibt es unter diesen Voraussetzungen eine Ordnungszahl $\pi < \theta$, so daß $\mathfrak{f}_\mu = \mathfrak{f}_\pi$ für alle $\mu \in R(\pi)$ wird. Wir nennen dann den Wert $\mathfrak{f}_\pi$ das *Finalfunktional* $\mathrm{f}\mathfrak{F}(\mathfrak{U})$ der Folge $\mathfrak{U}$. Beispielsweise für Folgen von Mächtigkeiten haben wir so insbesondere das *Finalsupremum* fsup $\mathfrak{U}$ und die *Finalsumme* $\mathrm{f}\Sigma\mathfrak{U}$ definiert.

1. 29 Ausgehend von $\mathfrak{S}$ bilden wir nun Γ^* wie in 1. 24, sodann die zugeordnete Menge $W(\theta)$ wie in 1. 25, ferner die Folge $\mathfrak{U} = \{\mathfrak{c}_\mu \cdot \mathfrak{x}_\mu\}_{\mu < \theta}$ und schließlich deren Finalsupremum $\mathfrak{t} = \mathrm{fsup}\, \mathfrak{U}$. Die zur allgemeinen Definition in 1. 28 eingeführten Bezeichnungen $R(\mu)$, $\mathfrak{u}^{(\mu)} = \{\mathfrak{c}_\vartheta \cdot \mathfrak{x}_\vartheta\}_{\vartheta \in R(\mu)}$ und π behalten wir in sinngemäß entsprechender Bedeutung auch für diesen Spezialfall des Finalsupremums der hier genannten Folge $\mathfrak{U} = \{\mathfrak{c}_\mu \cdot \mathfrak{x}_\mu\}_{\mu < \theta}$ bei. Für sie gilt übrigens, wenn $\mathfrak{t}$ unendlich ist, zugleich auch $\mathfrak{t} = \mathrm{f}\Sigma\mathfrak{U}$; genauer ist dann sogar $\sup \mathfrak{u}^{(\mu)} = \Sigma \mathfrak{u}^{(\mu)}$ für jedes $\mu < \theta$. Dies folgt aus $\sup \mathfrak{u}^{(\mu)} \leqq \Sigma \mathfrak{u}^{(\mu)} \leqq |R(\mu)| \cdot \sup \mathfrak{u}^{(\mu)}$ unter Beachtung von $|R(\mu)| \leqq \leqq \mathfrak{s}_{(R(\mu)^*)} \leqq \sup \mathfrak{u}^{(\mu)}$ (zur Bedeutung der Bezeichnungen $R(\mu)^*$ und $\mathfrak{s}_{(R(\mu)^*)}$ siehe 1. 25 bzw. 1. 27).

1. 3 Voraussetzungen

Die Voraussetzungen über Systeme S, die wir hier betrachten wollen, beziehen sich auf die Relationen der Gleichheit $=$ und des Enthaltenseins $\subseteqq$ zwischen den X_ν. In einem Fall ziehen wir auch die Relation des Überdecktwerdens (d.h. des Enthaltenseins in einer Vereinigungsmenge) heran.

1. 31 Voraussetzungen über einzelne Systeme

Ein System S aus $\mathscr{K}$ heiße

(l) *(linear) geordnet* oder *Kette*,

(f) *nach oben gefiltert*,

(m) *Menge* bzw.

(t) *trivial halbgeordnet*,

wenn für je zwei $\nu, \nu' \in \Gamma$ gilt:

(l) $X_\nu \subseteqq X_{\nu'}$ oder $X_{\nu'} \subseteqq X_\nu$.

(f) Es gibt ein $\nu'' \in \Gamma$ mit $X_\nu \subseteqq X_{\nu''}$; $X_{\nu'} \subseteqq X_{\nu''}$.

(m) Aus $\nu \neq \nu'$ folgt $X_\nu \neq X_{\nu'}$.

(t) Aus $\nu \neq \nu'$ folgt $X_\nu \mathrel{\substack{\not\subseteq\\ \not\supseteq}} X_{\nu'}$.

Ist $S=\{X_\nu\}_{\nu\in\Gamma}$ eine Menge, so wird in Γ eine Halbordnung $<$ definiert, indem man genau dann $\nu<\nu'$ setzt, wenn $X_\nu \subset X_{\nu'}$ gilt (ν, $\nu'\in\Gamma$). Wir werden, wenn ein System eine Menge ist, diese Halbordnung seiner Indexmenge auch ohne nochmalige ausdrückliche Definition verwenden.

Beispielsweise ist das in 1. 23 definierte System S_1 eine Menge. Ein System S heiße *wohlgeordnet* (eigentlich genauer: nach eventuellem Übergang zu kleinerer Indexmenge wohlgeordnet), wenn S_1 durch die Relation $\subset$ (oder also Γ_1 durch die Relation $<$) wohlgeordnet ist.

Ein System S heiße

(w) *wohlordnungsgefiltert*, wenn zu jeder Untermenge $T\subseteq\Gamma$, für die das System $S_{(T)}$ wohlgeordnet ist, und zu jedem $\nu'\in\Gamma$, das für alle $\nu\in T$ die Eigenschaft $X_{\nu'} \nsubseteq X_\nu$ hat, ein $\nu''\in\Gamma$ existiert mit $X_\nu \subseteq X_{\nu''}$ für alle $\nu\in T$ und mit $X_{\nu'} \subseteq X_{\nu''}$.

1. 32 Voraussetzungen über Paare von Systemen

Zwei Systeme $S=\{X_\nu\}_{\nu\in\Gamma}$, $\tilde{S}=\{\tilde{X}_\nu\}_{\nu\in\Gamma}$ aus $\mathscr{K}$ heißen

(gg) *gleichheitsgleichartig*,

(wh) *(im weiteren Sinne) gleichartig halbgeordnet* bzw.

(sh) *streng gleichartig halbgeordnet*

(bei Ketten kann stets die Vorsilbe „halb" entfallen), wenn für je zwei ν, $\nu'\in\Gamma$ gilt:

(gg) $X_\nu = X_{\nu'}$, $\tilde{X}_\nu = \tilde{X}_{\nu'}$ oder $X_\nu \neq X_{\nu'}$, $\tilde{X}_\nu \neq \tilde{X}_{\nu'}$.

(wh) $X_\nu \subseteq X_{\nu'}$, $\tilde{X}_\nu \subseteq \tilde{X}_{\nu'}$ oder $X_{\nu'} \subseteq X_\nu$, $\tilde{X}_{\nu'} \subseteq \tilde{X}_\nu$ oder $X_\nu \mathrel{\substack{\not\subseteq\\ \not\supseteq}} X_{\nu'}$, $\tilde{X}_\nu \mathrel{\substack{\not\subseteq\\ \not\supseteq}} \tilde{X}_{\nu'}$.

(sh) $X_\nu = X_{\nu'}$, $\tilde{X}_\nu = \tilde{X}_{\nu'}$ oder $X_\nu \subset X_{\nu'}$, $\tilde{X}_\nu \subset \tilde{X}_{\nu'}$ oder $X_{\nu'} \subset X_\nu$, $\tilde{X}_{\nu'} \subset \tilde{X}_\nu$ oder $X_\nu \mathrel{\substack{\not\subseteq\\ \not\supseteq}} X_{\nu'}$, $\tilde{X}_\nu \mathrel{\substack{\not\subseteq\\ \not\supseteq}} \tilde{X}_{\nu'}$.

Gleichbedeutend hiermit ist:

(gg) Aus $X_\nu = X_{\nu'}$ folgt $\tilde{X}_\nu = \tilde{X}_{\nu'}$ und umgekehrt.

(wh) Aus $X_\nu \mathrel{\substack{\not\subseteq\\ \not\supseteq}} X_{\nu'}$ folgt $\tilde{X}_\nu \mathrel{\substack{\not\subseteq\\ \not\supseteq}} \tilde{X}_{\nu'}$ und umgekehrt;
aus $X_\nu \subset X_{\nu'}$ folgt $\tilde{X}_\nu \subseteq \tilde{X}_{\nu'}$;
aus $\tilde{X}_\nu \subset \tilde{X}_{\nu'}$ folgt $X_\nu \subseteq X_{\nu'}$.

(sh) Aus $X_\nu \subseteq X_{\nu'}$ folgt $\tilde{X}_\nu \subseteq \tilde{X}_{\nu'}$ und umgekehert.

Zwei Systeme S, $\tilde{S}$ aus $\mathscr{K}$ heißen **(üg)** *überdeckungsgleichartig*, wenn für jede Untermenge $T\subseteq\Gamma$ und für jedes $\nu'\in\Gamma$ gilt:

(üg) Aus $X_{\nu'} \subseteq V_{(T)}$ folgt $\tilde{X}_{\nu'} \subseteq \tilde{V}_{(T)}$ und umgekehrt.

1. 33 Beziehungen zwischen den Voraussetzungen

Zwischen diesen Voraussetzungen bestehen folgende Beziehungen:

(l)$\Rightarrow$**(w)**$\Rightarrow$**(f)**;

(t)$\Rightarrow$**(m)**;

(üg)$\Rightarrow$**(sh)**$\Rightarrow$**(wh)**,

(sh)$\Rightarrow$**(gg)**.

Die umgekehrten Schlüsse sind (im allgemeinen, d.h. ohne weitere Voraussetzungen über $\mathfrak{S}$) nicht richtig; wohl aber ist stets **(sh)**$\Leftrightarrow$**(wh)** & **(gg)**.

Die Relationen **(gg)**, **(sh)**, **(üg)** sind Äquivalenzrelationen; die Relation **(wh)** ist reflexiv und symmetrisch, aber (im allgemeinen) nicht transitiv.

Durch die Forderungen **(l)**, **(w)**, **(f)**, **(m)**, **(t)** werden aus $\mathscr{K}$ *Unterklassen* ausgesondert, die wir bezüglich $\mathscr{L}, \mathscr{W}, \mathscr{F}, \mathscr{M}, \mathscr{T}$ nennen.

Durch die Forderung, *zu einem gegebenen System S in der Relation* **(gg)**, **(wh)**, **(sh)** *oder* **(üg)** *zu stehen*, werden aus $\mathscr{K}$ (und ebenso auch aus $\mathscr{L}, \mathscr{W}, \mathscr{F}, \mathscr{M}$ oder $\mathscr{T}$) jeweils *weitere Unterklassen* ausgesondert. Dabei zerfällt allerdings $\mathscr{M}$ durch **(gg)** nicht weiter; ebenso $\mathscr{T}$ nicht durch **(gg)**, **(wh)** oder **(sh)**. Ferner sind die jeweils durch **(wh)** entstehenden Unterklassen (im allgemeinen) nicht sämtlich disjunkt.

Hiermit sind die Unterklassen definiert, auf die sich die allgemeine Beschreibung 1. 1 der Aufgabenstellung bezog.

Natürlich konnte man auch $\mathscr{K}$ selbst in ähnlicher Weise mit Hilfe einer Relation zwischen Mengensystemen, ohne Verwendung des Mächtigkeitensystems $\mathfrak{S}$, definieren, nämlich als Klasse derjenigen Mengensysteme, die *zu einem gegebenen System S (gleichindiziert und) gliedweise äquivalent* sind. Bei einigen der folgenden Sätze wird die Voraussetzung, zwei Systeme $S, \tilde{S}$ seien zu derselben Klasse $\mathscr{K}$ gehörig, mit Hilfe dieser Formulierung angegeben.

2. Ergebnisse

Wir stellen zunächst die herzuleitenden Aussagen über $\mathfrak{v}$ zusammen. Die trivialen unter ihnen werden hier auch kurz mitgenannt (soweit zur vorbereitenden und abrundenden Klärung der Situation notwendig); die übrigen werden dann weiter unten bewiesen.

