# Über das Spektrum einer Klasse von Vektordifferentialoperatoren

Von BERND STÖCKERT (Jena)

Betrachtet man die von GLASMAN ([5]) für die spektraltheoretische Behandlung des Diracoperators angegebenen Methoden, so zeigt sich, daß diese auch zur Untersuchung des Spektrums allgemeinerer Operatoren benutzt werden können. Im ersten Abschnitt werden auf der Grundlage eines Satzes über antikommutative Matrizen die Vektordifferentialoperatoren vom $D$-Typ definiert und ihr enger Zusammenhang mit skalaren elliptischen Operatoren dargestellt. Im zweiten Abschnitt wird das Spektrum[1]) ihrer selbstadjungierten Erweiterungen untersucht, insbesondere der Einfluß des Gebietes $G$ auf das Spektrum. Abschließend wird im dritten Abschnitt noch eine vollstetige Störung der Operatoren vom $D$-Typ angegeben, die deren stetiges Spektrum unverändert läßt.

**1.** Die Definition der in dieser Arbeit betrachteten Operatoren basiert auf dem folgenden Lemma über antikommutative Matrizen.

**Lemma 1.** *Es sei $\gamma_N$ ein endliches System quadratischer, $N$-reihiger, komplexer Matrizen, dessen Elemente $X_k$ folgende Bedingungen erfüllen mögen:*

(1. 1) (a) $X_k X_j = -X_j X_k \qquad (j \neq k)$

(b) $X_k^2 = E^{(N)}$; *$E^{(N)}$ sei die $N$-reihige Einheitsmatrix.*

(c) $X_k = X_k^*$; *$X_k^*$ sei die zu $X_k$ hermitesch konjugierte Matrix.*

*Dann enthält $\gamma_N$ maximal $S(N)$ Matrizen, wobei*

$$S(N) = 2k+1, \quad N = 2^k \cdot r, \quad r \equiv 1(2), \textit{ ist.} \tag{1. 2}$$

BEWEIS. Der Beweis unterteilt sich in zwei Schritte. Im ersten Schritt zeigen wir, daß aus den Bedingungen (1.1) notwendig eine bestimmte Gestalt der $X_k \in \gamma_N$ folgt. Im zweiten Schritt wird gezeigt, daß die abgeleiteten Bedingungen auch hinreichend sind und eine Bestimmung der maximalen Anzahl der $X_k$ in $\gamma_N$ gestatten.

[1]) Die Begriffe „Spektrum" und „stetiges Spektrum" werden in dieser Arbeit im Sinne der Definitionen von GLASMAN ([5]) gebraucht.

*1. Schritt.* O. B. d. A. habe $X_1 \in \gamma_N$ folgende Gestalt

$$X_1 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} +1 & & 0 & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ 0 & & +1 & & & \\ \hline & & & -1 & & 0 \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & 0 & & -1 \end{array}\right), \quad p_1 + p_2 = N.$$
$$\qquad\underbrace{\qquad\quad}_{p_1}\ \underbrace{\qquad\quad}_{p_2}$$

Nach (1.1) (*a*) gilt für alle $X_k \in \gamma_N$ $(k \neq 1)$

$$X_1 X_k = X_k(-X_1). \tag{1.3}$$

Zerlegt man die $X_k$ in Übereinstimmung mit den Diagonalmatrizen $X_1, (-X_1)$ in Blöcke, d. h. $X_k = (X^{(k)}_{\alpha,\beta})$ $(\alpha, \beta = 1, 2)$, so daß $X^{(k)}_{\alpha,\beta}$ eine rechteckige Matrix vom Typ $(p_\alpha, p_\beta)$ ist, dann zerfällt (1.3) in vier Gleichungen

$$(\lambda_\alpha - \mu_\beta) X^{(k)}_{\alpha,\beta} = 0 \qquad (\alpha, \beta = 1, 2), \tag{1.4}$$

wobei $\lambda_1 = \mu_2 = 1$, $\lambda_2 = \mu_1 = -1$ ist.

Daraus folgt, daß $X^{(k)}_{11}$ und $X^{(k)}_{22}$ Nullmatrizen sein müssen, während $X^{(k)}_{12}$ und $X^{(k)}_{21}$ innerhalb der Bedingungen (1.1) frei gewählt werden können. Nach (1.1) (*b*) ist für $X_k \in \gamma_N$ $\det X_k \neq 0$, das bedeutet aber nach dem vorhergehenden Ergebnis, daß für die Elemente aus $\gamma_N$ notwendig $p_1 = p_2 = \frac{N}{2}$ sein muß. D. h., im Matrizenring der $N'$-reihigen ($N'$ ungerade) Matrizen über dem Körper der komplexen Zahlen gibt es keine zwei nichtsinguläre, antikommutative Matrizen. Wir setzen

$$S(N') = 1 \quad \text{für} \quad N' \equiv 1(2). \tag{1.5}$$

Aus den Eigenschaften (1.1) (c) und (b) folgt nun weiter

$$X^{(k)}_{21} = (X^{k}_{12})^* \quad \text{und} \quad X^{(k)}_{12} \cdot (X^{(k)}_{12})^* = E^{\left(\frac{N}{2}\right)}.$$

Setzen wir $(X^{(k)}_{12}) = Y_k$, so genügen die Matrizen $X_k$ aus $\gamma_N$ notwendig den Bedingungen

$$X_1 = \begin{pmatrix} E^{\left(\frac{N}{2}\right)} & 0 \\ 0 & -E^{\left(\frac{N}{2}\right)} \end{pmatrix}, \quad X_k = \begin{pmatrix} 0 & Y_k \\ Y_k^* & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.6}$$

$$Y_k Y_k^* = E^{\left(\frac{N}{2}\right)}, \tag{1.7}$$

$$Y_k Y_j^* = -Y_j Y_k^* \qquad (j \neq k). \tag{1.8}$$

Die letzte Bedingung folgt aus der Tatsache, daß die Matrizen $X_k$ $(k \neq 1)$ der Gestalt (1.6) nach (1.1) (a) auch untereinander antikommutieren. Diese Charakterisierung der Matrizen $X_k \in \gamma_N$ $(k \neq 1)$ ist jedoch für eine Bestimmung der Anzahl der Matrizen in $\gamma_N$ noch nicht ausreichend.

Es gibt nun eine unitäre Transformation, die die Matrix

$$X_2 \in \gamma_N \quad \text{in} \quad \tilde{X}_2 = T X_2 T^*,$$

$$(1.9) \qquad \tilde{X}_2 = \begin{pmatrix} 0 & E^{\binom{N}{2}} \\ E^{\binom{N}{2}} & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} E^{\binom{N}{2}} & 0 \\ 0 & Y_2 \end{pmatrix},$$

überführt, aber die Matrix $X_1$ unverändert läßt ($X_1 = TX_1T^*$) und die restlichen Matrizen $X_k \in \gamma_N$ ($k \neq 1, 2$) in Matrizen

$$\tilde{X}_k = TX_kT^* = \begin{pmatrix} 0 & Y_k Y_2^* \\ Y_2 Y_k^* & 0 \end{pmatrix}$$

