Die Verallgemeinerung des zentralen Einschneideverfahrens auf den n-dimensionalen Fall

Von J. SZABÓ (Debrecen)

Einleitung

Im Jahre 1937 hat L. ECKHART in seiner Arbeit: „Affine Abbildung und Axonometrie" ([1]) ein praktisches und schnelles Verfahren gegeben, um ein axonometrisches Bild des Gegenstands zu konstruieren. Aus zwei, in der Bildebene liegenden axonometrischen Bildern des Objekts kann man mit zwei parallelen Projektionen sein drittes axonometrisches Bild herstellen. Die axonometrischen Bilder darf man beliebig auf eine Bildebene legen und dafür je ein paralleles Strahlenbüschel wählen. Bezeichnen wir mit P einen beliebigen Punkt des Gegenstands und seine axonometrischen Bilder mit P′ und P''; es seien die zum Punkt P' und P'' gehörenden Strahlenbüschelelemente p', bzw. $p'' \cdot (p' \nparallel p'')$. Die Abbildung $P \to P^s$, wo P^s der Schnittpunkt der Geraden p' und p'' ist, führt zum axonometrischen Bild des Gegenstands. Wenn p' und p'' speziellerweise gewählt sind, kann das neue axonometrische Bild affin zu einem Mongeschen Bild des Objekts sein, welches sich durch eine perspektive Affinität mit einem Mongeschen Bild ersetzen läßt. (z. B. [3], [5]). Das Einschneideverfahren Eckharts wird in der Praktik dann angewandt, wenn die Mongeschen Bilder als Ausgangsbilder benützt werden.

Das Einschneideverfahren von Eckhart läßt sich nach mehreren Richtungen verallgemeinern. Eine Vefallgemeinerung bildet das zentrale Einschneideverfahren, wobei die Perspektiven ([3]. S. 124—125.) des Gegenstands (statt seiner axonometrischen Bilder) stehen, und nicht paralelle, sondern zentrale Strahlenbüschel benützt werden. Bei diesem Verfahren kann man die Perspektiven und die zentralen Strahlenbüschel nicht beliebig aufnehmen. In der Arbeit [4] befinden sich notwendige und hinreichende Bedingungen für die Aufnahme der perspektivischen Bilder und der zentralen Strahlenbüschel. Das Einschneideverfahren von Eckhart gibt eine degenerierte affine Abbildung des dreidimensionalen Euklidischen Raumes, die wegen des Satzes von Pohlke zu einer Parallelprojektion des Raumes ähnlich ist. Das zentrale Einschneideverfahren führt zu einer degenerierten projektiven Abbildung des Gegenstands. Diese Perspektive ist keine Zentralprojektion, sondern eine kollineare Umformung eines Zentralrisses des Raumes. Es ist unmöglich durch das zentrale Einschneideverfahren das Zentralbild des Gegenstands aus den Mongeschen Bildern herzustellen ([6]).

Eine andere Verallgemeinerung des Eckhartschen Einschneideverfahrens ist seine Verallgemeinerung auf den n-dimensionalen Fall. In diesem Fall kann man das axonometrische Bild des n-dimensionalen Raumes als irgendeine degenerierte affine Abbildung des Raumes einführen ([5]). Es ist gebräuchlich das axonometrische Bild in dem dreidimensionalen Fall soleherweise zu definieren ([2], [3]). In dieser Verallgemeinerung lauten die Sätze ganz ähnlich, wie die originalen, von L. Eckhart in seiner Arbeit gegebenen Säzte.

Bevor wir auf die Verallgemeinerung des zentralen Einschneideverfahrens kommen, müssen wir eineige Begriffe und Sätze erörtern.