Trotz der relativ großen Zahl trivialer Aussagen und obwohl auch die Beweise der übrigen Aussagen nicht allzu tiefliegend sind (wie es bei der Allgemeinheit unserer Voraussetzungen kaum anders zu erwarten war), ergibt sich zusammengenommen doch ein interessantes Gesamtbild. Scharf getrennt werden *durch die Ergebnisse* die beiden Voraussetzungsgruppen **(l)**, **(w)** und **(m)**, **(t)**, jede in sich eng zusammengehörig, und zwar in bemerkenswert analoger Weise. Eine eigenartige Mittelstellung nimmt die Voraussetzung **(f)** ein, je nach dem System $\mathfrak{S}$ (nämlich je nach dem Wert von $\mathfrak{t}$) schwankend zwischen genau so starken Folgerungsmöglichkeiten wie aus $S \in \mathscr{L}$ und genau so schwachen wie aus $S \in \mathscr{K}$.

Was hier zur Frage der Nichttrivialität gesagt wurde, zieht natürlich entsprechende Bemerkungen zur Neuartigkeit der Ergebnisse nach sich: Es wird ebenfalls kaum anders zu erwarten sein, als daß einige der nachstehenden Aussagen schon zu Hilfszwecken in Arbeiten über andere Themen bereits ausgesprochen sowie (vor allem) in anderem Zusammenhang voll- oder teilinhaltlich miterfaßt oder impliziert wurden; jedoch die hier aufgeworfene Fragestellung und das resultierende Gesamtbild (sowie sicher auch eine Reihe der Einzelaussagen und -beweise) sind meines Wissens neu.

2. 1 Aussagen über einzelne Systeme

2. 11 Beliebige Systeme aus $\mathscr{K}$

2. 111 Trivialerweise gilt stets $\mathfrak{s} \leqq \mathfrak{v} \leqq \mathfrak{z}$.

2. 112 Die untere Schranke in 2. 111 kann stets erreicht werden, d.h.: Für jedes $\mathfrak{S}$ gibt es Systeme S aus $\mathscr{K}$, und zwar genauer auch solche aus $\mathscr{L}$ (sogar wohlgeordnete), mit $\mathfrak{v} = \mathfrak{s}$. (Beweis: 3. 123)

2. 113 Trivialerweise kann auch die obere Schranke in 2. 111 stets erreicht werden, und zwar genauer auch durch Systeme aus $\mathscr{T}$; man wähle nämlich S als System paarweise disjunkter X_ν.

2. 12 Systeme aus $\mathscr{F}$

2. 121 Für Systeme aus $\mathscr{F}$ gilt stets $\mathfrak{s} \leqq \mathfrak{v} \leqq \mathfrak{t}$. (Beweis: Die nächste Behauptung und 3. 312.)

2. 122 Ist $\mathfrak{s}$ endlich, so ist stets $\mathfrak{v} = \mathfrak{s}$. (Beweis: 3. 311.)

2. 123 Sowohl (nach 2. 112) die untere als auch für unendliches $\mathfrak{s}$ die obere Schranke in 2. 121 kann stets erreicht werden. (Beweis: 3. 32.)

2. 13 Systeme aus $\mathscr{L}$ und $\mathscr{W}$

2. 131 Für Systeme aus $\mathscr{W}$ bleibt $\mathfrak{v}$ „in der Nähe" der unteren Schranke $\mathfrak{s}$: Entweder gilt $\mathfrak{v} = \mathfrak{s}$ oder es gibt eine Ordnungszahl σ mit $\mathfrak{s} = \aleph_\sigma$, $\mathfrak{v} = \aleph_{\sigma+1}$. (Beweis: 3. 121.)

2. 132 Ob hierbei $\mathfrak{v} = \aleph_{\sigma+1}$ möglich ist, hängt von $\mathfrak{S}$ ab. Wenn es für ein $\mathfrak{S}$ möglich ist, dann auch mit einem System S aus $\mathscr{L}$ (sogar mit einem wohlgeordneten); die schärfere Voraussetzung **(l)** (sogar die der Wohlordnung) schränkt $\mathfrak{v}$ also nicht stärker ein als die Voraussetzung **(w)**. (Beweis: 3. 125.)

2. 133 Die Alternative in 2. 131 und die Implikation in 2. 132 sind nichttrivial, d.h. der Fall $\mathfrak{s} = \aleph_\sigma$, $\mathfrak{v} = \aleph_{\sigma+1}$ kommt wirklich vor, und zwar für jede Ordnungszahl σ. (Beweis: 3. 131.)

2. 14 Systeme aus $\mathscr{M}$ und $\mathscr{T}$

2. 141 Es gibt eine kleinste Mächtigkeit $\mathfrak{k}(\mathscr{M})$ unter allen denjenigen Mächtigkeiten, die als $\mathfrak{v}$ für ein System S aus $\mathscr{M}$ auftreten können. Ebenso gibt es eine kleinste Mächtigkeit $\mathfrak{k}(\mathscr{T})$ für $\mathfrak{v}$ in $\mathscr{T}$. (Beweis: 3. 211.)

2. 142 Ist $\mathfrak{k}$ die Mächtigkeit aus 2. 141, so gilt $\mathfrak{k} \leqq \mathfrak{v} \leqq 2^{\mathfrak{k}} \cdot \mathfrak{k}$ für jedes System S aus $\mathscr{M}$ bzw. aus $\mathscr{T}$ (Beweis: 3. 212). Bei Annahme der Alephhypothese besteht somit, wenn $\mathfrak{z}$ unendlich ist, für Systeme aus $\mathscr{M}$ analoge „Variationsbreite" wie für solche aus $\mathscr{W}$, jedoch (s. 2. 113) „in der Nähe" der oberen Schranke $\mathfrak{z}$ aus 2. 111.

2. 143 Trivialerweise ist stets $\mathfrak{k}(\mathscr{M}) \leqq \mathfrak{k}(\mathscr{T})$. Für unendliches $\mathfrak{z}$ folgt jedoch bei Annahme der Alephhypothese stets $\mathfrak{k}(\mathscr{M}) = \mathfrak{k}(\mathscr{T})$ (Beweis: 3. 223 und 3. 224), auch läßt sich $\mathfrak{k}$ dann in Abhängigkeit von $\mathfrak{S}$ genauer angeben (siehe 3. 222 und 3. 225).

2. 144 Mit 2. 143 ist (bei Annahme der Alephhypothese) als triviale Folgerung das Analogon zu 2. 132 gezeigt: Ob der Fall $\mathfrak{v} < \mathfrak{z}$ (Existenz einer Ordnungszahl σ mit $\mathfrak{v} = \aleph_\sigma$, $\mathfrak{z} = \aleph_{\sigma+1}$) möglich ist, hängt von $\mathfrak{S}$ ab. Wenn es für ein $\mathfrak{S}$ möglich ist, dann sogar mit einem System S aus $\mathscr{T}$.

2. 145 Auch das Analogon zu 2. 133 gilt: Für jede Ordnungszahl σ kommt der Fall $\mathfrak{v} = \aleph_\sigma$, $\mathfrak{z} = \aleph_{\sigma+1}$ in $\mathscr{M}$ wirklich vor. (Beweis: 3. 213.)

2. 2 Aussagen über Paare von Systemen

Nun nennen wir Aussagen über Vergleichsmöglichkeiten zwischen den Mächtigkeiten $\mathfrak{v}$, $\tilde{\mathfrak{v}}$ der Vereinigungsmengen $V = \bigcup S$, $\tilde{V} = \bigcup \tilde{S}$ zweier Systeme S, $\tilde{S}$ aus $\mathscr{K}$.

Einleitend bemerke man zunächst hierzu, daß — in folgendem Sinne „im allgemeinen" — aus 2. 111 überhaupt kein Schluß gezogen werden kann: Für je zwei beliebig vorgegebene Mächtigkeiten $\mathfrak{r}$, $\tilde{\mathfrak{r}}$ gibt es ein System $\mathfrak{S}$, in welchem $\mathfrak{v} = \tilde{\mathfrak{r}}$ und $\tilde{\mathfrak{v}} = \tilde{\mathfrak{r}}$ möglich ist. Entsprechendes gilt bezüglich 2. 121, wenn $\mathfrak{r}$, $\tilde{\mathfrak{r}}$ unendlich sind; d.h. $\mathfrak{v} = \mathfrak{r}$, $\tilde{\mathfrak{v}} = \tilde{\mathfrak{r}}$ ist dann durch Wahl von $\mathfrak{S}$ auch innerhalb $\mathscr{F}$ erreichbar. — Man wähle z.B., wenn $\mathfrak{r} \leqq \tilde{\mathfrak{r}}$ gilt, $|\Gamma| = \tilde{\mathfrak{r}}$ und setze alle $\mathfrak{x}_\nu = \mathfrak{r}$.

2. 21 Systeme aus $\mathscr{L}$ und $\mathscr{W}$

2.211 Aus 2. 131 folgt trivialerweise: Sind S, $\tilde{S}$ beide aus $\mathscr{W}$, so ist entweder $\mathfrak{v} = \tilde{\mathfrak{v}}$ oder, wenn etwa $\tilde{\mathfrak{v}} < \mathfrak{v}$ ist, $\tilde{\mathfrak{v}} = \aleph_\sigma$, $\mathfrak{v} = \aleph_{\sigma+1}$ mit einer geeigneten Ordnungszahl σ.

2. 212 Dafür, daß stets $\mathfrak{v} = \tilde{\mathfrak{v}}$ folgt, ist bei Systemen aus $\mathscr{W}$ die Voraussetzung **(sh)** hinreichend, d.h. es gilt der Satz: Je zwei gliedweise äquivalente, streng gleichartig halbgeordnete, wohlordnungsgefilterte Systeme von Mengen haben äquivalente Vereinigungsmengen. (Beweis: 3. 122.) — Hervorgehoben sei der Spezialfall: Je zwei gliedweise äquivalente, streng gleichartig geordnete Mengenketten haben äquivalente Vereinigungsmengen.

2. 213 Für $\mathfrak{v} = \tilde{\mathfrak{v}}$ nicht hinreichend ist **(wh)**, selbst nicht bei Systemen aus $\mathscr{L}$: Es gibt zwei gliedweise äquivalente, gleichartig geordnete Ketten $\tilde{S}$, S mit $\tilde{\mathfrak{v}} = \aleph_\sigma$, $\mathfrak{v} = \aleph_{\sigma+1}$, und zwar für jede Ordnungszahl σ. Es gibt sogar wohlgeordnete derartige $\tilde{S}$, S. (Beweis: 3. 132.)

2. 214 Dasselbe (bis auf den letzten Zusatz; s. 2. 215) gilt für **(gg)** statt **(wh)**: Es gibt zwei gliedweise äquivalente, gleichheitsgleichartige Ketten $\tilde{S}$, S mit $\tilde{\mathfrak{v}} = \aleph_\sigma$, $\mathfrak{v} = \aleph_{\sigma+1}$, und zwar für jede Ordnungszahl σ. (Beweis: 3. 133 bis 3. 135.)

2. 215 Bei wohlgeordneten S, $\tilde{S}$ ist aber bereits **(gg)** hinreichend für $\mathfrak{v} = \tilde{\mathfrak{v}}$ (also anders als in 2. 112, 2. 132, 2. 213, wo aus der Voraussetzung der Wohlordnung nicht mehr als schon aus **(l)** folgte). (Beweis: 3. 124.)

2. 22 Systeme aus $\mathscr{M}$ und $\mathscr{T}$

2.221 Aus 2. 142 folgt trivialerweise: Sind $S, \tilde{S}$ beide aus $\mathscr{M}$, so gilt, wenn etwa $\mathfrak{v} \leqq \tilde{\mathfrak{v}}$ ist, $\mathfrak{v} \leqq \tilde{\mathfrak{v}} \leqq 2^{\mathfrak{v}} \cdot \mathfrak{v}$ (unter Annahme der Alephhypothese also, wenn $\mathfrak{v}$ unendlich ist, entweder $\mathfrak{v} = \tilde{\mathfrak{v}}$ oder $\mathfrak{v} = \aleph_\sigma$, $\tilde{\mathfrak{v}} = \aleph_{\sigma+1}$ mit einer geeigneten Ordnungszahl σ).