überführt, die ebenfalls den Bedingungen (1.6)—(1.8) genügen. Betrachtet man nun die Bedingung (1.8) für die Matrizen $\tilde{X}_2$ und $\tilde{X}_k$ ($k \neq 1, 2$) aus $\gamma_N$ näher, so erhält man eine weitere notwendige Bedingung für die $\tilde{Y}_k = Y_k Y_k^*$:

$$(1.10) \qquad \tilde{Y}_k = -\tilde{Y}_k^* \qquad (k \neq 1, 2).$$

Setzt man nun $\tilde{Y}_k = -\mathrm{i}\, Y_k'$, $\left(\mathrm{i} = \sqrt{-1}\right)$, so lauten die Bedingungen (1.7), (1.8), (1.10) für die Matrizen $Y_k'$

$$(1.11) \qquad Y_k' \in \gamma_{\frac{N}{2}}.$$

2. *Schritt.* Geht man umgekehrt von Matrizen

$$(1.12) \quad X_1 = \begin{pmatrix} E^{\binom{N}{2}} & 0 \\ 0 & -E^{\binom{N}{2}} \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & E^{\binom{N}{2}} \\ E^{\binom{N}{2}} & 0 \end{pmatrix}, \quad X_{l+2} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i}Y_l' \\ \mathrm{i}Y_l' & 0 \end{pmatrix}$$

$$Y_l' \in \gamma_{\frac{N}{2}} \qquad \left(l = 1, \ldots, S\left(\frac{N}{2}\right)\right),$$

aus, so läßt sich leicht verifizieren, daß diese Matrizen zusammen ein antikommutatives System im Sinne von (1.1) bilden. D. h. die Bedingungen (1.12) sind nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend dafür, daß die Matrizen $X_1, X_2$, $\left\{X_{l+2} \mid l = 1, 2, \ldots, S\left(\frac{N}{2}\right)\right\}$ ein antikommutatives System bilden. Daraus können wir für die maximale Anzahl $S(N)$ der $X_k \in \gamma_N$ folgern, daß $S(N) = 2 + S\left(\frac{N}{2}\right)$ ist. Verwenden wir (1.5), so ergibt sich rekursiv

$$S(N) = 2k + 1, \qquad N = 2^k \cdot r, \qquad r \equiv 1(2).$$

(1.2) folgt dann für alle natürlichen Zahlen $N$ durch Induktion. Damit ist das Lemma 1 bewiesen.

*Ein Beispiel.* Für $k = 2$ und $r = 1$, dem entsprechen vierreihige quadratische Matrizen, gibt es somit fünf antikommutative Matrizen. Die Existenz von vier derartigen Matrizen ist bekanntlich die Grundlage für die Diracgleichung der Quantenphysik.

Es sei $G$ ein beliebiges Gebiet des $n$-dimensionalen, reellen, euklidischen Raumes $R_n$, $L_{2,N}(G)$ der Hilbertraum der meßbaren, komplexwertigen, quadratisch integrierbaren Vektorfunktionen mit $N$ Komponenten[2]). Für $u(x) \in W_{2,N}^{m,loc}(G)$[2]) definieren[2]) wir eine Differentialoperation

$$d[u] = \sum_{|\alpha| \leqq m} \left( \sum_{k=1}^{S-1} \lambda_{\alpha,k} X_k \right) D^\alpha u(x) \cdot \tag{1.13}$$

In dieser Symbolik bedeuten $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_j$ nicht negative ganze Zahlen,

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = |\alpha|; \quad D^\alpha = \prod_{j=1}^{n} D_j^{\alpha_j}, \quad D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j};$$

$\lambda_{\alpha,k}$ sind reelle Konstanten; $X_k$ $(k=1, \ldots, S(N)-1)$ sind voneinander verschiedene Matrizen aus $\{\gamma_N \setminus X_0\}$, dabei ist $X_0$ eine beliebige feste Matrix aus $\gamma_N$.

Wir setzen voraus, daß $N \equiv 0(2)$ ist. Daraus folgt $S = S(N) \geqq 3$. Ferner sei für jeden reellen Vektor $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in R_n$

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \left( \sum_{k=1}^{S-1} \lambda_{\alpha,k} \lambda_{\beta,k} \right) \xi^\alpha \xi^\beta \geqq c|\xi|^{2m}, \quad c>0, \quad \xi^\alpha = \prod_{j=1}^{n} \xi_j^{\alpha_j}. \tag{1.14}$$

Einen Operator $T$ vom $D$-Typ in $L_{2,N}(G)$ definieren wir durch

$$Tu = d[u], \quad u \in D(T) \subset W_{2,N}^{m,loc}(G) \cap L_{2,N}(G), \quad Tu \in L_{2,N}(G),$$

$D(T)$ sei dicht in $L_{2,N}(G)$.

Spezialisieren wir $G = R_3$, $m=1$, $N=4$ und wählen die Konstanten $\lambda_{\alpha,k}$ geeignet, so erhalten wir für $T$ den Dirac-operator der Quantenmechanik.

Diese Operatoren vom $D$-Typ besitzen folgende Eigenschaft.

**Satz 1.** *Jedem Operator vom D-Typ mit* $D(T^2) \subset W_{2,N}^{2m,loc}(G)$ *können über die Beziehung*

$$T^2 u = d\big[d[u]\big] = E^{(N)} \begin{pmatrix} Au_1 \\ \vdots \\ Au_N \end{pmatrix}, \qquad u \in D(T^2),$$

---

[2]) Es ist $u(x) \in L_{2,N}(G)$ bzw. $W_{2,N}^l(G)$, $\mathring{W}_{2,N}^l(G)$, $C_{0,N}^l(G)$, $C_{0,N}^\infty(G)$, wenn $u(x) = (u_1(x), \ldots, u_N(x))$ und $u_j(x) \in L_2(G)$ bzw. $W_2^l(G)$, $\mathring{W}_2^l(G)$, $C_0^l(G)$, $C_0^\infty(G)$ für $j=1, \ldots, N$ ist,

$$\|u\|^2_{L_{2,N}(G)} = \sum_{j=1}^{N} \|u_j\|^2_{L_2(G)}, \quad \|u\|^2_{W_{2,N}^l(G)} = \sum_{j=1}^{N} \|u_j\|^2_{W_2^l(G)}.$$

Es ist $u(x) \in W_{2,N}^{l,loc}(G)$, wenn es für jeden Punkt $x_0 \in G$ eine Umgebung $U_{x_0} \subset G$ gibt, so daß $u(x) \in W_{2,N}^l(U_{x_0})$ ist. Eine Definition der Räume $L_2(G)$, $W_2^l(G)$, $\mathring{W}_2^l(G)$, $C^l(G)$, $C_0^l(G)$, $C_0^\infty(G)$ findet man z. B. in [2].

*skalare, stark elliptische Operatoren $A_j$ in $L_2(G)$,*

$$A_j u_j = \sum_{|\alpha|,|\beta| \leq m} \left( \sum_{k=1}^{S-1} \lambda_{\alpha,k} \lambda_{\beta,k} \right) D^\alpha D^\beta u_j(x),\ u_j \in D(A_j)$$

*zugeordnet werden.*

Beweis. Diese Eigenschaft läßt sich leicht verifizieren, indem man $T^2 u = d[\mathrm{d}[u]]$ bildet und die Eigenschaften der Matrizen $X_k \in \gamma_N$ ausnutzt. Die starke Elliptizität von $A$ folgt unmittelbar aus (1.14).

Bezeichnen wir durch $T_0$ einen Operator vom $D$-Typ mit dem Definitionsgebiet $D(T_0) = C^\infty_{0,N}(G)^2)$, dann besitzt $T_0$ die folgenden Eigenschaften.