1. Die Perspektive des n-dimensionalen Raumes

Eine Definition der Perspektive des dreidimensionalen Raumes wurde von E. Stiefel im Lehrbuch der darstellenden Geometrie [3] gegeben, die eigentlich eine degenerierte projektive Abbildung des dreidimensionalen projektiven Raumes auf eine projektive Ebene ist. Diese Perspektive enthält als spezielle Fälle, die Zentralprojektion, und — wenn die Fluchtpunkte unendlichferne Punkte sind — die Axonometrie. Wir geben eine ähnliche Abbildung des n-dimensionalen projektiven Raumes R_n auf die zweidimensionale Ebene. Diese Abbildung ist eine Verallgemeinerung des Verfahrens von Stiefel ([3]). Wir charakterisieren den mit den unendlichfernen Elementen erweiterten n-dimensionalen Euklidischen Raum R_n durch ein Koordinatensystem $O(X_1, X_2, \dots, X_n, U_{1\infty}, U_{2\infty}, \dots, U_{n\infty})$, wo O der Nullpunkt bedeutet, und $X_1, X_2, \dots, X_n$ die Einheitspunkte, $U_{1\infty}, U_{2\infty}, \dots, U_{n\infty}$ unendlichferne Punkte der paarweise senkrechten Koordinatenachsen $OX_1, OX_2, \dots, OX_n$ sind. Die Länge der Strecke OX_i sind gelich. Zuerst bilden wir das Koordinatensystem des Raumes R_n auf die Zeichenebene (Bildebene) ab. Es seien $O', X'_1, X'_2, \dots, X'_n$, $U'_1, U'_2, \dots, U'_n$ die Bildpunkte der Punkte der Raumkonfiguration, wo die verschiedenen Punkte O', X'_i, U'_i kollinear sind. Wir nennen die Konfiguration $O'(X'_1, X'_2, \dots, X'_n, U'_1, U'_2, \dots, U'_n)$ das perspektivische Koordinatensystem des Raumes R_n. Der Punkt P im Raum hat die inhomogenen Koordinaten $x_1, x_2, \dots, x_n$ und es seien $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ die perspektivischen Koordinaten des Bildpunktes.

Definition 1. Den Punkt P' nennen wir *das perspektivische Bild* des Punktes P, falls für seine perspektivischen Koordinaten $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$

$$x'_i = (U'_i\, O'\, X'_i\, P'_i) = (U_{i\infty}\, O X_i P_i) \qquad i = 1, \dots, n$$

gelten, wo $OP_i = x_i$ und P'_i auf der Achse $O'X'_i$ ein sogenannter Koordinatenpunkt ist. Aus den perspektivischen Koordinatenpunkten erhalten wir den Bildpunkt P' auf den Wegen

$$O'P'_1,\ P'_1P'_{12},\ P'_{12}P'_{123},\ \dots,\ P'_{12\dots n-1}P'_{12\dots n} = P'$$

wo $P_{12\dots k}$ die Koordinaten $x_1 = x_2,\ x_2 = x_2,\ \dots,\ x_k = x_k,\ x_{k+1} = 0,\ \dots,\ x_k = 0$ hat und $P'_{12\dots k}$ sein Bild ist.

Eine perspektivische Abbildung sieht man in Figur 1, wo das perspektivische Bild des Punktes $P(2, 1, 3, 1) \in R_4$ konstruiert ist.

Definition 2. Der Punkt $\bar{P}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ ist ein Bildpunkt des Punktes $P(x_1, \dots, x_n)$ im Unterraum

$$O(X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n, U_{1\infty}, \dots, U_{i-1\infty}, U_{i+1\infty}, \dots, U_{n\infty}) = H_i,$$

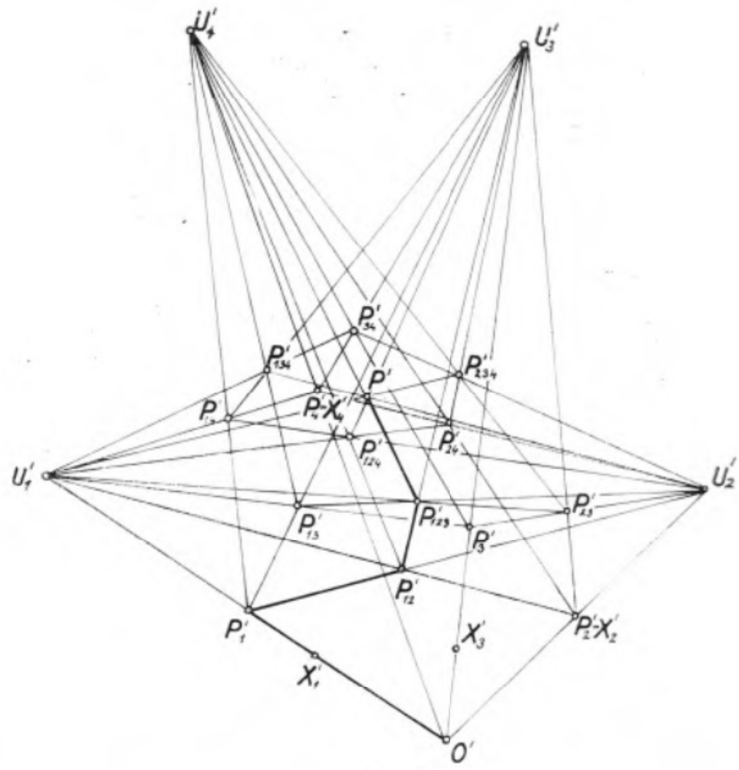

Fig. 1.