2. 222 Trivialerweise ist weder **(gg)** noch **(wh)** noch **(sh)** hinreichend für $\mathfrak{v} = \tilde{\mathfrak{v}}$, selbst nicht bei Systemen aus $\mathscr{T}$; denn diese Voraussetzungen sind für je zwei Systeme aus $\mathscr{T}$ erfüllt. (S. auch 3.226)

2. 23 Beliebige Systeme aus $\mathscr{K}$ und Systeme aus $\mathscr{F}$

2. 231 Aus 2. 221 folgt trivialerweise: Gilt **(gg)** für zwei Systeme $S, \tilde{S}$ aus $\mathscr{K}$, so gilt, wenn etwa $\mathfrak{v} \leqq \tilde{\mathfrak{v}}$ ist, $\mathfrak{v} \leqq \tilde{\mathfrak{v}} \leqq 2^{\mathfrak{v}} \cdot \mathfrak{v}$. Man kann nämlich aus S, $\tilde{S}$ durch Übergang zur gleichen Indexmenge Γ_1 zwei Mengen S_1, $\tilde{S}_1$ erhalten.

2. 232 Für $\mathfrak{v} = \tilde{\mathfrak{v}}$ nicht hinreichend ist **(sh)**, auch nicht bei Systemen aus $\mathscr{F}$: Es gibt zwei gliedweise äpuivalente, streng gleichartig halbgeordnete, nach oben gefilterte Systeme $\tilde{S}$, S mit $\tilde{\mathfrak{v}} = \aleph_\sigma$, $\mathfrak{v} > \aleph_\sigma$ (bei Annahme der Alephhypothese wegen 2. 231 also genau $\mathfrak{v} = \aleph_{\sigma+1}$), und zwar für jede Ordnungszahl σ. (Beweis: 3. 33.)

2. 233 Bei unendlichen Vereinigungsmengen stets hinreichend für deren Äquivalenz ist **(üg)**: Haben zwei gliedweise äquivalente, überdeckungsgleichartige Systeme S, $\tilde{S}$ nicht beide endliche Vereinigungsmengen V, $\tilde{V}$, so gilt $\mathfrak{v} = \tilde{\mathfrak{v}}$. (Beweis: 3. 4.) — Für endliche V, $\tilde{V}$ kann ein solcher Satz nicht gelten, wie etwa das Beispiel $\Gamma = \{1, 2\}$, $X_1 = \tilde{X}_1 = \{1, 2\}$, $X_2 = \{2, 3\}$, $\tilde{X}_2 = \{3, 4\}$ zeigt.

3. Beweise

3. 1 Systeme aus $\mathscr{L}$ und $\mathscr{W}$

3. 11 Allgemeine Bestimmung von $\mathfrak{v}$

3. 111 Es sei $S = \{X_\nu\}_{\nu \in \Gamma}$ ein System aus $\mathscr{W}$. Wie in 1. 23 gehen wir zur Indexmenge Γ_1 über. S_1 bleibt wohlordnungsgefiltert (und auch, falls S Kette war, Kette).

In der Menge Γ_1 (s. 1. 31) und damit in allen ihren Untermengen ist die Relation $<$ erklärt.

3. 112 Sei nun $\mathfrak{D}$ die Menge aller derjenigen Untermengen von Γ_1, die durch $<$ wohlgeordnet sind. In $\mathfrak{D}$ wird eine Halbordnung $\prec$ definiert, indem man genau dann $D \prec D'$ setzt, wenn D Abschnitt von D' ist ($D, D' \in \mathfrak{D}$). Dann kann man das Zornsche Lemma anwenden und erhält die Existenz eines (bezüglich $\prec$) maximalen $\Delta \in \mathfrak{D}$.

Für die Teilsysteme $\mathfrak{S}_{1(\Delta)}$, $S_{1(\Delta)}$ von $\mathfrak{S}_1$, S_1 gilt jedenfalls $\sup \mathfrak{S}_{1(\Delta)} \leqq \mathfrak{s}$ und $\bigcup S_{1(\Delta)} \subseteqq V$. Ferner ist $S_{1(\Delta)}$ wohlgeordnet. Wegen der Gültigkeit von **(w)** für S_1 folgte daher aus jeder der Annahmen $\sup \mathfrak{S}_{1(\Delta)} < \mathfrak{s}$ und $\bigcup S_{1(\Delta)} \subset V$ die Existenz eines $i_1 \in \Gamma_1$ mit $X_i \subset X_{i_1}$ für alle $i \in \Delta$, im Widerspruch zur Maximalität von Δ. Also bleibt $\sup \mathfrak{S}_{1(\Delta)} = \mathfrak{s}$ und $\bigcup S_{1(\Delta)} = V$.

3. 113 Ist $\mathfrak{s}$ endlich, so besitzt Δ ein größtes Element i^*, und es folgt $\mathfrak{v} = \mathfrak{x}_{i^*} = \mathfrak{s}$. (Vgl. auch 3. 311.)

3. 114 Sei nun $\mathfrak{s}$ unendlich, etwa $\mathfrak{s} = \aleph_\sigma$. Sei ferner Δ vom Typ δ, ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei Δ selbst als die Menge $W(\delta)$ aufgefaßt; weiter sei $|\Delta| = \mathfrak{d}$ gesetzt. Wir beweisen $\mathfrak{d} \leqq \aleph_{\sigma+1}$.

Hierzu sei $i^* = \sup \Delta$ sowie $\Delta^* = W(i^*)$ und $|\Delta^*| = \mathfrak{d}^*$ gesetzt; für jedes $i \in \Delta^*$ werde ferner $P_i = X_{i+1} \setminus X_i$ definiert. Wählt man sodann für X_0 und alle P_i ($i \in \Delta^*$) je eine Wohlordnung, so ergibt sich für jedes X_i ($i \in \Delta$) eine Wohlordnung. Wird hierbei X_i vom Typ ξ_i, so ist $\Psi = \{\xi_i\}_{i \in \Delta}$ eine wachsende Folge vom Typ δ, für deren Supremum, die Ordnungszahl $\psi = \sup \Psi$, daher $\delta \leqq \psi + 1$ gilt. Wäre nun $\aleph_{\sigma+1} < \mathfrak{d}$, so folgte $\omega_{\sigma+1} + 1 < \delta$, also $\omega_{\sigma+1} < \psi$ und hieraus die Existenz eines $i_0 \in \Delta$ mit $\omega_{\sigma+1} \leqq \xi_{i_0}$ im Widerspruch zu $\mathfrak{x}_{i_0} \leqq \mathfrak{s} = \aleph_\sigma$.

3. 115 Um nun zur Bestimmung von $\mathfrak{v}$ zu kommen, setzen wir noch $|P_i| = \mathfrak{p}_i$ ($i \in \Delta^*$) und bezeichnen das Supremum des Systems $\mathfrak{P} = \{\mathfrak{p}_i\}_{i \in \Delta^*}$ mit $\mathfrak{p} = \sup \mathfrak{P}$, seine Summe mit $\mathfrak{q} = \Sigma \mathfrak{P}$.

Dann gilt $\mathfrak{p} \leqq \mathfrak{s} \leqq \mathfrak{v}$ und $\mathfrak{v} = \mathfrak{x}_0 + \mathfrak{q}$. Aus der letzten Gleichung folgt einerseits $\mathfrak{v} \leqq \mathfrak{x}_0 + \mathfrak{d} \cdot \mathfrak{p}$, andererseits $\mathfrak{v} \geqq 1 + \mathfrak{d}^* = \mathfrak{d}$. Nun unterscheiden wir zwei Fälle:

3. 116 Im Falle $\mathfrak{d} \leqq \mathfrak{s}$ erhalten wir $\mathfrak{v} \leqq \mathfrak{s} + \mathfrak{s}^2 = \mathfrak{s}$, also $\mathfrak{v} = \mathfrak{s}$.

3. 117 Im Falle $\mathfrak{s} < \mathfrak{d}$ erhalten wir $\mathfrak{v} \leqq \mathfrak{s} + \mathfrak{d} \cdot \mathfrak{s} = \mathfrak{d}$, also $\mathfrak{v} = \mathfrak{d}$.

3. 12 Folgerungen aus 3. 11

3. 121 Aus 3. 113, 3. 114, 3. 116, 3. 117 folgt 2. 131.

3.122 Aus 3. 11, sogar ohne Verwendung von 3. 114, läßt sich sogleich 2. 212 herleiten: Wegen der Voraussetzung **(sh)** ergibt sich in 3. 111 für S und $\tilde{S}$ dasselbe Γ_1, und in 3. 112 kann für S, $\tilde{S}$ dasselbe Δ genommen werden. Also verläuft die Fallunterscheidung 3. 113, 3. 116, 3. 117 für S und $\tilde{S}$ gleichlautend, woraus $\mathfrak{v} = \tilde{\mathfrak{v}}$ folgt.

3. 123 Zum Beweis von 2. 112 wähle man S so, daß für je zwei $\nu, \nu' \in \Gamma$ aus $\mathfrak{x}_\nu = \mathfrak{x}_{\nu'}$ stets $X_\nu = X_{\nu'}$ folgt, aus $\mathfrak{x}_\nu < \mathfrak{x}_{\nu'}$ dagegen $X_\nu \subset X_{\nu'}$. Dann wird (S und) S_1 wohlgeordnet, in 3. 112 kann also $\Delta = \Gamma_1$, d.h. $S_{1(\Delta)} = S_1$, genommen werden, und hierbei ist überdies $\Gamma_1 = \Gamma^*$, also $\mathfrak{d} = \mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}^* \leqq \mathfrak{s}$. Daher scheidet Fall 3. 117 aus; somit ist $\mathfrak{v} = \mathfrak{s}$.

3. 124 Ähnlich (ebenfalls ohne Verwendung von 3. 114) folgt 2. 215: Wegen **(gg)** ergibt sich für S und $\tilde{S}$ dasselbe Γ_1 (nur mit möglicherweise verschieden definierter Relation $<$, einmal entsprechend zu $\subset$ in S, das andere Mal in $\tilde{S}$). Nach Voraussetzung sind S_1, $\tilde{S}_1$ (durch die jeweils in ihnen geltende Relation $\subset$) wohlgeordnet, also kann für beide $\Delta = \Gamma_1$ genommen werden, so daß für sie wieder 3. 113, 3. 116, 3. 117 gleichlautend verläuft.

3. 125 Wir kommen zum Beweis von 2. 132. Voraussetzungsgemäß sei ein System S aus $\mathscr{W}$ mit $\mathfrak{v} = \aleph_{\sigma+1}$ gegeben; gesucht ist eine zu S gliedweise äquivalente, wohlgeordnete Kette $\tilde{S}$ mit $\tilde{\mathfrak{v}} = \aleph_{\sigma+1}$.

Aus S bilden wir S_1 und $S_{1(\Delta)}$ wie in 3. 111, 3. 112.

Ferner definieren wir eine Äquivalenzrelation $\underline{\square}$ in Γ, indem wir genau dann $\nu \,\underline{\square}\, \nu'$ setzen ($\nu, \nu' \in \Gamma$), wenn einer der folgenden Fälle vorliegt:

(a) Es gibt ein $\check{i} \in \Delta$ mit $\nu \in \check{i}$ und $\nu' \in \check{i}$.

(b) Für alle $i \in \Delta$ gilt $\nu \notin i$; es gilt $\nu' \in \check{i}_0$, wobei $\check{i}_0$ das minimale Element der Menge aller derjenigen $i \in \Delta$ ist, für die $\mathfrak{x}_i = \mathfrak{x}_\nu$ gilt.

