Potenzproduktideale I

Von RENATE KUMMER (Halle) und BODO RENSCHUCH (Potsdam)

Inhaltsübersicht*)

Einleitung

§ 1. Vorbereitungen. Rechenregeln für Potenzproduktideale.
§ 2. Prime und primäre Potenzproduktideale.
§ 3. Darstellung der Potenzproduktideale durch irreduzible Potenzproduktideale.
§ 4. Konstruktion von Kompositionsreihen für primäre Potenzproduktideale.
§ 5. Die Dimension eines Potenzproduktideals. Potenzproduktideale der Hauptklasse.
§ 6. Erweiterungs-, Verengungs- und Grundideale von Potenzproduktidealen.
§ 7. Die Berechnung der Hilbertfunktion für Potenzproduktideale.
§ 8. Zur Syzygientheorie für Potenzproduktideale.

Einleitung

Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper**), und $x_0, x_1, \dots, x_n$ seien $n+1$ Variable. In der vorliegenden Arbeit werden im Polynomring $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ bzw. im äquivalenten H-Ring $K[x_0, x_1, \dots, x_n]$ für bestimmte Ideale — die Potenzproduktideale — die idealtheoretischen Begriffsbildungen und Operationen durch Angabe bzw. Berechnung von Basisdarstellungen illustriert. Sie entstand auf Grund einer Anregung, die Hermann Ludwig SCHMID dem Mitverfasser gab.

Grete HERMANN hatte in [4] (vgl. auch die Ergänzungen und Berichtigungen in [10]) Methoden zur Berechnung der zu einem Polynomideal gehörigen Grundideale, Primideale und Primärkomponenten entwickelt; jedoch sind bei deren Anwendung so viele Schritte erforderlich, daß sie fast keine praktische Bedeutung haben. An Hand des Lehrbuches [2] von Wolfgang GRÖBNER kann für Potenzproduktideale eine Theorie gewonnen werden, die z.B. mit Hilfe des einfachen fundamentalen Satzes 12 die Bestimmung der zu einem Potenzproduktideal gehörenden Primideale und Primärkomponenten auf schnellem Wege ermöglicht.

*) Diese Arbeit ist im wesentlichen ein Abdruck der Diplomarbeit von Renate LÜDDECKE (Geburtsname der Mitverfasserin), Univ. Halle, 1962, Referent: Prof. Dr. O.-H. Keller. Vom Mitverfasser stammen neben Einzelhinweisen die angegebenen Teile der §§6 und 8.

**) Die Ergebnisse der §§1—6 sind zum größten Teil auch für beliebige Körper K oder Ringe K mit Einselement richtig. Häufig wird die Gültigkeit des Teilerkettensatzes in $K[x_1, \dots, x_n]$ benötigt.

Im folgenden soll der Inhalt der einzelnen Paragraphen dieser Arbeit aufgeführt werden.

Ein Potenzproduktideal ist ein Polynomideal mit einer endlichen Basis, deren Elemente Produkte von Potenzen der x_ν sind.

§ 1: Satz 1 charakterisiert die Potenzproduktideale. Er liefert ein Kriterium, mit dessen Hilfe man leicht entscheiden kann, ob ein Polynom F in einem gegebenen Potenzproduktideal enthalten ist oder nicht. Jedes Potenzproduktideal besitzt eine eindeutig bestimmte unverkürzbare Potenzproduktbasis (Satz 2). Es werden Rechenregeln angegeben, mit deren Hilfe die Basiselemente des Durchschnitts und des Quotienten zweier Potenzproduktideale aus den Elementen der Potenzproduktbasen der Ausgangsideale berechnet werden können; die erhaltenen Basiselemente sind wieder Potenzprodukte der x_ν. Die Potenzproduktideale bilden einen distributiven Verband.

Ein Potenzprodukt-H-Ideal aus dem homogenen Polynomring $K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ ist genau dann zu einem inhomogenen Polynomideal aus $R = K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ äquivalent, wenn seine unverkürzbare Potenzproduktbasis in R liegt. Umgekehrt ist das zu einem inhomogenen Potenzproduktideal $\mathfrak{a}$ äquivalente H-Ideal $\mathfrak{a}_0$ natürlich ein Potenzproduktideal mit derselben unverkürzbaren Potenzproduktbasis, wie sie zu $\mathfrak{a}$ gehört.