d.h. in der Hyperebene H_i. Wir nennen sein perspektivisches Bild $\bar{P}'$ perspektivischer Hyperseitenriß des Punktes $P \in R_n$.

Satz 1. *Die Perspektive des n-dimensionalen Raumes R_n ist geradentreu und doppelverhältnistreu.*

Beweis. Im Falle $n=3$ ist der Satz gültig [3]. Es sei die Behauptung für $n=k$ richtig. H_i ist eine Hyperebene im Raum R_{k+1}. Es sei eine Gerade $g \in R_{k+1}$, dann ist das orthogonale Bild von g in Richtung OX_i auf H_i wieder eine Gerade, $\bar{\bar{g}}$. (z. B. [5] S. 182.) Wir bezeichnen das orthogonale Bild von g in Richtung OX_j auf $H_j \in R_{k+1}$, welche wieder eine Gerade ist, mit $\bar{g}$. Die Parallelprojektion ist eine Zentarlprojektion, deren Zentrum der unendlichferne Punkt ist, deswegen ist für die Punkte $A, B, C, D \in g$ $(\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D})=(ABCD)=(\bar{\bar{A}}\bar{\bar{B}}\bar{\bar{C}}\bar{\bar{D}})$ gültig. Die Punktreihe $(\bar{g})$, (g), $(\bar{\bar{g}})$ sind also zueinander projektiv. Die Figur 2. zeigt die Perspektive des Koordinatensystems des Raumes R_{k+1} und die perspektivischen Hyperseitenrisse der Gerade g, d. h. $\bar{g}'$ und $\bar{\bar{g}}'$. $\bar{g}$ und $\bar{\bar{g}}$ je eine Gerade in den $n=k$-dimensionalen Raumen, so, daß ihre Bilder — nach der Induktionsvoraussetzung — wieder Geraden sind. Wenn wir den Seitenriß der Gerade $\bar{g}$ in den Raum

$$O(X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_{j-1}, X_{j+1}, \ldots, X_{k+1}, U_{1\infty}, \ldots, U_{k+1\infty})$$

betrachten, ist es wieder eine Gerade, die wir mit $\bar{g}^{+}$ und ihre Perspektive mit $\bar{g}^{+\prime}$ bezeivhnen. Ist ein Punkt $A \in g$, so gilt $\bar{A}^{+\prime} \in \bar{g}^{+\prime}$. Die Hyperseitenrisse des Punktes A