(c) Wie **(b)**, nur mit Vertauschung von ν und ν'.

(d) Für alle $i \in \Delta$ gilt $\nu \notin i$ und $\nu' \notin i$; es ist $\mathfrak{x}_\nu = \mathfrak{x}_{\nu'}$.

Die Reflexivität und Symmetrie von $\underline{\square}$ sind klar; die Transitivität kann man zeigen, indem man $\nu_1 \,\underline{\square}\, \nu_2$ und $\nu_2 \,\underline{\square}\, \nu_3$ annimmt und für ν_1, ν_2, ν_3 je die beiden Fälle diskutiert, ob $\nu_j \notin i$ für alle $i \in \Delta$ gilt oder nicht ($j = 1, 2, 3$).

Nach 1. 22 kann man durch Übergang zur Indexmenge $\Gamma^\square = \Gamma / \underline{\square}$ das System $\mathfrak{S}^\square = \{\mathfrak{x}_k\}_{k \in \Gamma^\square}$ bilden.

Wir wollen ein $k \in \Gamma^\square$ *zu* Δ *passend* nennen, wenn ein $\check{i} \in \Delta$ existiert, so daß für ein (und folglich für jedes) $\nu \in \check{i}$ auch $\nu \in k$ gilt. Dieses $\check{i}$ ist durch k eindeutig bestimmt; wir nennen k auch *zu* $\check{i}$ *passend.*

Nun wird in $\Gamma^\square$ eine Ordnungsrelation, sogar eine Wohlordnung, $\overset{\square}{\leqq}$ definiert, indem man genau dann $k \overset{\square}{\leqq} k'$ setzt ($k, k' \in \Gamma^\square$), wenn entweder k, k' zu $\check{i}, \check{i}'$ ($\in \Delta$) passend sind und $\check{i} \leqq \check{i}'$ gilt oder aber k, k' nicht beide zu Δ passend sind und $\mathfrak{x}_k < \mathfrak{x}_{k'}$ gilt. Die Wohlordnungseigenschaft dieser Relation $\overset{\square}{\leqq}$ ergibt sich daraus, daß einerseits Δ wohlgeordnet ist und andererseits für je zwei verschiedene $k, k' \in \Gamma^\square$, die nicht beide zu Δ passend sind, $\mathfrak{x}_k \neq \mathfrak{x}_{k'}$ gilt.

Nunmehr folgt, daß man eine wohlgeordnete Kette $\tilde{S}_1 = \{\tilde{X}_k\}_{k \in \Gamma^\square}$ (mit $|\tilde{X}_k| = \mathfrak{x}_k$ für alle $k \in \Gamma^\square$) bilden kann, in welcher stets, wenn ein k ($\in \Gamma^\square$) zu einem $\check{i}$ ($\in \Delta$) passend ist, $\tilde{X}_k = X_{\check{i}}$ gilt, und in welcher aus $k \overset{\square}{\leqq} k'$ stets $\tilde{X}_k \subset \tilde{X}_{k'}$ folgt ($k, k' \in \Gamma^\square$).

Schließlich bilden wir $\tilde{S} = \{\tilde{X}_\nu\}_{\nu \in \Gamma}$, indem wir für $\nu \in k$ stets $\tilde{X}_\nu = \tilde{X}_k$ definieren ($k \in \Gamma^\square$). Die Bezeichnung $\tilde{S}_1$ für das System $\{\tilde{X}_k\}_{k \in \Gamma^\square}$ ist damit im Sinne von 123 erfolgt.

Hiernach (und wegen 3. 112) genügt es, $\bigcup \tilde{S}_1 = \bigcup S_{1(\Delta)}$ zu beweisen. Das folgt aber daraus, daß wegen $\sup \mathfrak{S}_{1(\Delta)} = \mathfrak{s}$ zu jedem $k \in \Gamma^{\square}$, das nicht zu Δ passend ist, ein zu Δ passendes k' mit $\mathfrak{x}_k < \mathfrak{x}_{k'}$, also $k \stackrel{\square}{<} k'$, existiert.

3. 13 Spezielle Systeme

3. 131 Zum Beweis von 2. 133 sei eine Ordnungszahl σ gegeben. Dann wählen wir $\Gamma = W(\omega_{\sigma+1}) \setminus W(\omega_\sigma)$, und für jedes $\nu \in \Gamma$ definieren wir $X_\nu = W(\nu)$.

Es wird, wie behauptet, ($|X_\nu| = \aleph_\sigma$ für alle $\nu \in \Gamma$, also) $\mathfrak{s} = \aleph_\sigma$, ferner wird $\mathfrak{v} = \aleph_{\sigma+1}$, und schließlich ist $S = \{X_\nu\}_{\nu \in \Gamma}$ auch wohlgeordnet.

3. 132 Zum Beweis von 2. 213 wählen wir dasselbe Γ und S wie eben, und für jedes $\nu \in \Gamma$ definieren wir $\tilde{X}_\nu = W(\omega_\sigma)$.

Die Behauptungen, daß $\tilde{S} = \{\tilde{X}_\nu\}_{\nu \in \Gamma}$ wohlgeordnet ist, daß $\mathfrak{s} = \mathfrak{v} = \aleph_\sigma$ gilt, sowie die Behauptung **(wh)** für $\tilde{S}$, S sind trivialerweise erfüllt.

3.133 Zum Beweis von 2. 214 wählen wir wieder dasselbe Γ und S wie eben, aber $\tilde{S} = \{\tilde{X}_\nu\}_{\nu \in \Gamma}$ definieren wir jetzt folgendermaßen:

Es sei ϱ die kleinste Ordnungszahl mit $\aleph_\sigma^{\aleph_\varrho} > \aleph_\sigma$; es sei etwa $\aleph_\sigma^{\aleph_\varrho} = \aleph_\varphi$. Da in 2. 214 nur eine Existenzbehauptung vorliegt, brauchen wir ϱ und φ nicht genauer zu bestimmen und kommen folglich ohne Alephhypothese aus. Jedenfalls ist $\varrho \leqq \sigma < \varphi$.

Weiter sei H die Menge aller Folgen $h = \{\eta_\iota\}_{\iota < \omega_\varrho}$ vom Typ ω_ϱ, und $\hat{H}$ sei die Menge aller Folgen $\hat{h} = \{\hat{\eta}_\iota\}_{\iota < I}$, deren Typ I kleiner als ω_ϱ ist, wobei die η_ι, $\hat{\eta}_\iota$ in jedem Fall aus der Menge $W(\omega_\sigma)$ zu nehmen sind und die Folgen $\{0\}$ (d.h. $\eta_\iota = 0$ bzw. $\hat{\eta}_\iota = 0$ für alle $\iota < \omega_\varrho$ bzw. $\iota < I$) ausgeschlossen werden. Es ist $|H| = \aleph_\varphi$ und $|\hat{H}| = \sum_{I < \omega_\varrho} \aleph_\sigma = \aleph_\varrho \cdot \aleph_\sigma = \aleph_\sigma$.

Ferner können wir $\hat{H}$ in H einbetten, d.h. wir können jede Folge $\hat{h} \in \hat{H}$ als spezielle Folge $h \in H$ auffassen, indem wir nämlich $\eta_\iota = \hat{\eta}_\iota$ für alle $\iota < I$ sowie zusätzlich $\eta_\iota = 0$ für alle ι mit $I \leqq \iota < \omega_\varrho$ definieren.

Schließlich bezeichne $<$ die lexikographische Ordnung von H.

3. 134 Dann gilt zunächst: Zu je zwei Folgen $h = \{\eta_\iota\}_{\iota < \omega_\varrho}$, $h' = \{\eta'_\iota\}_{\iota < \omega_\varrho}$ aus H mit $h < h'$ gibt es eine Folge $\hat{h} \in \hat{H}$ mit $h < \hat{h} < h'$.

Ist nämlich ι_0 die kleinste Ordnungszahl mit $\eta_{\iota_0} \neq \eta'_{\iota_0}$, so ist $\eta_{\iota_0} < \eta'_{\iota_0}$, und man setze $I = \iota_0 + 2$ sowie

$$\hat{\eta}_\iota = \eta_\iota = \eta'_\iota \quad (\iota < \iota_0); \qquad \hat{\eta}_{\iota_0} = \eta_{\iota_0}; \qquad \hat{\eta}_{\iota_0+1} = \eta_{\iota_0+1} + 1.$$

3.135 Wegen $|H| \geqq \aleph_{\sigma+1}$ können wir nun eine eineindeutige Abbildung f von Γ in H wählen, und dann definieren wir: Für jedes $\nu \in \Gamma$ sei $\tilde{X}_\nu$ die Menge aller Folgen $\hat{h} \in \hat{H}$ mit $\hat{h} < f(\nu)$.

Ist etwa $f(\nu) = h = \{\eta_\iota\}_{\iota < \omega_\varrho}$, und ist ι_1 die kleinste Ordnungszahl mit $\eta_{\iota_1} \neq 0$, so enthält $\tilde{X}_\nu$ einerseits die Menge aller $\hat{h} = \{\hat{\eta}_\iota\}_{\iota < \iota_1 + 2}$ mit $\hat{\eta}_\iota = 0$, für $i \leqq i_1$ und diese Menge, äquivalent zur Menge $W(\omega_\sigma)$ aller Ordnungszahlen $\hat{\eta}_{\iota_1+1} < \omega_\sigma$, hat die Mächtigkeit $\aleph_\sigma$. Andererseits ist $\tilde{X}_\nu \subseteqq \tilde{V} \subseteqq \hat{H}$, so daß die Behauptungen $|\tilde{X}_\nu| = \aleph_\sigma$ $(\nu \in \Gamma)$ und $\tilde{\mathfrak{v}} = \aleph_\sigma$ gezeigt sind.

Die Behauptungen **(l)** für $\tilde{S}$ und **(gg)** für $\tilde{S}$, S schließlich ergeben sich aus folgender Feststellung, die man ihrerseits aus 3. 134 erhält: Ist $\nu \neq \nu'$, also $f(\nu) \neq f(\nu')$, und ist dabei etwa $f(\nu) < f(\nu')$, so gilt $\tilde{X}_\nu \subset \tilde{X}_{\nu'}$.

3.2 Systeme aus $\mathcal{M}$ und $\mathscr{T}$

3.21 Existenz von $\mathfrak{k}$ und Abschätzung für $\mathfrak{v}$

3.211 Die Behauptungen in 2.141 erscheinen durchaus einleuchtend; eine Darstellung ihres Beweises sollte höchstens insofern angebracht sein, als man sich zu überzeugen hat, daß die Entscheidung, ob eine Mächtigkeit $\mathfrak{m}$ als $\mathfrak{v}$ (eines Systems aus $\mathcal{M}$ bzw. $\mathscr{T}$) auftreten kann, nicht etwa die Betrachtung „aller" Elemente einer Klasse ohne Mengencharakter (z.B. „aller" Systeme aus $\mathcal{M}$ bzw. $\mathscr{T}$) erfordert.

Wir führen die Beweise der Existenz von $\mathfrak{k}(\mathcal{M})$ und $\mathfrak{k}(\mathscr{T})$ gleichzeitig, wobei durch ${}^*_*\langle\,\rangle^*_*$ gekennzeichnete Zusätze nur zu dem auf $\mathfrak{k}(\mathscr{T})$ bezüglichen Beweis gehören.

Zunächst kann nach 2.113 jedenfalls $\mathfrak{z}$ als ein $\mathfrak{v}$ auftreten. Zu zeigen ist somit vor allem: Für die Menge $\mathfrak{Z}$ aller Mächtigkeiten $\mathfrak{m} \leqq \mathfrak{z}$ existiert diejenige Funktion $p\colon \mathfrak{Z} \to \{0,1\}$, die einer Mächtigkeit $\mathfrak{m}$ genau dann den Wert $p(\mathfrak{m}) = 1$ zuordnet, wenn $\mathfrak{m}$ als $\mathfrak{v}$ auftreten kann.