§ 2: Durch Eigenschaften ihrer Potenzproduktbasiselemente können prime und primäre Potenzproduktideale charakterisiert werden (Sätze 9 und 10). Jede Potenz eines primären Potenzproduktideals ist primär.

§ 3: Ein Potenzproduktideal ist genau dann irreduzibel, wenn es ein primäres Ideal der Hauptklasse ist (Satz 11).

Ist für das beliebige Potenzproduktideal $\mathfrak{a}$ eine Potenzproduktbasis bekannt, so kann leicht eine unverkürzbare und damit reduzierte Darstellung $Ri(\mathfrak{a})$ von $\mathfrak{a}$ als Durchschnitt irreduzibler Potenzproduktideale angegeben werden, und diese ist durch $\mathfrak{a}$ eindeutig bestimmt (Satz 12/13). Faßt man in $Ri(\mathfrak{a})$ die zu demselben Primideal gehörenden irreduziblen Bestandteile zu je einem Primärideal zusammen, so erhält man eine reduzierte Darstellung $Rq(\mathfrak{a})$ von $\mathfrak{a}$ als Durchschnitt primärer Potenzproduktideale. Auch diese ist durch $\mathfrak{a}$ eindeutig bestimmt. Durch komponentenweise Quotientenbildung geht aus $Rq(\mathfrak{a})$ die reduzierte Darstellung $Rq(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})$ für den Idealqoutienten $\mathfrak{a}:\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{a}$ nach einem beliebigen Potenzproduktideal $\mathfrak{b}$ hervor. — Die zu einem Potenzproduktideal gehörigen Primideale und isolierten Primärkomponenten sind also ebenfalls Potenzproduktideale. Eine Potenzproduktbasis für das Radikal eines Potenzproduktideals erhält man auf einfache Weise aus dessen Potenzproduktbasis.

§ 4: Hier wird eine Methode angegeben, die für jedes primäre Potenzproduktideal $\mathfrak{q}$ eine Kompositionsreihe aus primären Potenzproduktidealen nach dem zugehörigen Primideal $\mathfrak{p}$ liefert. Die Anzahl ihrer Glieder ist gleich der Ordnung $h_0(\mathfrak{q})$ von $\mathfrak{q}$.

§ 5: Die Dimension eines Potenzproduktideals kann bei bekannter Potenzproduktbasis leicht bestimmt werden. — Mit Hilfe des Satzes 12 wird der Satz von der Dimensionserniedrigung für Potenzproduktideale vollständig bewiesen (Satz 17). — Potenzproduktideale der Hauptklasse lassen sich durch Eigenschaften ihrer Potenzproduktbasiselemente charakterisieren (Satz 18). Jedes Potenzproduktideal der Hauptklasse ist ungemischt.

Es wird eine Methode zur Lösung des „Problems der langsamsten Dimensionserniedrigung" für Potenzproduktideale entwickelt. Sie liefert eine geeignete Numerierung der s Elemente der unverkürzbaren Potenzproduktbasis des Ideals $\mathfrak{a}$, so daß sich in der Teilerkette

$$(q_1) \subset (q_1, q_2) \subset ..., (q_1) \subset (q_1, q_2) \subset \cdots \subset (q_1, q_2, ..., q_s) = \mathfrak{a}$$

die Dimension von Glied zu Glied möglichst langsam erniedrigt.

Im § 6 werden Potenzproduktbasen für Erweiterungs-, Verengungs- und Grundideale von Potenzproduktidealen angegeben. Dabei erweist sich die vom Mitverfasser gegebene Definition der Grundideale als sehr zweckmäßig, da sie ohne vorherigen Übergang zu transformierten Idealen und ohne Kenntnis der reduzierten Darstellung anwendbar ist. Mit Hilfe der Grundideale und des Satzes 12 kann für jedes Potenzproduktideal sukzessiv eine unverkürzbare (reduzierte) Darstellung durch größte Primärkomponenten, die Potenzproduktideale sind, konstruiert werden, beginnend mit den Komponenten größter Dimension.