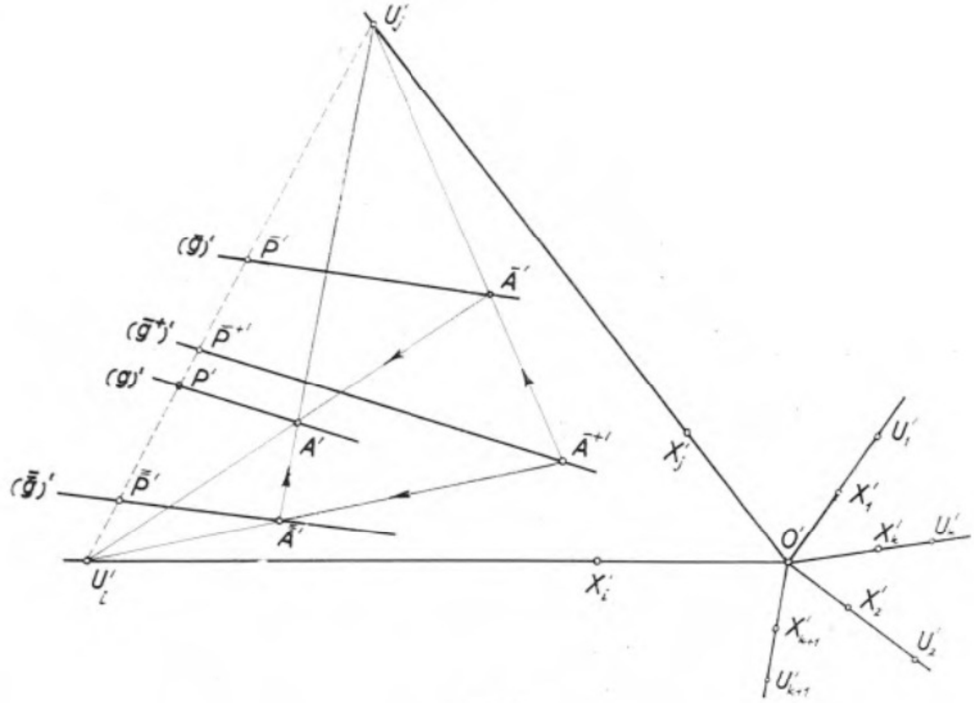

Fig. 2.

muß auf $\bar{g}$ und $\bar{\bar{g}}$ liegen, d. h. für die Bilder bestehen $\bar{A}\in\bar{g}'$ und $\bar{\bar{A}}\in\bar{\bar{g}}'$. Der punkt $\bar{A}'$ muß noch auf der Gerade $\bar{A}^{+\prime}\overline{U}_j'$ und $\bar{\bar{A}}'$ muß auf $\bar{A}^{+\prime}U_i'$ liegen. Der Bild-Punkt A' fällt also mit dem Schnittpunkt der Geraden $\bar{\bar{A}}'U_j'$ und $\bar{A}'U_i'$ zusammen. So enthält man auf die Strahlenbüschel

$$|U_i'(\bar{\bar{g}})'| \,\overline{\wedge}\, (\bar{g}^+)' \,\overline{\wedge}\, |U_j(\bar{g})'| \Rightarrow |U_i'(\bar{g})'| \,\overline{\wedge}\, |U_j(\bar{\bar{g}})'|$$

Diese Projektivität ist aber eine Perspektivität, weil die entsprechenden Punkte $\bar{P}'$, $\bar{\bar{P}}'$ auf der Gerade $U_i'U_j'$ liegen [2]. Also existiert eine Perspektivitätachse, undsie wird die Perspektive der Gerade $g\in R_{k+1}$ sein. Die Abbildung ist auch doppelverhältnistreu, weil es für die Punktreihe $(g)\,\overline{\wedge}\,(\bar{g})\,\overline{\wedge}\,(\bar{g})'\,\overline{\wedge}\,(\bar{g}')$ gültig ist.

2. Die Verallgemeinerung des zentralen Einschneideverfahrens auf den n-dimensionalen Fall

Betrachten wir ein Objekt $\mathbf{K}\in R_n$ und das zugehörige Koordinatensystem $O(X_1, X_2, \ldots, X_n, U_{1\infty}, U_{2\infty}, \ldots, U_{n\infty})$. Es seien $\mathbf{K}'$ und $\mathbf{K}''$ seine Perspektiven und die entsprechenden Zentren S_1, S_2. Ist ein Punkt $P\in\mathbf{K}$, so gilt es in Bildern $P'\in\mathbf{K}'$ und $P''\in\mathbf{K}''$ Die Abbildung $P\to P^s$, wo P^s der Schnittpunkt der Geraden $P'S_1$ und $P''S_2$ ist, werden wir zentrales Einschneidevderfahren nennen. Wir untersuchen, wann diese Abbildung zur Perspektive des Objekts $\mathbf{K}$ führt.

Satz 2. *Das zentrale Einschneideverfahren führt dann und nur dann zu einem perspektivischen Bild* $\mathbf{K}^s$, *wenn an den Achsen* OX_i *solche von* O *verschiedene Punkte* L_i *existieren, für welche* L_i' *und* L_i'' *auf die Verbindungsgerade* S_1S_2 *fallen, und* $S_1O' \nparallel S_2O''$ $(i=1, 2, \ldots, n)$.