**Satz 2.** (a) *$T_0$ ist symmetrisch und besitzt gleiche Defektindizes, d. h.* Def $T_0 = (k, k)$, *wobei auch $k = \infty$ sein kann.*

(b) *Der adjungierte Operator $T_0^*$ zu $T_0$ ist ebenfalls vom D-Typ.*

Beweis. Die Symmetrie von $T_0$, d. h. $(T_0 u, v)_{L_{2,N}(G)} = (u, T_0 v)_{L_{2,N}(G)}$ für $u, v \in D(T_0)$, folgt unmittelbar durch partielle Integration. Für Def $T_0 = (k, k)$ ist zu zeigen, daß die Dimensionen der Räume def $R(T_0 + \mathrm{i}E)$ und def $R(T_0 - \mathrm{i}E)$ gleich[3]) sind. Dazu bilden wir $R(T_0 + \mathrm{i}E)$ eineindeutig auf $R(T_0 - \mathrm{i}E)$ mit Hilfe der Matrix $X_0 \in \gamma_N$ ab (diese Beweisidee wurde von L. Maurin ([6]) angegeben). Da $X_0$ nicht in den Koeffizienten von $T_0$ auftritt, gilt $X_0 T_0 = -T_0 X_0$. Außerdem ist für $u \in D(T_0)$ auch $-X_0 u \in D(T_0)$. Daraus folgt: Jedem $f \in R(T_0 + \mathrm{i}E)$ kann wegen

$$X_0 f = X_0(T_0 + \mathrm{i}E)u = (T_0 - \mathrm{i}E)(-X_0 u) = g$$

immer eineindeutig ein $g \in R(T_0 - \mathrm{i}E)$ zugeordnet werden. Um die Aussage (b) des Satzes zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß ein $v \in D(T_0^*)$ stets auch zu $W^m_{2,N}(G')$ gehört, wobei $G'$ ein echt in $G$ enthaltenes Gebiet ist. Denn unter dieser Voraussetzung verifiziert man die Behauptung leicht mittels partieller Integration.

Nach der Neumannschen Formel ([1])

$$D(T_0^*) = D(\overline{T}_0) \dotplus N(T_0^* - \mathrm{i}E) \dotplus N(T_0^* + \mathrm{i}E)$$

($\overline{T}_0$ bezeichnet den Abschluß des Operators $T_0$, $N(T_0^* \pm \mathrm{i}E)$ den Nullraum des Operators $(T_0 \pm \mathrm{i}E)$), genügt es zu zeigen, daß $D(\overline{T}_0) \subset W^m_{2,N}(G)$ und $N(T_0^* \pm \mathrm{i}E) \subset W^m_{2,N}(G')$ gilt. Da $D(\overline{T}_0)$ der Abschluß von $D(T_0) = C^\infty_{0,N}(G)$ in der Metrik $|u|^2 = \|Tu\|^2_{L_{2N}(G)} + \|u\|^2_{L_{2N}(G)}$ ist, und aus der Elliptizitätsbedingung (1.14) für $u \in C^\infty_{0,N}(G)$

$$c' \|u\|^2_{W^m_{2,N}(G)} \leqq \{\|Tu\|^2_{L_{2,N}(G)} + \|u\|^2_{L_{2,N}(G)}\} \leqq c\, \|u\|^2_{W^m_{2,N}(G)}, \quad c' > 0,$$

folgt (der ausführliche Beweis dieser Ungleichung läßt sich analog dem Beweis von Lemma 2 (a) und Satz 4 (a) führen), ergibt sich $D(\overline{T}_0) = \mathring{W}^m_{2,N}(G) \subset W^m_{2,N}(G)$. Betrachtet man den Operator $Bu = T_0 u + \mathrm{i}u$, $D(B) = C^\infty_{0,N}(G)$, so ist sein adjungierter Operator $B^* u = T_0^* u - \mathrm{i}u$. Für $v \in N(T_0^* - \mathrm{i}E)$, $u \in C^\infty_{0,N}(G)$ ist daher $(Bu, v)_{L_{2N}} = (u, B^* v)_{L_{2,N}} = 0$. Woraus nach dem Theorem über die innere Regularität für

[3]) $R(T_0 \pm E\mathrm{i}) = (T_0 \pm \mathrm{i}E)\, D(T_0)$. def $R(T_0 \pm \mathrm{i}E) = L_{2,N} \ominus R(T_0 \pm \mathrm{i}E)$

elliptische Systeme ([4]) folgt, daß $v \in C_N^\infty(G')$, d. h. $N(T_0^* \pm iE) \subset C_N^\infty(G')$ gilt. Insgesamt gehört also $u \in D(T_0^*)$ stets auch zu $W_{2,N}^m(G') + C_N^\infty(G') \subset W_{2,N}^m(G')$. Damit ist Satz 2 bewiesen.

Wir bemerken hier, daß nach dem selben Verfahren für den Oparetor $T_0^2$, $D(T_0^2) = C_{0,N}^\infty(G)$, folgt, daß $u \in D((T_0^2)^*)$ stets zu $W_{2,N}^{2m}(G')$ gehört. Aus Satz 2 folgt nun unmittelbar die Existenz sebstadjungierter Erweiterungen $T'$ des Operators $T_0$, die wegen $T_0 \subset T' \subset T_0^*$ ebenfalls vom D-Typ sind. Nach der vorangehenden Bemerkung erfüllen diese Operatoren $T'$ auch alle die Voraussetzung des Satzes 1 $D((T')^2) \subset W_{2N}^{2m, loc}(G)$, so daß man diesen Operatoren skalare Operatoren $A_j'$ im Sinne von Satz 1 zuordnen kann. Bezeichnen wir durch $p$ und $r$ die Defektzahlen einer symmetrischen Erweiterung $T$ des Operators $T_0$, d. h. Def $T = (p, r)$, und durch $l_j$ die gleichen Defektzahlen, der zum Operator $T$ nach Satz 1 gehörigen skalaren, symmetrischen Operatoren $A_j \geqq 0$, d. h. Def $A_j = (l_j, l_j)$, so gilt

**Satz 3.** (a) $0 \leqq p, r \leqq \sum_{j=1}^{N} l_j$

(b) *Für $l_j = 0$ ist der Abschluß $\overline{T}$ von $T$ auf $H_{T^2}$ selbstadjungiert, wobei $H_{T^2}$ den Abschluß von $D(T^2)$ in der Metrik $(T^2 u + u, u)_{L_{2,N}(G)}$ bezeichnet.*

Beweis. Aus der Beziehung

$$(T^2 \pm iE) D(T^2) = \sum_{j=1}^{N} \oplus (A_j \pm iE) D(A_j), \quad D(A_j) \supset C_0^\infty(G),$$

folgt Def $T^2 = \sum_{j=1}^{N}$ Def $A_j$, und zusammen mit der Beziehung

$$(T^2 + E) D(T^2) \subset (T \pm iE) D(T)$$

die Behauptung (a) des Satzes.

Daß $\overline{T}$ selbstadjungiert ist für Def $A_j = (0, 0)$, ist nach (a) klar. Es ist noch $D(\overline{T}) = H_{T^2}$ zu zeigen. Nach dem Spektralsatz ist:

$$\overline{T} = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE_\lambda, \quad |\overline{T}| = \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda| \, dE_\lambda, \tag{1.15}$$

$$u \in D(\overline{T}) = D(|\overline{T}|) \text{ genau dann, wenn } \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^2 \, d(E_\lambda u, u) < \infty \text{ ist.}$$

Offensichtlich ist aber auch $\overline{T}^2 = \overline{T^2}$ selbstadjungiert und

$$|\overline{T}| = \sqrt{\overline{T}^2} = \sqrt{\overline{T^2}}.$$

Nach [8] ist aber $H_{T^2} = D([\overline{T^2}]^{\frac{1}{2}}) = D(|\overline{T}|)$, woraus mit (1.15) die Behauptung folgt.