Im § 7 wird die Relation

$$H(t; \mathfrak{a}+\mathfrak{b}) = H(t; \mathfrak{a}) + H(t; \mathfrak{b}) - H(t; \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$$

für Potenzproduktideale verallgemeinert. Auf Grund des betr. Satzes 22 kann die Berechnung der Hilbertfunktion eines beliebigen Potenzproduktideals nach einer einfachen Formel erfolgen (Satz 23). Emanuel SPERNER hat in [9] implizit gezeigt, daß die Hilbertfunktion $H(t; \mathfrak{a})$ eines beliebigen H-Ideals $\mathfrak{a}$ für hinreichend große t gleich derjenigen eines gewissen Potenzproduktideals ist; ist dieses Potenzproduktideal bekannt, so kann $H(t; \mathfrak{a})$ mit Hilfe des Satzes 23 berechnet werden.

§ 8: Jedes primäre Potenzproduktideal ist perfekt (Satz 24). Dem Mitverfasser gelang es, für beliebige Potenzproduktideale eine Basis des zweiten Syzygienmoduls anzugeben. Ihre Elemente sind ebenfalls Potenzprodukte.

Zum besseren Verständnis werden in jedem Paragraphen die benötigten Begriffe kurz definiert und am Schluß jeweils Beispiele zu den Ergebnissen angegeben.

In diesem ersten Teil der Arbeit befinden sich die §§ 1—4 und das Literaturverzeichnis. Der zweite Teil wird demnächst in dieser Zeitschrift erscheinen.

§ 1. Vorbereitungen. Rechenregeln für Potenzproduktideale

Es sei K ein unendlicher Körper, und $x_0, x_1, ..., x_n$ seien $n+1$ verschiedene Variable. Wenn nicht ausdrücklich etwas anderes betont wird (so in § 6), sollen sämtliche in dieser Arbeit vorkommenden Größen demselben Polynomring angehören, entweder $K[x_1, ..., x_n]$ oder dem zugehörigen H-Ring $K[x_0, x_1, ..., x_n]$. Unter einem Ideal in dem H-Ring ist stets ein homogenes Ideal zu verstehen ([2]). Es gilt der Basissatz.

Frakturbuchstaben bezeichnen stets Polynomideale aus dem gerade bevorzugten Polynomring, während p und q Potenzprodukte der x_ν und $\langle p, q\rangle$ bzw. $[p, q]$ den größten gemeinsamen Teiler bzw. das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Potenzprodukte p und q im zahlentheoretischen Sinne bezeichnen.

Definition 1. *Ein Ideal $\mathfrak{a}$ aus $K[x_1, ..., x_n]$ bzw. $K[x_0, x_1, ..., x_n]$, das eine Basis besitzt, deren Elemente Potenzprodukte der x_ν sind, heißt* ***Potenzproduktideal****. Ist in dieser Basis kein Element überflüssig, so nennt man sie* ***unverkürzbar****.*

Jede Potenzproduktbasis eines Potenzproduktideals läßt sich durch Streichen der überflüssigen Elemente in eine unverkürzbare Basis verwandeln.

Wie man leicht sieht, gelten für Potenzproduktideale die folgenden drei Sätze:

Satz 1. *Das Ideal* $\mathfrak{a}$ *ist genau dann ein Potenzproduktideal, wenn für jedes Polynom* $F = \sum_{i=1}^{m} f_i p_i$ *aus* $\mathfrak{a}$ *(mit* $f_i \in K, f_i \neq 0$ *und* $p_j \neq p_k$ *für* $j \neq k$*) stets* $p_i \in \mathfrak{a}$ *gilt.*

Satz 2. *Die unverkürzbare Potenzproduktbasis eines Potenzproduktideals ist bis auf die Reihenfolge ihrer Elemente eindeutig bestimmt.*

Summe, Produkt und Durchschnitt von Potenzproduktidealen sind wieder Potenzproduktideale; für den Durchschnitt gilt

Satz 3. *Es seien* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ *Potenzproduktideale,* p *und* q *seien Potenzprodukte der* x_ν. *Für den Durchschnitt von Potenzproduktidealen gilt*

$$\mathfrak{a} \cap (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) + (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{c}) \tag{1}$$

und

$$(p) \cap (q) = ([p, q]).$$

Hierzu äquivalent ist die Aussage von

Satz 3′. *Der Durchschnitt der Potenzproduktideale* $\mathfrak{a} = (p_1, \ldots, p_s)$ *und* $\mathfrak{b} = (q_1, \ldots, q_t)$ *ist das Potenzproduktideal*

$$\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = ([p_1, q_1], [p_1, q_2], \ldots, [p_i, q_k], \ldots, [p_s, q_t]).$$

Die so erhaltene Potenzproduktbasis für das Durchschnittsideal ist im allgemeinen noch verkürzbar.