Beweis. Die Bedingungen sind notwendig. Im Falle $n=3$ ist der Satz gültig ([4]). Wenn nicht jeder Punkt L_i existiert, so bilden die Punktmengen $\{OX_i\}^s$ keine Gerade, sondern Kegelschnitte. Dies bedeutet, daß S_1, L_i, S_2 kollinear sein müssen. Gilt weiterhin $S_1O' \| S_2O''$, so wird O^s im Unendliche liegen, und wir können kein perspektives Bild erhalten. Wenn O' und O'' auf die Gerade S_1S_2 fallen würden, bekämen wir ein perspektivisches Bild des räumlichen Koordinatensystems. In diesem Fall wäre aber das Bild des zum räumlichen Koordinatensystem gebundenen Gegenstands kein perspektivisches Bild. Nehmen wir eine Perspektive $\mathbf{K}'$ des Raumes R_i, so läßt sich der Punkt O', das perspektivische Bild des Nullpunktes, auch ein perspektivisches Bild irgendeiner räumlichen Gerade g betrachten. In dem anderen perspektivischen Bild $\mathbf{K}''$ wird diese Gerade g im allgemeinen eine Gerade g'' sein. Konstruieren wir aus diesen $\mathbf{K}'$, $\mathbf{K}''$ mit dem zentralen Einschneideverfahren das Bild $\mathbf{K}^s$, dann bekommen wir, daß $S_2 = O^s$ ist. Ähnlicherweise betrachten wir die Gerade l, für welche $O'' = l''$ gilt. In diesem Fall ist l' eine der an O' liegenden Gerade. Aus diesem folgt, daß $S_1 = l^s = O^s$ gilt. Dies ist unmöglich, wenn wir eine Perspektive des Objekts mit dem zentralen Einschneideverfahren bekommen wollen, also müssen die Punkte L_i von O notwendigerweise verschieden sein.

Die Bedingungen sind auch hinreichend. Es sei der Satz für den Fall $n=k$ gültig, also bekommen wir durch das den Bedingungen entsprechende zentrale

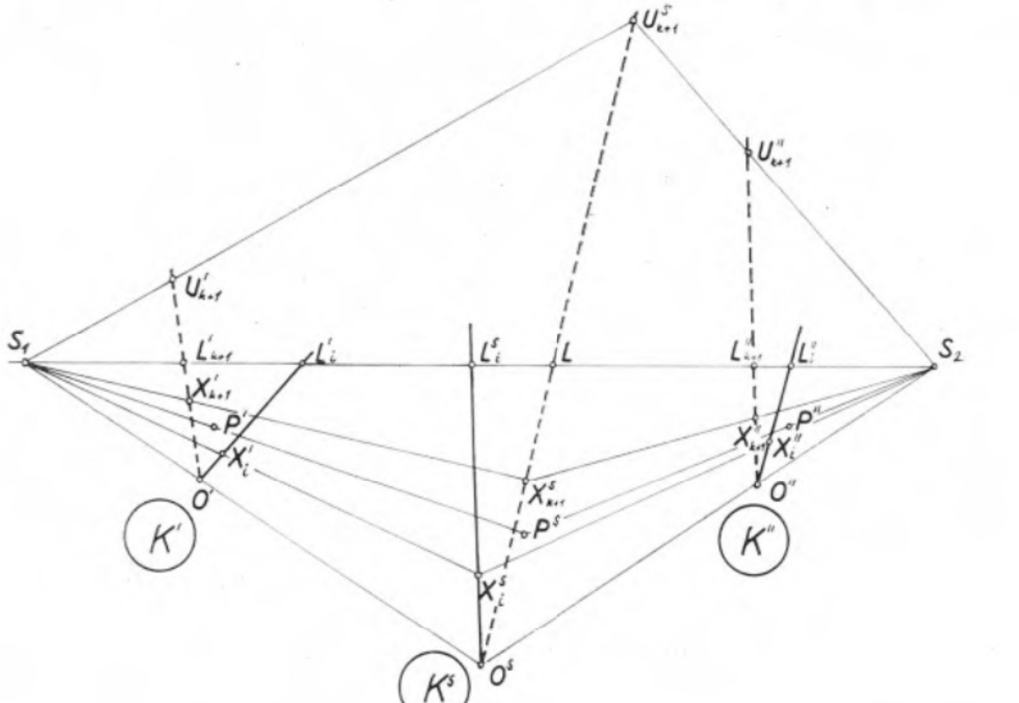

Fig. 3.