*Folgerung. Ist $G = R_n$, so ist der Abschluß $\overline{T}_0$ von $T_0$ auf $W_{2,N}^m(R_n)$ selbstadjungiert.*

Beweis. Der dem Operator $T_0$ nach Satz 1 zugeordnete Operator $A_0$ erfüllt in diesem Fall die Voraussetzungen des Satzes 3 (b) (man vergleiche z. B. Beresanski [2]), $H_{T^2} = W_{2,N}^m(R_n)$.

Im restlichen Teil des 1. Abschnittes betrachten wir noch spezielle Operatoren vom D-Typ. Wir untersuchen Operatoren gerader Ordnung. Es sei

$$T_2 u = \sum_{|\alpha| \leqq 2r} \left( \sum_{k=1}^{S-1} \lambda_{\alpha,k} X_k \right) D^\alpha u, \tag{1.16}$$

$$u \in D(T_2) = \{u | u \in W_{2,N}^{2r}(G),\ D^\beta u|_{\partial G} = 0 \quad \text{für} \quad |\beta| < r\}.$$

Beim Nachweis der Eigenschaften des Operators $T_2$, die wir im Satz 4 zusammenfassen, spielt die Aussage des folgenden Lemmas eine große Rolle.

**Lemma 2.** *Es sei* $B_0 = \{x | x \in R_n,\ |x| < 1\}$, $P_0 = B_0 \cap \{x | x \in R_n,\ x_1 = 0\}$, $B_0^+ = B_0 \cap \{x | x \in R_n,\ x_1 > 0\}$, $\mathring{T} = \sum_{|\alpha| = 2r} \left( \sum_{k=1}^{S-1} \lambda_{\alpha,k} X_k \right) D^\alpha$ *ein Operator vom D-Typ, für den nach Voraussetzung* (1. 14) *für alle* $\xi \in R_n$ *gilt*

$$c' |\xi|^{4r} \leqq \sum_{|\alpha| = |\beta| = 2r} \left( \sum_{k=1}^{S-1} \lambda_{\alpha,k} \lambda_{\beta,k} \right) \xi^\alpha \xi^\beta \leqq c |\xi|^{4r}, \quad c' > 0. \tag{1.17}$$

*Dann gibt es eine Konstante* $K > 0$, *so daß*

(a) *für* $u \in \mathring{W}_{2,N}^{2r}(B_0)$

$$\|u\|_{W_{2,N}^{2r}(B_0)} \leqq K \|\mathring{T} u\|_{L_{2,N}(B_0)} \quad \textit{ist.}$$

(b) *für* $u \in W_{2,N}^{2r}(B_0^+)$, $D^\beta u|_{P_0} = 0$ *für* $|\beta| < r$, $\operatorname{spt} u(x) \subset B_0^+ \cup P_0$

$$\|u\|_{W_{2,N}^{2r}(B_0^+)} \leqq K \|\mathring{T} u\|_{L_{2,N}(B_0^+)} \quad \textit{ist.}$$

Beweis. Für $u \in C_{0,N}^\infty(B_0)$ bezeichnen wir durch $\hat{u}(\xi)$ die Fouriertransformierte

$$\widehat{u(x)} = \hat{u}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{R_n} u(x) e^{-ix\cdot\xi}\, dx,$$

für die die Beziehungen $\widehat{D^\alpha u(x)} = \xi^\alpha \hat{u}(\xi)$, $\|u\|_{L_{2,N}} = \|\hat{u}\|_{L_{2,N}}$ gelten. Aus (1. 17) folgt für $u \in C_{0,N}^\infty(B_0)$

$$\|\mathring{T} u\|^2 = (\widehat{\mathring{T} u}, \widehat{\mathring{T} u}) = \int_{B_0} \left( \sum_{|\alpha| = 2r} \sum_{k=1}^{S-1} \lambda_{\alpha,k} X_k \widehat{D^\alpha u} \sum_{|\beta| = 2r} \sum_{l=1}^{S-1} \lambda_{\beta,l} \overline{X_l \widehat{D^\beta u}} \right) d\xi =$$

$$= \int_{B_0} \sum_{|\alpha| = |\beta| = 2r} \sum_{k=1}^{S-1} \lambda_{\alpha,k} \lambda_{\beta,k} \xi^\alpha \xi^\beta |\hat{u}|^2\, d\xi,$$

$$c' \int_{B_0} |\xi|^{4r} |\hat{u}|^2\, d\xi \leqq \|\widehat{\mathring{T} u}\|_{L_{2,N}(B_0)}^2 \leqq c \int_{B_0} |\xi|^{4r} |\hat{u}|^2\, d\xi,$$

und durch Rücktransformation

$$c' \int\limits_{B_0} \sum_{|\gamma|=r} |D^{2\gamma} u|^2 \, dx \leqq \|\mathring{T} u\|^2_{L_{2,N}(B_0)} \leqq c \int\limits_{B_0} \sum_{|\gamma|=r} |D^{2\gamma} u|^2 \, dx.$$

Verwenden wir nun die Äquivalenz der Normen

$$\int\limits_{B_0} \sum_{|\gamma|=r} |D^{2\gamma} u|^2 \, dx \quad \text{und} \quad \int\limits_{B_0} \sum_{|\delta|=2r} |D^{\delta} u|^2 \, dx,$$

sowie die Poincarésche Ungleichung

$$\|u\|^2_{W^{2r}_{2,N}(B_0)} \leqq c \int\limits_{B_0} \sum_{|\delta|=2r} |D^{\delta} u|^2 \, dx,$$

so folgt

$$c' \|u\|_{W^{2r}_{2,N}(B_0)} \leqq \|\mathring{T} u\|_{L_{2,N}(B_0)} \leqq c \|u\|_{W^{2r}_{2,N}(B_0)} \tag{1.18}$$

für $u \in C^\infty_{0,N}(B_0)$. Wenn wir $u \in \mathring{W}^{2r}_{2,N}(B_0)$ durch Funktionen $v \in C^\infty_{0,N}(B_0)$ approximieren, so gilt (1. 18) in derselben Form für $u \in \mathring{W}^{2r}_{2,N}(B_0)$ Damit ist (a) gezeigt. Um (b) nachzuweisen, verfahren wir folgendermaßen. Die Funktionen $u \in W^{2r}_{2,N}(B_0^+)$, $D^\beta u|_{P_0} = 0$ für $|\beta| < r$, $\operatorname{spt} u(x) \subset B_0^+ \cup P_0$ approximieren wir durch Funktionen $v \in C^{2r}(\bar{B}_0^+)$; $\operatorname{spt} v(x) \subset B_0^+ \cup P_0$. Danach setzen wir die Funktionen $v$ nach dem Fortsetzungsverfahren von FICHTENHOLZ durch $\tilde{v}$ auf ganz $B_0$ fort. Bei diesem Verfahren bleiben die Differenzierbarkeitseigenschaften von $v$ erhalten und es gilt

$$\|\tilde{v}\|_{W^{2r}_{2,N}(B_0)} \leqq c \|v\|_{W^{2r}_{2,N}(B_0^+)}, \quad \|\mathring{T}\tilde{v}\|_{L_{2,N}(B_0)} \leqq c \|\mathring{T} v\|_{L_{2,N}(B_0^+)}. \tag{1.19}$$

Nach Teil (a) gilt für $\tilde{v} \in C^{2r}_{0,N}(B_0)$

$$c' \|\tilde{v}\|_{W^{2r}_{2,N}(B_0)} \leqq \|\mathring{T}\tilde{v}\|_{L_{2,N}(B_0)} \leqq c \|\tilde{v}\|_{W^{2r}_{2,N}(B_0)}. \tag{1.20}$$

Kombinieren wir (1. 19) und (1. 20) mit der offensichtlichen Ungleichung

$$\|v\|_{W^{2r}_{2,N}(B_0^+)} \leqq \|\tilde{v}\|_{W^{2r}_{2,N}(B_0)},$$

so folgt

$$\|v\|_{W^{2r}_{2,N}(B_0^+)} \leqq c \|\mathring{T} v\|_{L_{2,N}(B_0^+)}.$$

Da die Funktionen $v(x)$ die Funktion $u(x)$ in $W^{2r}_{2,N}(B_0^+)$ approximieren, gilt die obige Ungleichung auch für $u \in W^{2r}_{2,N}(B_0^+)$. Damit ist (b) bewiesen.