Hierzu sei m eine Menge mit $|m| = \mathfrak{m}$; ferner sei M die Potenzmenge von m; schließlich sei $\mathfrak{M}$ die Potenzmenge von M. Sodann sei $\mathfrak{N}$ die Untermenge aller $N \in \mathfrak{M}$ mit $\bigcup N = m$ und $N \sim \Gamma$. Zu jedem N sei G_N die Menge aller eineindeutigen Abbildungen von Γ auf N. Dann existiert die Funktion $q\colon \mathfrak{N} \to \{0,1\}$, die einem $N \in \mathfrak{N}$ genau dann den Wert $q(N) = 0$ zuordnet, wenn ${}^*_*\langle$ ein Paar $n_1, n_2 \in N$ mit $n_1 \subset n_2$ existiert oder anderfalls $\rangle^*_*$ für jedes $g \in G_N$ ein $v \in \Gamma$ mit $|g(v)| \neq \mathfrak{x}_v$ existiert.

Wird nun m durch eine eineindeutige Abbildung l auf eine Menge m' abgebildet, so induziert l eine eineindeutige, bezüglich $\subset$, $\bigcup$ und $\sim$ relationstreue Abbildung L von M auf die Potenzmenge M' von m'; man definiere für $n \in M$ nämlich $L(n)$ als Wertmenge von $l|n$. Ebenso induziert L eine eineindeutige Abbildung $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{M}$ auf die Potenzmenge $\mathfrak{M}'$ von M'. Die Wertmenge $\mathfrak{N}'$ von $\mathfrak{L}|\mathfrak{N}$ wird dann die Menge aller $(\mathfrak{L}(N) =)\; N' \in \mathfrak{M}'$ mit $\bigcup N' = m'$ und $N' \sim \Gamma$. Wir betrachten zu jedem $N \in \mathfrak{N}$ wieder die Menge $G'_{\mathfrak{L}(N)}$ aller eineindeutigen Abbildungen von Γ auf $\mathfrak{L}(N)$. Es ergibt sich eine eineindeutige Abbildung Λ von G_N auf $G'_{\mathfrak{L}(N)}$, wenn man für jedes $g \in G_N$ das Bild $\Lambda(g)$, seinerseits eine Abbildung von Γ auf $\mathfrak{L}(N)$, durch die Festsetzung $\big(\Lambda(g)\big)(v) = L\big(g(v)\big)$ $(v \in \Gamma)$ definiert. Die Funktion $q'\colon \mathfrak{N}' \to \{0,1\}$, die durch $q'\big(\mathfrak{L}(N)\big) = q(N)$ $(N \in \mathfrak{N})$ definiert wird, hat somit wieder die Eigenschaft, genau dann $q'(N') = 0$ zu ergeben, wenn ${}^*_*\langle$ ein Paar $n'_1, n'_2 \in N'$ mit $n'_1 \subset n'_2$ existiert oder andernfalls $\rangle^*_*$ für jedes $g' \in G'_{N'}$ ein $v \in \Gamma$ mit $|g'(v)| \neq \mathfrak{x}_v$ existiert.

Die gesuchte Funktion p kann folglich eindeutig (nämlich unabhängig von der im folgenden zunächst formal auftretenden Wahl von m) so definiert werden, daß man genau dann $p(\mathfrak{m}) = 0$ setzt, wenn nach Wahl einer Menge m mit $|m| = \mathfrak{m}$ und nach Bildung von M, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ sich für alle $N \in \mathfrak{N}$ der Wert $q(N) = 0$ ergibt.

Steht nunmehr p zur Verfügung, so ist $\mathfrak{k}$ die kleinste Mächtigkeit $\mathfrak{m} \in \mathfrak{Z}$ mit $p(\mathfrak{m}) = 1$.

3.212 Beweis von 2.142: Es sei S ein beliebiges System aus $\mathcal{M}$ bzw. $\mathscr{T}$. Nach Definition von $\mathfrak{k}$ ist einerseits $\mathfrak{k} \leqq \mathfrak{v}$, andererseits gibt es auch ein System $\tilde{S}$ aus $\mathcal{M}$ bzw. $\mathscr{T}$ mit $\tilde{\mathfrak{v}} = \mathfrak{k}$. Nach 2.111 folgt hieraus zunächst $\mathfrak{s} \leqq \mathfrak{k}$; sodann aber ist $\tilde{S}$ eine Teilmenge der Potenzmenge von $\tilde{V}$, also gilt $\mathfrak{C} \leqq 2^{\mathfrak{k}}$. Daher erhalten wir $\mathfrak{v} \leqq \mathfrak{z} \leqq \mathfrak{C} \cdot \mathfrak{s} \leqq \leqq 2^{\mathfrak{k}} \cdot \mathfrak{k}$.

3.213 Ähnlich zieht man die Potenzmenge zum Beweis von 2. 145 heran: Man wähle bei gegebenem σ eine Menge V mit $|V| = \aleph_\sigma$ und dann $S = \{X_\nu\}_{\nu \in \Gamma}$ als Menge von Untermengen $X_\nu \subseteq V$, wobei man Γ mit $\mathfrak{C} = |\Gamma| = \aleph_{\sigma+1}$ wählt (dies ist möglich, da die Potenzmenge von V die Mächtigkeit $2^{\aleph_\sigma} \geqq \aleph_{\sigma+1}$ hat). Dabei kann man auch $\bigcup S = V$ erreichen, z.B. indem man $X_{\nu_0} = V$ (für ein $\nu_0 \in \Gamma$) wählt. Auch wird, wie behauptet, $\mathfrak{z} = \aleph_{\sigma+1}$, was man aus $\mathfrak{C} \leqq \mathfrak{z} \leqq \mathfrak{C} \cdot \mathfrak{s}$ ersieht.

3. 22 Bestimmung von $\mathfrak{k}$

3. 221 Der in 2. 143 ausgeschlossene Fall eines endlichen $\mathfrak{z}$ tritt genau dann ein, wenn $\mathfrak{C}$ und alle $\mathfrak{x}_\nu$ $(\nu \in \Gamma)$ endlich sind. In diesem Fall sind auch $\mathfrak{k}(\mathscr{M})$ und $\mathfrak{k}(\mathscr{T})$ endlich, und es kann $\mathfrak{k}(\mathscr{M}) < \mathfrak{k}(\mathscr{T})$ sein. Beispielsweise für $\Gamma = \{1, 2\}$, $\mathfrak{x}_1 = 1$, $\mathfrak{x}_2 = 2$ ist $\mathfrak{k}(\mathscr{M}) = 2$ und $\mathfrak{k}(\mathscr{T}) = 3$.

3. 222 Für unendliches $\mathfrak{z}$ behaupten wir nun, daß $\mathfrak{k}(\mathscr{M}) = \mathfrak{k}(\mathscr{T})$ die folgendermaßen definierte Mächtigkeit $\mathfrak{k}$ sei:

(a) Ist $\mathfrak{C}$ unendlich und sind alle $\mathfrak{x}_\nu$ $(\nu \in \Gamma)$ endlich, so ist $\mathfrak{k} = \mathfrak{C}$.

(b) Sind alle $\mathfrak{x}_\nu$ $(\nu \in \Gamma)$ dieselbe unendliche Mächtigkeit $\mathfrak{x}$, so ist $\mathfrak{k}$ die kleinste Mächtigkeit mit $\mathfrak{x} \leqq \mathfrak{k}$ und $\mathfrak{C} \leqq \mathfrak{k}^{\mathfrak{x}}$.

(c) Bei beliebigem System $\mathfrak{S}$ (mit unendlichem $\mathfrak{z}$) sind nach 3. 221 und 3. 222 (a), (b) die einzelnen $\mathfrak{k}_{(r)}$ $(r \in \Gamma^{\Diamond})$ bestimmt (zur Bezeichnungsweise s. 1. 26); sie bilden das System $\mathfrak{j} = \{\mathfrak{k}_{(r)}\}_{r \in \Gamma^{\Diamond}}$. Dann ist $\mathfrak{k} = \sup \mathfrak{j}$.

3. 223 Als ersten Teil des Beweises von 3. 222 zeigt man $\mathfrak{k} \leqq \mathfrak{v}$ für jedes S aus $\mathscr{M}$:

(a), (b): S ist eine Teilmenge der Menge Q aller derjenigen Untermengen von V, die (im Fall (a):) endlich sind bzw. (im Fall (b):) die Mächtigkeit $\mathfrak{x}$ haben. Im Fall (a) folgt hieraus $\mathfrak{C} \leqq |Q| = \mathfrak{v}$; im Fall (b) folgt $\mathfrak{x} \leqq \mathfrak{v}$ und $\mathfrak{C} \leqq |Q| = \mathfrak{v}^{\mathfrak{x}}$. In beiden Fällen besagt dies $\mathfrak{k} \leqq \mathfrak{v}$.

(c): Für jedes $r \in \Gamma^{\Diamond}$ ist $S_{(r)}$ ein System aus $\mathscr{M}_{(r)}$. Nach 3. 221 und dem zu (a), (b) Gezeigten ist also $\mathfrak{k}_{(r)} \leqq \mathfrak{v}_{(r)} \leqq \mathfrak{v}$ für alle $r \in \Gamma^{\Diamond}$, woraus die Behauptung folgt.

3. 224 Als zweiten Teil des Beweises von 3. 222 zeigt man, daß ein System $S = \{X_\nu\}_{\nu \in \Gamma}$ aus $\mathscr{T}$ mit $\mathfrak{v} = \mathfrak{k}$ existiert:

(a) Sei eine abzählbar unendliche Menge $C = \{c_1, c_2, \ldots\}$ disjunkt von Γ gewählt. Für jedes $\nu \in \Gamma$ werde $X_\nu = \{c_1, \ldots, c_{\mathfrak{x}_\nu - 1}, \nu\}$ gesetzt.

Dann wird $|X_\nu| = \mathfrak{x}_\nu$ $(\nu \in \Gamma)$, für $\nu \neq \nu'$ ferner $\nu \notin X_{\nu'}$ und $\nu' \notin X_\nu$; also gehört S zu $\mathscr{T}$, und wegen $\Gamma \subseteq V \subseteq C \cup \Gamma$ wird auch $\mathfrak{v} = \mathfrak{C}$.

(b) Hier unterscheiden wir folgende Unterfälle:

(I) $\mathfrak{C} \leqq \mathfrak{x}^{\mathfrak{x}}$.

Die in 3. 222 (b) definierte Mächtigkeit ist $\mathfrak{k} = \mathfrak{x}$; wir haben also ein S mit $\mathfrak{v} = \mathfrak{x}$ zu bilden.

Hierzu wählen wir zwei disjunkte Mengen C, K mit $|C| = |K| = \mathfrak{x}$ und eine eineindeutige Abbildung $\mathfrak{w}$ von C auf K. Diese induziert (wie in 3. 211 beschrieben) eine eineindeutige Abbildung $\mathfrak{W}$ der Potenzmenge von C auf die Potenzmenge von K.

Die Menge aller derjenigen Untermengen von C, die die Mächtigkeit $\mathfrak{x}$ haben, ist von der Mächtigkeit $\mathfrak{x}^{\mathfrak{x}} \geqq \mathfrak{C}$; also gibt es eine Menge $\{A_\nu\}_{\nu \in \Gamma}$ von Untermengen $A_\nu \subseteqq C$ mit $|A_\nu| = \mathfrak{x}$. Wir setzen $B_\nu = K \setminus \mathfrak{W}(A_\nu)$ und $X_\nu = A_\nu \cup B_\nu$ $(\nu \in \Gamma)$.