Einschneideverfahren aus den zwei Perspektiven $\mathbf{K}'$, $\mathbf{K}''$ des Raumes R_k ein neues perspektivisches Bild $\mathbf{K}^s$ von R_k. Die Geraden $P'S_1$ und $P''S_2$ haben den Schnittpunkt P^s, der das perspektivisches Bild des Punktes $P \in R_k$ ist. (Fig. 3.) Der Raum R_k ist eigentlich eine Hyperebene des Raumes R_{k+1} also sind $\mathbf{K}'$, $\mathbf{K}''$ je eine Perspektive des Objekts vom k-dimensionalen Raum R_k. Betrachten wir noch die Achse OX_{k+1} wodurch wir den $k+1$-dimensionalen Raum R_{k+1} charakterisieren können. Weil die Punkte S_1, L'_{k+1}, L''_{k+1}, S_2 kollinear sind, liegen die Strahlenbüschel $|S_1,(O'X_{k+1})|$, $|S_2,(O''X''_{k+1})|$ zueinander perspektiv, also ist ihr Schnittgebilde eine Gerade. Es seien $x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}$ die Koordinaten des Punktes P, dann besteht

$$(U_{k+1\infty} O X_{k+1} \bar{P}_{k+1}) = (U^s_{k+1} O^s X^s_{k+1} \bar{P}^s_{k+1}) = U'_{k+1} O' X'_{k+1} \bar{P}'_{k+1}) =$$
$$= (U''_{k+1} O'' X''_{k+1} \bar{P}''_{k+1})$$

Die Achse OX_{k+1} und der Punkt $\bar{P}$ bestimmen eine Ebene α in welcher auch der Punkt P auf der Gerade $U_{k+1\infty}\bar{P}$ liegt. Die Ebenen α', α'', α^s sind zur Ebene α und zueinander kollinear. Diese Kollineation bestehen wegen der Definition der Perspektive. Zwischen den Ebenen α' und α^s hat diese Kollineation ein Zentrum S_1, also ist die Kollineation eine perspektive Kollineation, und dadurch liegen die Punkte S_1, $\bar{P}'$, $\bar{P}^s$ kollinear. Ähnlicherweise kollinear sind auch die Punkte S_2, $\bar{P}''$, $\bar{P}^s$, wo $\bar{P}^s$ die Perspektive des Punktes $\bar{P} \in R_{k+1}$ bedeutet. Wir können also den Punkt $\bar{P}^s$ auch als Schnittpunkt der Geraden $S_1\bar{P}'$ und $S_2\bar{P}''$ bekommen.

Ein weiteres Problem: wie man die Perspektive des n-dimensuionalen Raumes aus den Perspektiven seiner Hyperebenen bekommt. Betrachten wir die Perspektiven $\mathbf{K}'_i$ und $\mathbf{K}''_j$ der Hyperseitenrisse $\mathbf{K}_i$ und $\mathbf{K}_j$, woraus wir die Perspektive mit den zentralen Einschneideverfahren herstellen wollen. Wir suchen die Bedingungen, wann wir aus den Perspektiven $\mathbf{K}'_i$ und $\mathbf{K}''_j$ die Perspektive des Objekts $\mathbf{K}$ konstruieren können.

Satz 3. *Das zentrale Einschneideverfahren der Perspektiven der Hyperseitenrisse* $\mathbf{K}'_i$ *und* $\mathbf{K}''_j$ *führt dann und nur dann zu einem Perspektive von* $\mathbf{K}$, *wenn*

a) *die Punkte* S_1, U'_i, U''_j, S_2 *kollinear sind,*

b) *auf den Achsen* OX_k $(k \neq i,\ k \neq j)$ *je ein solcher von* O *verschiedener Punkt* L_k *existiert, daß* S_1, L'_k, L''_k, S_2 *kollinear sind,*

c) $S'O' \nparallel S''O''$.

BEWEIS: Im Falle $n=3$ ist der Satz gültig ([4]). Die Bedingungen sind notwendig. Wenn das zentrale Einschneideverfahren zu einem perspektivischen Bild führt, so existieren an den Achsen OX_k nach dem Satz 2 solche Punkte L_k, daß S_1, L'_k, L''_k, S_2 kollinear sind. Wäre $L_i \neq U_{i\infty}$, so würde in Bildern $L'_i = O'$, $L''_i \in |O''X''_i|$ bestehen. Ähnlicherweise bekäme man $L''_j = O''$.