**Satz 4.** *Ist $G$ ein Gebiet im $R_n$, das gleichmäßig regulär aus der Klasse $C^{2r}$ [4]) und lokal aus der Klasse $C^{4r}$ ist, dann gilt für den durch* (1. 16) *definierten Operator $T_2$:*

(a) *Für $u \in D(T_2)$ ist*

$$\|u\|_{W^{2r}_{2,N}(G)} \leqq K\{\|T_2 u\|_{L_{2,N}(G)} + \|u\|_{L_{2,N}(G)}\}.$$

(b) *Der Operator $T_2$ ist selbstadjungiert.*

---

[4]) Eine genaue Definition dieser Ausdrücke ist in [3] gegeben.

Beweis. Auf der Grundlage von Lemma 2 ergeben sich die Aussagen des Satzes 4 auf analoge Weise wie die entsprechenden Aussagen für gleichmäßig elliptische, skalare Differentialoperatoren, die von Browder in [3] bewiesen wurden.

**2.** Im Folgenden wird das Spektrum der selbstadjungierten Erweiterungen $T' \supset T_0$ untersucht. Dabei werden die Begriffe Spektrum $S_{T'}$ und stetiges Spektrum $C_{T'}$ des Operators $T'$ im Sinne von Glasman [5] verwendet. So ist $\lambda \in S_{T'}$, wenn $\lambda$ nicht zur Resolventenmenge des Operators $T'$ gehört, und $\lambda \in C_{T'}$, wenn eine beschränkte, nichtkompakte Folge $\{u^{(k)}\} \subset D(T')$ existiert, für die

$$\lim_{k \to \infty} \|(T' - \lambda E) u^{(k)}\|_{L_{2,N}(G)} = 0$$

ist. Zwischen dem Spektrum $S_{T'}$ einer selbstadjungierten Erweiterung $T' \supset T_0$ und den Spektren $S_{A'_j}$ der dem Operator $T$ nach Satz 1 zugeordneten Operatoren $A'_j$ besteht der folgende Zusammenhang.

**Satz 5.** *Ist $T'$ eine selbstadjungierte Erweiterung des Operators $T_0$, so sind auch die zugeordneten skalaren Operatoren $A'_j$ selbstadjungierte Erweiterungen (des zum Operator $T_0$ gehörigen skalaren) Operators $A_0$, und es gilt*

$$S_{T'} = \sqrt{\bigcup_j S_{A'_j}} \cup \left(-\sqrt{\bigcup_j S_{A'_j}}\right),$$

*d. h., wenn $\lambda \in \bigcup_{j=1}^{N} S_{A'_j}$ so ist $\sqrt{\lambda} \in S_{T'}$ und $-\sqrt{\lambda} \in S_{T'}$, und umgekehrt wenn $\mu \in S_{T'}$, so ist $\mu^2 \in \bigcup_{j=1}^{N} S_{A'_j}$.*

Beweis. Ist $T'$ selbstadjungiert, $T' \supset T_0$, so ist auch $T'^2$ selbstadjungiert auf $D(T'^2)$ und wegen

$$(T'^2 \pm iE) D(T^2) = \sum_{j=1}^{N} \oplus (A'_j \pm iE) D(A'_j),$$

ist auch $A'_j$ selbstadjungiert auf $D(A'_j) \supset D(A_0)$. Aus $T'^2 = \sum_{j=1}^{N} A'_j$, folgt für die Spektren

$$S_{T'^2} = \bigcup_{j=1}^{N} S_{A'_j}$$

Nach einem Satz über die Spektren von selbstadjungierten Operatoren gilt somit

$$S_{|T'|} = S_{\sqrt{T'^2}} = \sqrt{\bigcup_{j=1}^{N} S_{A'_j}},$$

d. h., wenn $\mu \in S_{|T'|}$ ist, so gehört $\mu$ oder $(-\mu)$ zu $S_{T'}$. Für die Begründung des Satzes 5 bleibt noch zu zeigen, daß mit $\mu \in S_{T'}$ stets auch $-\mu \in S_{T'}$ ist. Der Beweis hierfür wird nach demselben Verfahren durchgeführt, wie es von Glasmann in [5] für den Diracoperator angegeben wurde. Damit ist Satz 5 bewiesen.

Mit dem Satz 5 ist die Frage nach dem Spektrum des Vektordifferentialoperators $T'$ auf die Frage nach dem Spektrum des skalaren, stark elliptischen Operators $A'_j$ zurückgeführt.

Folgerung 1. *Für beliebige selbstadjungierte Erweiterungen $T' \supset T_0$ ist im Fall quasikonischer und quasizylindrischer* [5]) *Grundgebiete $G \subset R_n$ das stetige Spektrum $C_{T'}$ niemals leer.*

Beweis. Wäre das stetige Spektrum $C_{A'_j}$ des Operators $A'_j$ leer, so wäre nach dem Lemma von Rellich ([7]) die Einbettung von $H_{A'_j} \supset \mathring{W}_2^m(G)$ in $L_2(G)$ vollstetig. Wählt man in den sich nicht schneidenden Kugeln $K_i \subset G$ vom Radius $\varrho > 0$ die Funktion $f_i \in C_0^\infty(K_i)$, $\|f_i\|_{W_2^m(G)} = 1$, so kann man erreichnen, daß die Funktionen $\{f_i(x)\}$ im Raum $L_2(G)$ keine Cauchyfolge enthalten. Das ist ein Widerspruch.

Folgerung 2. (a) *Für beliebige selbstadjungierte Erweiterungen $T' \supset T_0$ mit $D(T') \subset W_{2,N}^m(G)$ ist im Fall beschränkter Grundgebiete ($\partial G \in C^1$) das Spektrum $S_{T'}$ ein reines Punktspektrum mit Eigenwerten endlicher Vielfachheit, die sich nicht im Endlichen häufen, d. h. $C_{T'} = \emptyset$.* (b) *In beschränkten Gebieten mit genügend glattem Rand existieren im Fall $m = 2r$ selbstadjungierte Operatoren $T'$ vom D-Typ mit $D(T') \subset W_{2,N}^m(G)$. Ist $G$ beschränkt, $\partial G \in C^{2m}$, so ist für den nach Satz 4 selbstadjungierten Operator $T_2 \supset T_0$, $D(T_2) \subset W_{2,N}^m(G)$ $(m = 2r)$ und $C_{T_2} = \emptyset$.*

Beweis. Der $T'$ nach Satz 1 zugeordnete Operator $A'_j$ ist wegen $D(T') \subset W_{2,N}^m(G)$ auf $D(A'_j) \subset W_2^m(G)$ definiert. Da $(T'^2 u + u, u)_{L_{2,N}(G)}$ eine zur $W_{2,N}^m(G)$-Metrik äquivalente Metrik liefert, ist $H_{T'^2} \subset W_{2,N}^m(G)$ und $H_{A'_j} \subset W_2^m(G)$. Für ein beschränktes Gebiet $G$ ($\partial G$ Rand von $G$, $\partial G \in C^1$) ist aber die Einbettung von $W_2^m(G)$ in $L^2(G)$ vollstetig. Nach dem Lemma von Rellich ([7]) folgt aber aus der Vollstetigkeit der Einbettung von $H_{A'_j}$ in $L_2(G)$ $C_{A'_j} = \emptyset$ und daraus über Satz 4 die Aussage (a) der Folgerung. Die Aussage (b) folgt unmittelbar aus (a).