Dann wird $A_\nu \subseteqq X_\nu \subseteqq A_\nu \cup K$, also $|X_\nu| = \mathfrak{x}$ $(\nu \in \Gamma)$, für $\nu \neq \nu'$ ferner $A_\nu \mathrel{\substack{\subset\\ \supset}} A_{\nu'}$ oder $A_\nu \subset A_{\nu'}$, $B_{\nu'} \subset B_\nu$ oder $A_{\nu'} \subset A_\nu$, $B_\nu \subset B_{\nu'}$; folglich gehört S zu $\mathscr{T}$, und wegen $A_\nu \subseteqq V \subseteqq C \cup K$ $(\nu \in \Gamma)$ wird auch $\mathfrak{v} = \mathfrak{x}$.

(II) $\mathfrak{x}^{\mathfrak{x}} < \mathfrak{C}$; (die in 3. 222 (b) definierte Mächtigkeit ist also $\mathfrak{k} > \mathfrak{x}$; ferner sei) $\mathfrak{k} < \mathfrak{C}$.

Da andererseits definitionsgemäß $\mathfrak{k}^{\mathfrak{x}} \geqq \mathfrak{C}$ ist, folgt aus der Alephhypothese $\mathfrak{k}^{\mathfrak{x}} = \mathfrak{C}$. Ferner sei $\mathfrak{y}$ die kleinste Mächtigkeit mit $\mathfrak{k}^{\mathfrak{y}} > \mathfrak{k}$; dann ist also $\mathfrak{y} \leqq \mathfrak{x}$ und auch $\mathfrak{k}^{\mathfrak{y}} = \mathfrak{C}$.

Wir wählen zwei disjunkte Mengen C, K mit $|C| = |K| = \mathfrak{k}$. Die Menge aller derjenigen Untermengen von C, die die Mächtigkeit $\mathfrak{x}$ haben, ist von der Mächtigkeit $\mathfrak{k}^{\mathfrak{x}} = \mathfrak{C}$; also können wir sie in der Form $\{A_\nu\}_{\nu \in \Gamma}$ annehmen.

Nach dem in [1], § 33, 4. 1. a zitierten Satz (hier mit $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{y}$ statt der dortigen $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$) gibt es eine Zerlegung von K in eine Menge $\mathfrak{B}$ fast disjunkter Teilmengen der Mächtigkeit $\mathfrak{y}$ mit $|\mathfrak{B}| = \mathfrak{C}$, so daß wir also $\mathfrak{B} = \{B_\nu\}_{\nu \in \Gamma}$; $B_\nu \subseteqq K$; $|B_\nu| = \mathfrak{y}$ $(\nu \in \Gamma)$; B_ν, $B_{\nu'}$ fast disjunkt $(\nu \neq \nu')$ annehmen können.

Wir setzen dann $X_\nu = A_\nu \cup B_\nu$ $(\nu \in \Gamma)$ und erhalten wieder $|X_\nu| = \mathfrak{x} + \mathfrak{y} = \mathfrak{x}$ $(\nu \in \Gamma)$, ferner wegen $B_\nu \mathrel{\substack{\subset\\ \supset}} B_{\nu'}$ $(\nu \neq \nu')$ auch $S \in \mathscr{T}$ sowie schließlich $V = C \cup K$, also $\mathfrak{v} = \mathfrak{k}$.

(III) $\mathfrak{x}^{\mathfrak{x}} < \mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C} \leqq \mathfrak{k}$.

Definitionsgemäß ist dann sogar $\mathfrak{k} = \mathfrak{C}$; wir haben also ein S mit $\mathfrak{v} = \mathfrak{C}$ zu bilden.

Hierzu wählen wir eine von Γ disjunkte Menge C mit $|C| = \mathfrak{C}$. Die Menge aller derjenigen Untermengen von C, die die Mächtigkeit $\mathfrak{x}$ haben, ist von der Mächtigkeit $\mathfrak{C}^{\mathfrak{x}} \geqq \mathfrak{C}$; also gibt es eine Menge $\{A_\nu\}_{\nu \in \Gamma}$ von Untermengen $A_\nu \subseteqq C$ mit $|A_\nu| = \mathfrak{x}$.

Wir setzen $X_\nu = A_\nu \cup \{\nu\}$ $(\nu \in \Gamma)$. Ähnlich wie im Fall *(a)* sieht man $S \in \mathscr{T}$ und $\mathfrak{v} = \mathfrak{C}$.

(c) Wir wählen eine Menge $\mathfrak{A} = \{A_r\}_{r \in \Gamma^{\Diamond}}$ paarweise disjunkter Mengen A_r mit $|A_r| = \mathfrak{k}_{(r)}$ $(r \in \Gamma^{\Diamond})$. Nach 3. 221 und dem zu (a), (b) Gezeigten gibt es für jedes $r \in \Gamma^{\Diamond}$ ein Mengensystem $S_{(r)} = \{X_\nu\}_{\nu \in r}$ aus $\mathscr{T}_{(r)}$ mit $V_{(r)} = A_r$.

Das so erhaltene System $S = \{X_\nu\}_{\nu \in \Gamma}$ gehört dann zu $\mathscr{T}$. Für jedes $r \in \Gamma^{\Diamond}$ gilt ferner $\mathfrak{x}_\nu \leqq \mathfrak{k}_{(r)}$ für alle $\nu \in r$; hieraus folgt $\mathfrak{s} \leqq \mathfrak{k}$, nach 1. 25 also weiter $\mathfrak{C}^{\Diamond} \leqq \mathfrak{k}$. Somit ergibt sich $\mathfrak{v} = \Sigma \mathfrak{j} \leqq \mathfrak{C}^{\Diamond} \cdot \mathfrak{k} = \mathfrak{k}$, zusammen mit 3. 223 also $\mathfrak{v} = \mathfrak{k}$.

3. 225 Zum Teill unter nochmaliger Verwendung der Alephhypothese läßt sich die in3. 222 (b) charakterisierte Mächtigkeit $\mathfrak{k}$ auch genauer angeben:

(I) Ist $\mathfrak{x} = \aleph_\alpha$ und $\mathfrak{C} \leqq \aleph_{\alpha+1}$ (Fall (b)(I)), so ist $\mathfrak{k} = \mathfrak{x} = \aleph_\alpha$ ohne Alephhypothese.

(II) Ist $\mathfrak{x} = \aleph_\alpha$, $\mathfrak{C} = \aleph_{\gamma+1}$ und dabei $\operatorname{cf}(\gamma) \leqq \alpha < \gamma$ (was natürlich nur für singuläre Limeszahlen γ möglich ist) (Fall (b)(II)), so ist $\mathfrak{k} = \aleph_\gamma$.

(III) Ist $\mathfrak{x} = \aleph_\alpha$ sowie entweder $\mathfrak{C} = \aleph_\beta = \aleph_{\gamma+1}$, $\alpha < \operatorname{cf}(\gamma)$ oder $\mathfrak{C} = \aleph_\beta$, β Limeszahl, $\alpha < \beta$ (Fall (b)(III)), so ist $\mathfrak{k} = \mathfrak{C} = \aleph_\beta$.

3. 226 Als Folgerung aus 3. 225 (I) mit $\mathfrak{C} = \aleph_{\alpha+1}$ nennen wir noch: Für jede Ordnungszahl α existiert ein System $\mathfrak{S}$, für das $\mathfrak{k} = \aleph_\alpha$ und $\mathfrak{z} > \aleph_\alpha$ ist, zu welchem also zwei Systeme S, $\tilde{S}$ in $\mathscr{T}$ mit $\mathfrak{v} = \aleph_\alpha$, $\tilde{\mathfrak{v}} > \aleph_\alpha$ existieren. (Diese Aussage folgt an sich trivial aus 2. 145, 2. 144; doch sieht man hier, daß sie ohne Alephhypothese erhalten werden kann.)

3. 3 Systeme aus $\mathscr{F}$

3. 31 Abschätzung von $\mathfrak{v}$

Es sei $S=\{X_\nu\}_{\nu\in\Gamma}$ irgend ein System aus $\mathscr{F}$.

3. 311 Ist $\mathfrak{s}$ endlich, so hat Γ^* (in der Wohlordnung nach 1. 25) ein letztes Element μ^{**}; zu diesem sei ein $\nu^*\in\mu^{**}$ gewählt.

Gäbe es nun ein $x\in V$, $\notin X_{\nu^*}$, so gäbe es ein $\nu'\in\Gamma$ mit $x\in X_{\nu'}$, und wegen der Voraussetzung **(f)** folgte die Existenz eines $\nu''\in\Gamma$ mit $X_{\nu^*}\cup X_{\nu'}\subseteqq X_{\nu''}$, woraus der Widerspruch $|X_{\nu''}|>\mathfrak{x}_{\nu^*}$ resultierte.

Somit ist $V=X_{\nu^*}$, also $\mathfrak{v}=\mathfrak{x}_{\nu^*}=\mathfrak{s}$, und 2. 122 ist gezeigt.

3. 312 Ähnlich beweist man 2. 121 für unendliches $\mathfrak{s}$:

Gäbe es (in den Bezeichnungen aus 1. 29) ein $x\in V$, $\notin V_{(R(\pi)^*)}$, so gäbe es ein $\nu'\in\Gamma$ mit $x\in X_{\nu'}$, zu diesem und irgend einem $\nu^*\in R(\pi)^*$ weiter ein $\nu''\in\Gamma$ mit $X_{\nu^*}\cup X_{\nu'}\subseteqq X_{\nu''}$. Hieraus ergäbe sich $|X_{\nu''}|\geqq\mathfrak{x}_{\nu^*}$, also auch $\nu''\in R(\pi)^*$ und damit der Widerspruch $x\in X_{\nu''}\subseteqq V_{(R(\pi)^*)}$.

Somit ist $V=V_{(R(\pi)^*)}$, also $\mathfrak{v}=\mathfrak{v}_{(R(\pi)^*)}\leqq\mathfrak{z}_{(R(\pi)^*)}=\Sigma\mathfrak{u}^{(\pi)}=\mathfrak{t}$.

3. 32 Erreichung der oberen Schranke

Gegeben sei ein System $\mathfrak{S}$ mit unendlichem $\mathfrak{s}$. Wir wollen (wieder in den Bezeichnungen aus 1. 29) ein System $S\in\mathscr{F}$ mit $\mathfrak{v}=\mathfrak{t}$ bilden.

Im Fall $\mathfrak{s}=\mathfrak{t}$ gilt $\mathfrak{v}=\mathfrak{t}$ sogar für jedes S aus $\mathscr{F}$.

Nun sei $\mathfrak{s}<\mathfrak{t}$; ferner seien nicht alle $\mathfrak{x}_\nu(\nu\in\Gamma)$ endlich. In diesem Fall gehen wir folgendermaßen vor:

3. 321 Es sei etwa $\mathfrak{t}=\aleph_\tau$. Wir bilden eine Folge $\{E_\lambda\}_{\lambda<\omega_\tau}$ von paarweise disjunkten Mengen E_λ, wobei $|E_\lambda|=\mathfrak{s}$ für jedes $\lambda<\omega_\tau$ gilt.

Dann können wir weiter für jedes $\lambda<\omega_\tau$ eine Folge $\{J_\lambda^{(\mu)}\}_{\mu<\theta}$ von Untermengen $J_\lambda^{(\mu)}\subseteqq E_\lambda$ wählen, wobei erstens $|J_\lambda^{(\mu)}|=\mathfrak{x}_\mu$ für jedes $\mu<\theta$ gilt und zweitens aus $\mu\prec\mu'<\theta$ stets $J_\lambda^{(\mu)}\subset J_\lambda^{(\mu')}$ folgt.

3. 322 Nun definieren wir eine Menge $\mathfrak{R}$ von Ordnungszahlen, wozu wir folgende Unterfälle unterscheiden:

(A) Es gibt eine Ordnungszahl $\pi_1<\theta$, so daß erstens $\mathfrak{x}_{\pi_1}$ unendlich ist und zweitens $\mathfrak{c}_\mu<\mathfrak{t}$ für alle $\mu\in R(\pi_1)$ gilt. (Dieses π_1 ist dann auch geeignet als π im Sinne von 1. 29.)