Es können aber die Punkte O', O'', S_1, S_2 nicht kollinear sein. Also die Punkte L_i, L_j müssen unendlichferne Punkte der Achsen OX_i, OX_j sein. Die Bedingungen b) c) folgen aus dem Satz 2. Die Bedingungen sind auch hinreichend.

Es genügt das Erfülltsein der Bedingungen des Satzes 2, d. h. die Kollinearität von S_1, L'_f, L''_f, S_2 $(f=1, \ldots, n)$ und $L_i \neq 0$ zu zeigen. Die Kollinearität von S_1, L'_k, L''_k, S_2 $(k \neq i;\ k \neq j)$ ist durch die Bedingungen des letzten Satzes gesichert. Ist $L_i = U_i$, so kann sein Bild in einem beliebigen Punkt der Bildebene fallen, weil die Hyperebene H_i des Raumes R_n läßt sich für eine Zentralprojektion aus dem Punkt $U_{i\infty}$

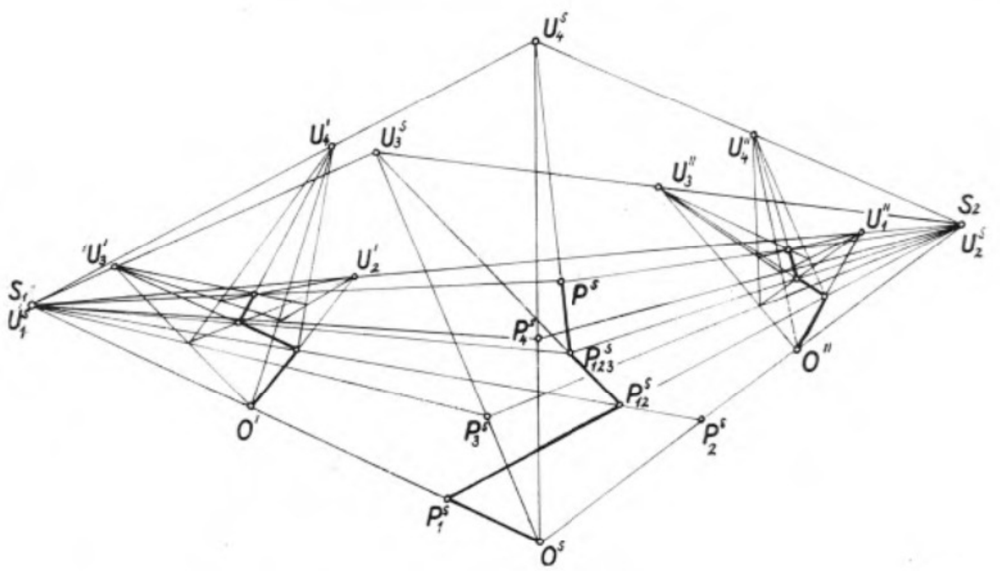

Fig. 4

betrachten. Ebenso können wir den Punkt $L_j''=U_j''$ für einen beliebigen Punkt der Bildebene betrachten, also besteht die Kollinearität von S_1, L_f', L_f'', S_2. $L_j \neq 0$ ist teils wegen $L_i'=U_i'$ und $L_j''=U_j''$, teils wegen der Bedingung b) erfüllt.

Eine solche Anordnung zeigt die Fig. 4. für den Fall $n=4$.

Literatur

[1] L. Eckhart, Affine Abbildung und Axonometrie, *Sitzungsber. der Akad. Wien Math. Nat. Kl. II.* (1937), 51—56.

[2] E. Müller, *Vorlesungen über darstellende Geometrie. Leipzig* und *Wien*, 1923.

[3] E. Stiefel, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, *Basel*, 1947.

[4] J. Szabó, Eine Verallgemeinerung des Eckhartschen Einschneideverfahrens, *Publ. Math. Debrecen* **14** (1967), 311—319.

[5] J. Szabó, Die Verallgemeinerung des Eckhartschen Einschneideverfahrens auf den *n*-dimensionalen Fall, *Publ. Math. Debrecen* **15** (1968), 181—187.

[6] J. Szabó, Einige Bemerkungen zur Anwendung des zentralen Einschneideverfahrens, *Publ. Math. Debrecen* **16** (1969), 155—160.

(Received February 11, 1968.)