Folgerung 3. *Für den nach der Folgerung aus Satz 3 selbstadjungierten Operator $\overline{T}_0$, $D(\overline{T}_0) = W_{2,N}^m(R_n)$ ist*

$$S_{T_0} = (-\infty, -\sqrt{p_0}\,] \cup [+\sqrt{p_0}, \infty),$$

*wobei* $p_0 = \inf\limits_{\xi \in R_n} \left\{ \sum\limits_{|\alpha|, |\beta| \leqq m} \sum\limits_{k=1}^{S-1} \lambda_{\alpha,k} \lambda_{\beta,k} \xi^\alpha \xi^\beta \right\} \geqq 0$ *und $\lambda_{\alpha,k}$ die Koeffizienten von $T_0$ sind.*

Beweis. Eine Untersuchung des skalaren, selbstadjungierten Operators $\overline{A}_0$ auf $W_2^{2m}(R_n)$ zeigt, daß $S_{\overline{A}_0} = [p_0, \infty)$ ist. Nach Satz 4 ergibt sich Folgerung 3.

3. Im Weiteren sei $T'$ eine selbstadjungierte Erweiterung von $T_0$, für die $D(T') \subset W_{2,N}^m(G)$ und

$$\|u\|_{W_{2,N}^m(G)} \leqq c\{\|Tu\|_{L_{2,N}(G)} + \|u\|_{L_{2,N}(G)}\}, \qquad u \in D(T'),$$

gilt. Wir setzen ferner voraus, daß das stetige Spektrum $C_{T'}$ Lücken besitzt, der Punkt $\lambda = 0$ in einer dieser Lücken liegt und zur Resolventenmenge des Operators

---

[5]) Ein Gebiet $G$ heißt quasikonisch, wenn es Kugeln mit beliebig großem Radius enthält. Ein Gebiet $G$ heißt quasizylindrisch, wenn es nicht quasikonisch ist und eine unendliche Menge sich nicht schneidende Kugeln mit einem Radius $\varrho > 0$ enthält.

$T'$gehört. In diesem Fall ist die Frage interessant, unter welchen Voraussetzungen eine Störung

$$R(x) = \sum_{k=1}^{S(N)} r_k(x) X_k,$$

wobei $r_k(x)$ skalare, reelle Funktionen auf $G$ und $X_k$ voneinander verschiedene Matrizen aus $\gamma_N$ sind, das stetige Spektrum von $T'$ unverändert läßt, d. h. die stetigen Spektren von $T'$ und $T'+R(x)$ zusammenfallen.

Setzen wir voraus, daß die $r_k(x)$ $(k=1, 2, \ldots, S(N))$ fast überall in $G$ beschränkt sind, so ist $R(x)$ ein beschränkter, selbstadjungierter Operator auf $L_{2,N}(G)$,

$$\|Ru\|^2_{L_{2,N}(G)} = (Ru, Ru)_{L_{2,N}(G)} = (R^2 u, u) = \left(\sum_{k=1}^{S(N)} r_k^2(x) u, u\right)_{L_{2,N}(G)} \leqq c\|u\|^2_{L_{2,N}(G)},$$

und die Summe $\tilde{T}=T'+R(x)$ ist selbstadjungiert auf $D(T')$. Antwort auf die Frage, wann $C_{T'}=C_{\tilde{T}}$ ist, gibt der folgende Satz.

**Satz 6.** *Es sei:* $\{O_l\}_{l=1}^{\infty}$ *eine Überdeckung von G derart, daß*

$$O_l=\{x|x\in R_n,\ |x-y_l|<1\}$$

*ist, jede kompakte Untermenge von G mur mit endlich vielen* $O_l$ *einen nichtlieeren Durchschnitt besitzt und* $G\subset \bigcup_{l=1}^{\infty} O_l$ *gilt;* $G_l=G\cap O_l$; $r(x)=\left(\sum_{k=1}^{S(N)} r_k^2(x)\right)^{1/2}$. *Gilt für eine Störung* $R(x)=\sum_{k=1}^{S(N)} r_k(x) X_k$:

(3. 1) $r(x)$ *ist fast überall beschränkt in G,*

(3. 2) (a) $$\lim_{|y_l|\to\infty} \int_{G_l} r(x)]\,dx = 0, \quad \textit{fallsm} \quad > \frac{n}{2} \textit{ ist},$$

(b) $$\lim_{|y_l|\to\infty} \int_{G_l} [r(x)]^{\frac{n}{2m}}\,dx = 0, \quad \textit{falls} \quad m < \frac{n}{2} \textit{ ist},$$

(c) $$\lim_{|y_l|\to\infty} \int_{G_l} [r(x)]^{1+\varepsilon}\,dx = 0, \quad \textit{falls} \quad m = \frac{n}{2} \textit{ ist, } \varepsilon>0,$$

*dann fallen die stetigen Spektren der selbstadjungierten Operatoren* $T'\supset T_0$ *und* $T'+R(x) = \tilde{T}$ *zusammen.*

Beweis. Nach einer Verallgemeinerung des Satzes von Weyl ([10]) gilt $C_{T'}=C_{\tilde{T}}$, wenn die Resolventendifferenz

$$R_z(\tilde{T})-R_z(T') = (\tilde{T}-zE)^{-1}-(T'-zE)^{-1}$$

für irgendeinen gemeinsamen regulären Punkt $z$ vollstetig ist. Der Rest des Beweises, daß die Voraussetzungen (3. 1) und (3. 2) die Vollstetigkeit der genannten Resolventendifferenz garantieren, wird in den beiden folgenden Hilfssätzen gegeben.