In diesem Unterfall sei $\mathfrak{R}$ die Menge aller $\mu\in R(\pi_1)$ mit $\mathfrak{c}_\mu>\mathfrak{s}$.

(B) Es gibt keine Ordnungszahl π_1 wie in (A).

In diesem Unterfall sei $\mathfrak{R}$ die Menge aller $\mu\in R(\pi)$ mit $\mathfrak{c}_\mu=\mathfrak{t}$ (wobei zuvor ein im Sinne von 1. 29 definiertes π derart gewählt wurde, daß $\mathfrak{x}_\pi$ bereits unendlich ist).

3. 323 Die Menge $\mathfrak{R}$ hat folgende Eigenschaft: Zu je zwei Ordnungszahlen μ,μ' mit $\mu\leqq\mu'<\theta$ und $\mu\in\mathfrak{R}$ gibt es ein $\mu''\in\mathfrak{R}$ mit $\mu'\leqq\mu''$ und $\mathfrak{c}_\mu\cdot\mathfrak{c}_{\mu'}\leqq\mathfrak{c}_{\mu''}$. Der Beweis verläuft in den Unterfällen (A), (B) folgendermaßen:

(A) Es gilt $\mathfrak{s}<\mathfrak{c}_\mu<\mathfrak{t}$ und, da auch $\mu'\in R(\pi_1)$ ist, $\mathfrak{c}_{\mu'}<\mathfrak{t}$. Also ist $\mathfrak{s}<\mathfrak{c}_\mu\cdot\mathfrak{c}_{\mu'}<\mathfrak{t}$, und aus $\sup\mathfrak{u}^{(\mu')}=\mathfrak{t}$ folgt die Existenz eines μ'' mit $\mu'<\mu''$ und $\mathfrak{c}_\mu\cdot\mathfrak{c}_{\mu'}<\mathfrak{c}_{\mu''}\cdot\mathfrak{x}_{\mu''}$.

Hiernach muß $\mathfrak{s} < \mathfrak{c}_{\mu''}$ sein; denn andernfalls käme man zu $\mathfrak{c}_{\mu''} \cdot \mathfrak{x}_{\mu''} \leqq \mathfrak{s}$, was $\mathfrak{c}_{\mu} \cdot \mathfrak{c}_{\mu'} < \mathfrak{c}_{\mu''} \cdot \mathfrak{x}_{\mu''}$ widerspräche. Somit erhalten wir durch nochmalige Anwendung der letzten Ungleichung auch die noch fehlende Behauptung $\mathfrak{c}_{\mu} \cdot \mathfrak{c}_{\mu'} < \mathfrak{c}_{\mu''}$.

(B) Es gilt $\mathfrak{c}_{\mu} = \mathfrak{t}$ und, da auch $\mu' \in R(\pi)$ ist, $\mathfrak{c}_{\mu'} \leqq \mathfrak{t}$. Also ist $\mathfrak{c}_{\mu} \cdot \mathfrak{c}_{\mu'} = \mathfrak{t}$, und die Existenz von μ'' ist entweder (für $\mathfrak{c}_{\mu'} = \mathfrak{t}$) trivial ($\mu'' = \mu'$) oder aber (für $\mathfrak{c}_{\mu'} < \mathfrak{t}$) wegen der Voraussetzung (B) richtig.

3. 324 Schließlich definieren wir: Ist $\mu \notin \mathfrak{R}$, so sei $X_\nu = J_0^{(\mu)}$ für alle $\nu \in \mu^*$.

Ist $\mu \in \mathfrak{R}$, so wählen wir, wenn etwa $\mathfrak{c}_\mu = \aleph_{\chi_\mu}$ ist, eine eineindeutige Abbildung t_μ der Menge μ^* auf die Menge aller endlichen Untermengen von $W(\omega_{\chi_\mu})$ und setzen $X_\nu = \bigcup_{\lambda \in t_\mu(\nu)} J_\lambda^{(\mu)}$ für alle $\nu \in \mu^*$.

3. 325 Dann ist für jedes $\nu \in \Gamma$ zunächst X_ν die Vereinigungsmenge endlich vieler Mengen $J_\lambda^{(\mu)}$ (im Falle eines endlichen $\mathfrak{x}_\nu$ handelt es sich sogar um genau eine Menge $J_0^{(\mu)}$) der Mächtigkeit $\mathfrak{x}_\nu$; folglich ist $|X_\nu| = \mathfrak{x}_\nu$.

Wir zeigen, daß $S = \{X_\nu\}_{\nu \in \Gamma}$ auch **(f)** erfüllt. Seien also $\nu, \nu' \in \Gamma$ gegeben; gesucht ist ein $\nu'' \in \Gamma$ mit $X_\nu \cup X_{\nu'} \subseteqq X_{\nu''}$. Es sei etwa $\nu \in \mu^*$; $\nu' \in \mu'^*$, und ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei $\mu \leqq \mu'$ angenommen.

Ist $\mu \notin \mathfrak{R}$; $\mu' \notin \mathfrak{R}$, so ist $X_\nu \subseteqq X_{\nu'}$, also kann man $\nu'' = \mu'$ wählen.

Ist $\mu \notin \mathfrak{R}$; $\mu' \in \mathfrak{R}$, so wählen wir $\nu'' = t_{\mu'}^{-1}(\{0\} \cup t_{\mu'}(\nu'))$ und erhalten $X_\nu \cup X_{\nu'} \subseteqq J_0^{(\mu')} \cup X_{\nu'} = X_{\nu''}$.

Ist $\mu \in \mathfrak{R}$, so bestimmen wir μ'' nach 3. 323 und wählen, wenn $\mu' \notin \mathfrak{R}$ ist, $\nu'' = t_{\mu''}^{-1}(t_\mu(\nu) \cup \{0\})$; wenn aber $\mu' \in \mathfrak{R}$ ist, $\nu'' = t_{\mu''}^{-1}(t_\mu(\nu) \cup t_{\mu'}(\nu'))$. Dieses ν'' ist definiert; denn wegen $\omega_{\chi_\mu} \leqq \omega_{\chi_{\mu''}}$ und $\omega_{\chi_{\mu'}} \leqq \omega_{\chi_{\mu''}}$ wird $t_{\mu''}^{-1}$ in diesen Formeln jeweils auf eine endliche Untermenge von $W(\omega_{\chi_{\mu''}})$ angewandt. Es ergibt sich dann

$$X_\nu \cup X_{\nu'} \subseteqq \bigcup_{\lambda \in t_\mu(\nu)} J_\lambda^{(\mu'')} \cup J_0^{(\mu'')} = X_{\nu''} \quad \text{im Falle} \quad \mu' \notin \mathfrak{R}$$

und

$$X_\nu \cup X_{\nu'} \subseteqq \bigcup_{\lambda \in t_\mu(\nu)} J_\lambda^{(\mu'')} \cup \bigcup_{\lambda \in t_{\mu'}(\nu')} J_\lambda^{(\mu'')} = X_{\nu''} \quad \text{im Falle} \quad \mu' \in \mathfrak{R}.$$

Damit ist **(f)** bewiesen.

Schließlich gilt für alle $\mu \in \mathfrak{R}$ zunächst $\mathfrak{v}_{(\mu^*)} = \bigcup_{\lambda < \omega_{\chi\mu}} J_\lambda^{(\mu)} = \mathfrak{c}_\mu \cdot \mathfrak{x}_\mu$; nach 2. 111, auf das System $\{V_{(\mu^*)}\}_{\mu \in \mathfrak{R}}$ angewandt, folgt hieraus $\mathfrak{t} = \sup_{\mu \in \mathfrak{R}} \mathfrak{c}_\mu \cdot \mathfrak{x}_\mu \leqq \mathfrak{v}_{(\mathfrak{R}^*)} \leqq \mathfrak{v}$. Dies zusammen mit 2. 121' beweist die Behauptung $\mathfrak{v} = \mathfrak{t}$.

3. 326 Nun bleibt noch der Fall zu erledigen, daß $\mathfrak{s} < \mathfrak{t}$ gilt und alle $\mathfrak{x}_\nu (\nu \in \Gamma)$ endlich sind. Da $\mathfrak{s}$ als unendlich vorausgesetzt wurde, ist $\mathfrak{s} = \aleph_0$; ferner wird $\theta = \omega_0$; die Folge $\{\mu\}_{\mu < \theta}$ ist die Folge $\{0, 1, 2, \ldots\}$ aller nichtnegativen ganzen Zahlen, die Folge $\{\mathfrak{x}_\mu\}_{\mu < \theta}$ eine streng monoton steigende Folge positiver ganzer Zahlen.

Wir übernehmen die Definition von $\mathfrak{R}$ aus 3. 322, lassen jedoch die Forderung wegfallen, $\mathfrak{x}_{\pi_1}$ (bei (A)) bzw. $\mathfrak{x}_\pi$ (bei (B)) solle unendlich sein. Dann bleibt 3. 323 unverändert gültig und ergibt nun die Existenz einer abzählbar unendlichen Untermenge $\mathfrak{R}_1 \subseteqq \mathfrak{R}$, so daß nicht nur $\{\mathfrak{x}_\mu\}_{\mu \in \mathfrak{R}_1}$ streng monoton steigend, sondern auch $\{\mathfrak{c}_\mu\}_{\mu \in \mathfrak{R}_1}$ monoton steigend wird. Somit gibt es schließlich eine weitere Untermenge $\mathfrak{R}_2 \subseteqq \mathfrak{R}_1$, so daß erstens das eben Gesagte auch für $\{\mathfrak{x}_\mu\}_{\mu \in \mathfrak{R}_2}$, $\{\mathfrak{c}_\mu\}_{\mu \in \mathfrak{R}_2}$ gilt und zweitens jedesmal, wenn μ' der unmittelbare Nachfolger von μ innerhalb $\mathfrak{R}_2$ ist, sogar $\mathfrak{x}_{\mu'} \geqq 2\mathfrak{x}_\mu$ gilt.

Für das kleinste Element μ_0 aus $\mathfrak{R}_2$ wählen wir dann Mengen X_ν $(\nu \in \mu_0^*)$ mit $|X_\nu| = \mathfrak{x}_{\mu_0}$ paarweise disjunkt.

Es seien weiterhin für ein $\mu \in \mathfrak{R}_2$ schon alle X_ν $(\nu \in \mu^*)$ definiert, so daß $|X_\nu| = \mathfrak{x}_\mu$ ist. Dann sei wieder μ' der unmittelbare Nachfolger von μ in $\mathfrak{R}_2$. Wegen $\mathfrak{c}_\mu \leqq \mathfrak{c}_{\mu'}$ gibt es eine eineindeutige Abbildung d_μ von der Menge aller Paare $\nu_1, \nu_2 \in \mu^*$ $(\nu_1 \neq \nu_2)$ in die Menge μ'^*. Wir definieren für alle ν', die Bild bei d_μ, etwa $\nu' = d_\mu(\nu_1, \nu_2)$, sind, $X_{\nu'} = X_{\nu_1} \cup X_{\nu_2} \cup e_{\nu'}$, für alle anderen $\nu' \in \mu'^*$ aber $X_{\nu'} = e_{\nu'}$; hierbei seien die $e_{\nu'}$ paarweise disjunkt und so gewählt, daß $|X_{\nu'}| = \mathfrak{x}_{\mu'}$ für alle $\nu' \in \mu'^*$ gilt. (Letzteres ist wegen $\mathfrak{x}_{\mu'} \geqq 2\mathfrak{x}_\mu$ möglich.)