**Lemma 3.** *Die Resolventendifferenz $R_z(\tilde{T})-R_z(T')$ ist für einen beliebigen gemeinsamen regulären Punkt vollstetig, wenn jede in der $W_2^m(G)$-Metrik beschränkte Menge $V$ in der $r$-Halbmetrik $\left\{\int_G r(x)|v(x)|^2dx\right\}^{\frac{1}{2}}$ relativkompakt ist.*

Beweis. Wir beweisen zuerst folgende Behauptung: $R_z(\tilde{T})-R_z(T')$ ist vollstetig, wenn für jede Menge $M=\{u|u\in W^m_{2,N}(G),\ \|u\|^2_{W^m_{2,N}}\leqq c\}$ die Menge $\{r(x)u|\,|u\in M\}$ in $L_{2,N}(G)$ relativkompakt ist. Aus der Darstellung der Resolventendifferenz

$$R_z(\tilde{T})-R_z(T') = -R_z(\tilde{T})(\tilde{T}-T')R_z(T') = -R_z(\tilde{T})R(x)T'^{-1}T'R_z(T')$$

für einen regulären Punkt $z$ folgt auf Grund der Beschränktheit der Operatoren $R_z(\tilde{T})$ und $T'R_z(T')$, daß $R_z(\tilde{T})-R_z(T')$ vollstetig ist, wenn $R(x)T'^{-1}$ vollstetig ist. Setzt man für ein beliebiges $h\in L_{2,N}(G){:}T'^{-1}h=u$, $h=T'u$, so ist für die Vollstetigkeit von $R(x)T'^{-1}$ folgende Aussage hinreichend: Für $M'=\{u|u=T^{-1}h,$ $u\in D(T')\subset W^m_{2,N}(G),\ \|h\|=\|T'u\|\leqq c\}$ ist die Menge $\{r(x)u|u\in M'\}$ relativkompakt in $L_{2,N}(G)$. Denn auf Grund von $\|R(x)u\|_{L_{2,N}(G)}\leqq\|r(x)u\|_{L_{2,N}(G)}$ ist dann auch $\{R(x)u=R(x)T'^{-1}h\mid u\in M'$, d. h. $\|h\|\leqq c\}$ relativkompakt in $L_{2,N}(G)$, was die Vollstetigkeit von $R(x)T'^{-1}$ bedeutet. Beachten wir, daß auf Grund der Voraussetzungen über $T'$

$$\|u\|_{W^m_{2,N}(G)}\leqq c\{\|T'u\|_{L_{2,N}(G)}+\|u\|_{L_{2,N}(G)}\},\qquad u\in D(T'),$$

ist, so folgt unsere erste Behauptung. Für den vollständigen Beweis des Lemmas bleibt noch zu zeigen: Für jede Menge von Vektorfunktionen $M=\{u|u\in W^m_{2,N}(G),$ $\|u\|_{W^m_{2,N}(G)}\leqq c\}$ ist die Menge $\{r(x)u|u\in M\}$ relativkompakt in $L_{2,N}(G)$, wenn jede Menge $V=\{v|v\in W_2^m(G),\ \|v\|_{W^m_{2,N}(G)}\leqq c\}$ skalarer Funktionen in der $r$-Halbmetrik relativkompakt ist. Es sei eine beliebige Menge $V$ skalarer Funktionen in der $r$-Halbmetrik relativkompakt. Dann gibt es in der Menge $\{u_j\}$ der Komponenten der Funktionen $u\in M$ eine Teilfolge $\{u_j^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ mit

$$\lim_{k,k'\to\infty}\int_G r(x)\,|u_j^{(k)}-u_j^{(k')}|^2\,dx=0.$$

Daraus folgt, daß für $\{u^{(k)}\}\subset M$ gilt

$$\lim_{k,k'\to\infty}\|r(x)\,(u^{(k)}-u^{(k')}\|^2_{L_{2,N}(G)}=\lim_{k,k'\to\infty}\sum_{j=1}^{N}\|r(x)\,(u_j^{(k)}-u_j^{(k')})\|^2_{L_2(G)}\leqq$$

$$\leqq c\lim_{k,k'\to\infty}\sum_{j=1}^{N}\int_G r(x)\,|u_j^{(k)}-u_j^{(k')}|^2\,dx=0,$$

weil fast überall $r(x)\leqq c$ ist. Das bedeutet aber, daß die Menge $\{r(x)u|u\in M\}$ relativkompakt in $L_{2,N}(G)$ ist, was zu zeigen war.

**Lemma 4.** *Jede Menge $V=\{v|v\in W_s^2(G),\ \|v\|_{W_2^s(G)}\leqq c\}$ ist in der $(r,j)$-Halbmetrik*

$$\left\{\int_G r(x)\sum_{|\alpha|\leqq j}|D^\alpha v|^2\,dx\right\}^{\frac{1}{2}}$$

*für $j < s$ relativkompakt, wenn die Bedingungen*

(3. 1) $r(x)$ *fast überall beschränkt in* $G$,

(3. 2′) (a) $$\lim_{|y_l| \to \infty} \int_{G_l} r(x)\, dx = 0, \quad \textit{falls} \quad (s-j) > \frac{n}{2} \textit{ ist},$$

(b) $$\lim_{|y_l| \to \infty} \int_{G_l} [r(x)]^{\frac{n}{2(s-j)}}\, dx = 0, \quad \textit{falls} \quad (s-j) < \frac{n}{2} \textit{ ist},$$

(c) $$\lim_{|y_l| \to \infty} \int_{G_l} [r(x)]^{1+\varepsilon}\, dx = 0, \quad \textit{falls} \quad (s-j) = \frac{n}{2} \textit{ ist}, \quad \varepsilon > 0$$

*erfüllt sind* ($G_l$ *wie in Satz* 6 *definiert*).

Beweis. Aus jeder Teilmenge $V'$ von $V$ läßt sich nach folgendem Verfahren eine Fundamentalfolge $\{v_k\}$ bezüglich der $(r, j)$-Halbmetrik auswählen. Im Gebiet $G \cap K_t$, $K_t = \{x \mid x \in R_n, |x| < t\}$ folgt aus den Einbettungssätzen, daß die Menge $V'$ in der $W_2^j(G \cap K_t)$-Metrik ($j < s$) relativkompakt ist. D. h. es gibt eine Fundamentalfolge $\{v_t^{(k)}\} \subset V'$, so daß

$$\lim_{k, k' \to \infty} \|v_t^{(k)} - v_t^{(k')}\|_{W_2^j(G \cap K_t)} = 0$$

ist. Da $r(x)$ fast überall in $G \cap K_t$ beschränkt ist, folgt

$$\lim_{k, k' \to \infty} \int_{G \cap K_t} r(x) \sum_{|\alpha| \leqq j} |D^\alpha (v_t^{(k)} - v_t^{(k')})|^2\, dx = 0.$$

D. h. für beschränkte Gebiete ist die Aussage von Lemma 4 allein unter der Voraussetzung (3. 1) bewiesen. Im Weiteren sei $G$ unbeschränkt. Betrachtet man eine Folge von Kugeln $K_t$ mit den Radien $t = 1, 2, \ldots$ und wählt in jedem Gebiet $G \cap K_t$ eine Fundamentalfolge $\{v_t^{(k)}\} \subset V'$ wie oben, so daß $\{v_1^{(k)}\} \subset \{v_2^{(k)}\} \subset \cdots$, dann besitzt die Diagonalfolge $v_1^1, v_2^2, \ldots$, die wir zur Abkürzung durch $\{v_k\}$ bezeichnen, die Eigenschaft, daß für eine beliebig ausgewählte Kugel $K_t$ stets

$$\lim_{k, k' \to \infty} \int_{G \cap K_t} r(x) \sum_{|\alpha| \leqq j} |D^\alpha (v_k - v_{k'})|^2\, dx = 0$$

gilt. Die so gewonnene Folge $\{v_k\}$ ist auch Fundamentalfolge in der $(r, j)$-Halbmetrik, denn es ist

$$\int_G r(x) \sum_{|\alpha| \leqq j} |D^\alpha (v_k - v_{k'})|^2\, dx \leqq$$

$$\leqq \int_{G \cap K_t} r(x) \sum_{|\alpha| \leqq j} |D^\alpha (v_k - v_{k'})|^2\, dx + \int_{G \setminus (G \cap K_t)} r(x) \sum_{|\alpha| \leqq j} |D^\alpha (v_k - v_{k'})|^2\, dx \leqq \varepsilon$$

für genügend große $k$, $k'$.

Das erste Integral über $G \cap K_t$ wird nach dem Vorangehenden kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ für genügend große $k$, $k'$ bei beliebigem $t$. Das zweite Integral

$$\int_{G \setminus K_t} r(x) \sum_{|\alpha| \leqq j} |D^\alpha (v_k - v_{k'})|^2\, dx \leqq \sum_{l=l_0}^{\infty} \int_{(G \setminus K_t) \cap G_l = \Omega_l} r(x) \sum_{|\alpha| \leqq j} |D^\alpha (v_k - v_{k'})|^2\, dx = J$$

wird kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ für genügend großes $t$ bei beliebigen $k$, $k'$. Beim Nachweis dieser Behauptung unterscheiden wir drei Fälle.

(a) Ist $(s-j) > \frac{n}{2}$, so folgt aus den Einbettungssätzen ([9]), daß die Funktionen $v_k, v_{k'} \in W_2^s(\Omega_l)$ zu $C^j(\bar{\Omega}_l)$ gehören. Deshalb können wir abschätzen

$$J \leqq c \sum_{l=l_0}^{\infty} \Big(\int_{\Omega_l} r(x)\,dx\Big) \|v_k - v_{k'}\|^2_{C^j(\bar{\Omega}_l)} = J_1 \text{ [6]}.$$

Aus der Stetigkeit der Einbettung von $W_2^s(\Omega_l)$ in $C^j(\bar{\Omega}_l)$ und der Voraussetzung (3. 2) (a) folgt schließlich

$$J_1 \leqq c \sum_{l=l_0}^{\infty} \Big(\int_{\Omega_l} r(x)\,dx\Big) \|v_k - v_{k'}\|_{W_2^s(\Omega_l)} \leqq c \cdot \varepsilon'(t) \leqq \frac{\varepsilon}{2}$$

für genügend großes $t$ (unabhängig von $k$ und $k'$).

(b) Ist $(s-j) < \frac{n}{2}$, so läßt sich $J$ mit der Hölderschen Ungleichung auf folgende Weise abschätzen, $\Big(1 < p,\ p' < \infty,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\Big)$,

$$J \leqq c \sum_{l=l_0}^{\infty} \Big(\int_{\Omega_l} r^p\,dx\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_{\Omega_l} \sum_{|\alpha| \leqq j} |D^\alpha(v_k - v_{k'})|^{2p'}\Big)^{\frac{1}{2p'}2} =$$

$$= c \sum_{l=l_0}^{\infty} \Big(\int_{\Omega_l} r^p\,dx\Big)^{\frac{1}{p}} \|v_k - v_{k'}\|^2_{W^j_{2p'}(\Omega_l)} = J_2 .$$

Verwenden wir wieder die Einbettungssätze, so gilt für $v_k, v_{k'} \in W_2^s(\Omega_l)$

$$\|v_k - v_{k'}\|_{W^j_{2p'}(\Omega_l)} \leqq c\,\|v_k - v_{k'}\|_{W_2^s(\Omega_l)},$$

wenn $-\frac{n}{2} \leqq j - \frac{n}{2p'} \leqq s - \frac{n}{2}$ ist. Um an die Funktion $r(x)$ möglichst schwache Forderungen zu stellen, wählen wir $p'$ innerhalb der Bedingungen $1 < p' < \infty$, $j - \frac{n}{2p'} \leqq s - \frac{n}{2}$ möglichst groß, d. h. $\frac{1}{p'} = -\frac{2}{n}(s-j) + 1 > 0$. Über die Bedingung $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ erhalten wir für $p = \frac{n}{2(s-j)}$. Damit folgt unter Verwendung von (3. 2') (b)

$$J_2 \leqq c \sum_{l=l_0}^{\infty} \Big(\int_{\Omega_l} r^{\frac{n}{2(s-j)}}\,dx\Big)^{\frac{2(s-j)}{n}} \|v_k - v_{k'}\|^2_{W_2^s(\Omega_l)} \leqq c\varepsilon'(t) \leqq \frac{\varepsilon}{2} \tag{3. 3}$$

für genügend großes $t$ (unabhängig von $k$ und $k'$).

[6]) Für $v \in C^j(\bar{\Omega}_l)$ ist $\|v\|_{C^j(\bar{\Omega}_l)} = \sup_{x \in \Omega_l} \Big\{ \sum_{|\alpha| \leqq j} |D^\alpha v| \Big\}$.

(c) Ist $(s-j) = \frac{n}{2}$, so können wir wie in (b) abschätzen, müssen aber (wegen $p' < \infty$) $\frac{1}{p'} = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} > 0$ wählen, für irgendein $\varepsilon > 0$. Daraus folgt dann $p = 1+\varepsilon$ und unter Verwendung von (3. 2') (c) wie in (3. 3)

$$J_2 \leqq c \sum_{l=l_t}^{\infty} \Big( \int_{\Omega_l} r^{1+\varepsilon}\, dx \Big)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \|v_k - v_{k'}\|^2_{W_2^s(\Omega_l)} \leqq c\varepsilon'(t) \leqq \frac{\varepsilon}{2}$$

für genügend großes $t$ (unabhängig von $k$ und $k'$). Damit ist der Beweis des Lemmas 4 beendet. Der Beweis des Satzes 6 ergibt sich vollständig aus Lemma 3 und Lemma 4 für $j=0$, $s=m$.

Folgerung. *Die Aussage des Satzes 6 ist auch für die Störung*

$$\tilde{R}(x) = R(x) + r_0(x) E^{(N)}$$

*richtig, wenn $r_0(x)$ eine skalare, reelle Funktion, $E^{(N)}$ die N-reihige Einheitsmatrix ist, und zusätzlich zu den Voraussetzungen des Satzes 6 bezüglich $r(x)$ dieselben bezüglich $r_0(x)$ erfüllt sind.*

Beweis. Die Folgerung ergibt sich nach dem gleichen Beweisverfahren wie Satz 6, wenn dort $\tilde{T} = T' + R(x)$ als Ausgangsoperator mit bekanntem stetigen Spektrum und $\tilde{\tilde{T}} = \tilde{T} + r_0(x) E^{(N)}$ als gestörter Operator betrachtet wird.

## Literatur


[1] N. I. Achieser, I. M. Glasman, Theorie der linearen Operatoren im Hilbertraum, *Berlin*, 1960.
[2] I. M. Beresanski, Zerlegung nach Eigenfunktionen sebstadjungierter Operatoren, *Kiew*, 1965. [Russisch].
[3] F. E. Browder, On the spectral theory of elliptic differential operators I, *Math. Annalen* **142** (1961), 22—130.
[4] G. Fichera, Linear elliptic differential systems and eigenvalue problems, *Berlin—Heidelberg—New York*, 1965.
[5] I. M. Glasman, Direkte Methoden der qualitativen Spektralanalysis singulärer Differentialoperatoren. *Moskau*, 1963. [Russisch].
[6] K. Maurin, Methoden des Hilbertraumes, *Moskau*, 1965 [Russisch].
[7] M. A. Neumark, Lineare Differentialoperatoren, *Berlin*, 1963.
[8] F. Riesz, B. Sz.-Nagy, Vorlesungen über Funktionalanalysis, *Berlin*, 1956.
[9] S. L. Sobolew, Einige Anwendungen der Funktionalanalysis auf Gleichungen der mathematischen Physik, *Berlin*, 1964.
[10] H. Triebel, Vorlesungen über die Spektraltheorie von Differentialoperatoren, *Jena*, 1965.


*(Eingegangen am 4. März 1968.)*