Für jede nichtnegative ganze Zahl $\tilde{\mu} \notin \mathfrak{R}_2$ schließlich sei das kleinste $\mu \in \mathfrak{R}_2$ mit $\mu > \tilde{\mu}$ gewählt, ferner irgend ein $\nu \in \mu^*$ und schließlich irgend eine Untermenge $e_{\tilde{\mu}} \subseteqq X_\nu$ mit $|e_{\tilde{\mu}}| = \mathfrak{x}_{\tilde{\mu}}$. Dann definieren wir $X_{\tilde{\nu}} = e_{\tilde{\mu}}$ für alle $\tilde{\nu} \in \tilde{\mu}^*$.

Das so definierte System $S = \{X_\nu\}_{\nu \in \Gamma}$ erfüllt $|X_\nu| = \mathfrak{x}_\nu$ $(\nu \in \Gamma)$; auch läßt sich **(f)** leicht nachweisen (Zurückführung auf **(f)** für $S_{(\mathfrak{R}_2^*)}$; dort Existenz von ν'' zu ν, ν' durch vollständige Induktion nach $|\mu - \mu'|$). Schließlich zeigt man, ähnlich wie in 3. 325, auch $\mathfrak{t} = \sup_{\mu \in \mathfrak{R}_2} \mathfrak{c}_\mu \leqq \mathfrak{v}_{(\mathfrak{R}_2^*)} \leqq \mathfrak{v}$, also $\mathfrak{v} = \mathfrak{t}$.

3. 33 Spezielle Systeme

Einen Beweis von 2. 232 erhalten wir durch Kombination von Motiven aus 3. 133 ff. und 3. 32.

Zu gegebenem σ bestimme man ϱ, φ, H und $\hat{H}$ wie in 3. 133.

Für jedes $h \in H$ sei jetzt $\tilde{J}_h$ die Menge aller Paare $(\hat{h}_1, \hat{h}_2)$ mit $\hat{h}_1, \hat{h}_2 \in \hat{H}$ und $\hat{h}_1 < h < \hat{h}_2$.

Außerdem aber sei eine durch H indizierte Menge $\{J_h\}_{h \in H}$ paarweise disjunkter Mengen J_h gewählt, wobei $|J_h| = \aleph_\sigma$ für jedes $h \in H$ gelte.

Sodann sei als Γ eine Menge der Mächtigkeit $\aleph_\varphi$ genommen, und t sei eine eineindeutige Abbildung von Γ auf die Menge aller endlichen Untermengen von H. Wir setzen $\tilde{X}_\nu = \bigcup_{h \in t(\nu)} \tilde{J}_h$; $X_\nu = \bigcup_{h \in t(\nu)} J_h$ $(\nu \in \Gamma)$.

Ähnlich wie in 3. 135 ergibt sich $|\tilde{X}_\nu| = \aleph_\sigma$ $(\nu \in \Gamma)$ und $\mathfrak{v} = \aleph_\sigma$; ferner ist trivialerweise $|X_\nu| = \aleph_\sigma$ $(\nu \in \Gamma)$ und $\mathfrak{v} = \aleph_\varphi$.

Die Gültigkeit von **(f)** folgt ähnlich wie in 3. 32: Zu gegebenen $\nu, \nu' \in \Gamma$ setze man $\nu'' = t^{-1}(t(\nu) \cup t(\nu'))$, dann wird $\tilde{X}_\nu \cup \tilde{X}_{\nu'} = \tilde{X}_{\nu''}$ und $X_\nu \cup X_{\nu'} = X_{\nu''}$.

Um schließlich **(sh)** für $\tilde{S}$, S zu zeigen, beweisen wir die Schlüsse $\tilde{X}_\nu \subseteqq \tilde{X}_{\nu'} \Leftrightarrow \Leftrightarrow t(\nu) \subseteqq t(\nu') \Leftrightarrow X_\nu \subseteqq X_{\nu'}$. Sie sind nach Definition der $\tilde{X}_\nu$, X_ν und wegen der paarweisen Disjunktheit der J_h trivial bis auf den Schluß $\tilde{X}_\nu \subseteqq \tilde{X}_{\nu'} \Rightarrow t(\nu) \subseteqq t(\nu')$. Diesen zeigen wir folgendermaßen:

Es werde $t(\nu) \not\subseteqq t(\nu')$ vorausgesetzt. Dann gibt es ein $h \in t(\nu)$, $\notin t(\nu')$. Dieses h und alle Elemente von $t(\nu')$ sind, wenn man sie nach $<$ geordnet aufzählt, bei geeigneter Bezeichnung

entweder	$h_a < \ldots < h_y < h < h_z \ldots < h_b$	$(t(\nu') = \{h_a, \ldots, h_y, h_z, \ldots, h_b\})$
oder	$h_a < \ldots < h_y < h$	$(t(\nu') = \{h_a, \ldots, h_y\})$
oder	$h < h_z < \ldots < h_b$	$(t(\nu') = \{h_z, \ldots, h_b\})$.

Nach 3. 134 gibt es nun Elemente $\hat{h}_y, \hat{h}_z \in \hat{H}$ mit $h_y < \hat{h}_y < h < \hat{h}_z < h_z$ bzw. $h_y < \hat{h}_y < h < \hat{h}_z$ bzw. $\hat{h}_y < h < \hat{h}_z < h_z$. Dann folgt $(\hat{h}_y, \hat{h}_z) \in \tilde{X}_v, \notin \tilde{X}_{v'}$, und $\tilde{X}_v \subsetneqq \tilde{X}_{v'}$ ist bewiesen.

3. 4 Überdeckungsgleichartige Systeme

Wir beweisen nun 2. 233. Für zwei Systeme $S = \{X_v\}_{v \in \Gamma}$, $\tilde{S} = \{\tilde{X}_v\}_{v \in \Gamma}$ aus $\mathscr{K}$ sei **(üg)** erfüllt; $\mathfrak{v}$ und $\tilde{\mathfrak{v}}$ seien nicht beide endlich; ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei etwa $\mathfrak{v}$ als unendlich vorausgesetzt. Zu zeigen ist $\mathfrak{v} = \tilde{\mathfrak{v}}$.

3. 41 Es sei $\mathfrak{G}$ die (durch $\subset$ halbgeordnete) Menge aller derjenigen Untermengen $\mathfrak{g} \subseteqq \Gamma$, für die $\mathfrak{v}_{(\mathfrak{g})} = \tilde{\mathfrak{v}}_{(\mathfrak{g})}$ unendlich ist. Wir zeigen als erstes, daß $\mathfrak{G}$ nicht leer ist.
1. Fall: Es gibt ein $v_0 \in \Gamma$ mit unendlichem $\mathfrak{x}_{v_0}$. In diesem Falle ist $\{v_0\} \in \mathfrak{G}$.
2. Fall: Alle $\mathfrak{x}_v$ $(v \in \Gamma)$ sind endlich. In diesem Fall gehen wir, bei Zugrundelegung von S, wie in 1.23 zur Indexmenge Γ_1 über. Da für $S, \tilde{S}$ wegen **(üg)** erst recht **(gg)** gilt, ist Γ_1 zugleich auch bei Zugrundelegung von $\tilde{S}$ gemäß 1. 23 gebildet. Wäre Γ_1 endlich, so wäre auch V endlich. Also gibt es eine abzählbar unendliche Untermenge $\{i_1, i_2, \ldots\}$ von Γ_1. Wählen wir dann jeweils $v_j \in i_j$ $(j = 1, 2, \ldots)$, so hat $\mathfrak{g}_0 = \{v_1, v_2, \ldots\}$ die Eigenschaft $\mathfrak{v}_{(\mathfrak{g}_0)} = \tilde{\mathfrak{v}}_{(\mathfrak{g}_0)} = \aleph_0$. Denn wäre die Menge $V_{(\mathfrak{g}_0)}$ bzw. die Menge $\tilde{V}_{(\mathfrak{g}_0)}$ endlich, so enthielte sie nur endlich viele paarweise verschiedene Untermengen, während sie doch die paarweise verschiedenen X_{i_j} $(j = 1, 2, \ldots)$ bzw. die paarweise verschiedenen $\tilde{X}_{i_j}$ $(j = 1, 2, \ldots)$ enthält; andererseits aber gilt trivialerweise $\mathfrak{v}_{(\mathfrak{g}_0)} \leqq \aleph_0$ und $\tilde{\mathfrak{v}}_{(\mathfrak{g}_0)} \leqq \aleph_0$. Somit haben wir $\mathfrak{g}_0 \in \mathfrak{G}$ erhalten.

3.42 Nun sei $\mathfrak{Y} = \{\mathfrak{g}_w\}_{w \in \mathfrak{I}}$ eine Kette in $\mathfrak{G}$ (durch irgend eine geeignete Menge $\mathfrak{I}$ indiziert); wir beweisen, daß auch $\mathfrak{H} = \bigcup \mathfrak{Y}$ Element von $\mathfrak{G}$ ist.

Für jedes $w \in \mathfrak{I}$ ist zunächst $\mathfrak{v}_{(\mathfrak{g}_w)} = \tilde{\mathfrak{v}}_{(\mathfrak{g}_w)}$ unendlich.

Aus $\mathfrak{g}_w \subseteqq \mathfrak{g}_{w'}$ folgt ferner $V_{(\mathfrak{g}_w)} \subseteqq V_{(\mathfrak{g}_{w'})}$ und $\tilde{V}_{(\mathfrak{g}_w)} \subseteqq \tilde{V}_{(\mathfrak{g}_{w'})}$ $(w, w' \in \mathfrak{I})$. Also sind $\{V_{(\mathfrak{g}_w)}\}_{w \in \mathfrak{I}}$ und $\{\tilde{V}_{(\mathfrak{g}_w)}\}_{w \in \mathfrak{I}}$ zwei gliedweise äquivalente, gleichartig geordnete Ketten unendlicher Mengen.

Sie sind sogar streng gleichartig geordnet; aus $V_{(\mathfrak{g}_w)} \subseteqq V_{(\mathfrak{g}_{w'})}$ folgt nämlich $X_v \subseteqq V_{(\mathfrak{g}_{w'})}$ für jedes $v \in \mathfrak{g}_w$, hieraus wegen **(üg)** auch $\tilde{X}_v \subseteqq \tilde{V}_{(\mathfrak{g}_{w'})}$ für jedes $v \in \mathfrak{g}_w$, also $\tilde{V}_{(\mathfrak{g}_w)} \subseteqq \tilde{V}_{(\mathfrak{g}_{w'})}$, und diese Schlüsse lassen sich umkehren $(w, w' \in \mathfrak{I})$.

Die Behauptung $\mathfrak{H} \in \mathfrak{G}$, d.h. $\mathfrak{v}_{(\mathfrak{H})} = \tilde{\mathfrak{v}}_{(\mathfrak{H})} \geqq \aleph_0$, ergibt sich somit aus 2. 212.

3. 43 Nach 3. 41, 3. 42 kann man nun das Zornsche Lemma anwenden und erhält die Existenz eines maximalen $\mathfrak{h} \in \mathfrak{G}$. Gäbe es hierzu ein $v_1 \in \Gamma$, $\notin \mathfrak{h}$, so folgte

$$\mathfrak{v}_{(\mathfrak{h} \cup \{v_1\})} = \max(\mathfrak{v}_{(\mathfrak{h})}, \mathfrak{x}_{v_1}) = \max(\tilde{\mathfrak{v}}_{(\mathfrak{h})}, \mathfrak{x}_{v_1}) = \tilde{\mathfrak{v}}_{(\mathfrak{h} \cup \{v_1\})} \geqq \aleph_0,$$

also $(\mathfrak{h} \cup \{v_1\}) \in \mathfrak{G}$ im Widerspruch zur Maximalität von $\mathfrak{h}$. Somit muß $\mathfrak{h} = \Gamma$ sein, und 2. 233 ist bewiesen.

Literatur

1] H. BACHMANN, Transfinite Zahlen. *Berlin—Göttingen—Heidelberg* 1955.

(Eingegangen am 19. Januar 1967)