Für beliebige Polynomideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ gilt nur $\mathfrak{a} \cap (b + \mathfrak{c}) \supseteq (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) + (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{c})$.

Folgerung 1 aus Satz 3. *Der Verband der Potenzproduktideale im Polynomring bzw. H-Ring ist distributiv. Für Potenzproduktideale* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ *gilt*

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{c}) \cap (\mathfrak{b}, \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}, \mathfrak{c}). \tag{2}$$

Für beliebige Polynomideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ gilt (2) nur mit $\subseteq$.

Folgerung 2 aus Satz 3. *Sind* $\mathfrak{a} = (p_1, \ldots, p_s)$ *und* $b = (q_1, \ldots, q_t)$ *zwei Potenzproduktideale und ist der größte gemeinsame Teiler der Basispotenzprodukte* $\langle p_i, q_k \rangle = 1$ *für alle* i *und* k, *so gilt*

$$\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}.$$

Ist $\mathfrak{b} = (q)$ ein Hauptideal, so gilt auch die Umkehrung der Aussage von Folgerung 2:

Satz 4. *Besitzt das Potenzproduktideal* $\mathfrak{a}$ *die unverkürzbare Potenzproduktbasis* $p_1, \ldots, p_r$ *und ist das Potenzproduktideal* $\mathfrak{b}$ *ein Hauptideal,* $\mathfrak{b} = (q)$, *so gilt* $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ *genau dann, wenn der größte gemeinsame Teiler* $\langle p_i, q \rangle = 1$ *ist für alle* i.

Beweis. Es sei $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$. Eine Potenzproduktbasis dieses Ideals kann einmal nach Satz 3′ und zum andern nach der Definition des Produktes zweier Ideale angegeben werden. Wäre $[p_i, q] = p_k \cdot q$ mit $i \neq k$, so wäre wegen $[p_i, q] \cdot \langle p_i, q\rangle = p_i \cdot q$ das Potenzprodukt p_k ein Teiler von p_i. Also gilt $[p_i, q] = p_i \cdot q$ und folglich $\langle p_i, q\rangle = 1$ für alle i.

Bevor wir mit der Untersuchung der Idealquatienten beginnen, notieren wir die für beliebige Polynomideale $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ gültigen Regeln (vgl. [2], Seite 23):

$$(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}):\mathfrak{c} = (\mathfrak{a}:\mathfrak{c}) \cap (\mathfrak{b}:\mathfrak{c}), \tag{3}$$

$$\mathfrak{a}:(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}) = (\mathfrak{a}:\mathfrak{b}) \cap (\mathfrak{a}:\mathfrak{c}). \tag{4}$$

Eine Basis für den Idealquotienten zweier Potenzproduktideale liefert

Satz 5. *Es seien* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ *Potenzproduktideale*, p *und* q *seien Potenzprodukte der* x_ν. *Für den Idealquotienten von Potenzproduktidealen gilt*

$$(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}):(q) = \big(\mathfrak{a}:(q)\big) + \big(\mathfrak{b}:(q)\big) \tag{5}$$

und insbesondere

$$(p):(q) = \left(\frac{p}{\langle p, q\rangle}\right).$$

Mit Hilfe von Regel (4) und Satz 3′ erhält man die zum Satz 5 äquivalente Aussage

Satz 5′. *Der Idealquotient der Potenzproduktideale* $\mathfrak{a} = (p_1, \ldots, p_s)$ *und* $\mathfrak{b} = (q_1, \ldots, q_t)$ *ist wiederum ein Potenzproduktideal. Es gilt*

$$\mathfrak{a}:(q) = \left(\frac{p_1}{\langle p_1, q\rangle}, \frac{p_2}{\langle p_2, q\rangle}, \ldots, \frac{p_s}{\langle p_s, q\rangle}\right) \tag{6}$$

und

$$\mathfrak{a}:\mathfrak{b} = \left(\left[\frac{p_1}{\langle p_1, q_1\rangle}, \ldots, \frac{p_1}{\langle p_1, q_t\rangle}\right], \left[\frac{p_1}{\langle p_1, q_1\rangle}, \ldots, \frac{p_1}{\langle p_1, q_{t-1}\rangle}, \frac{p_2}{\langle p_2, q_t\rangle}\right], \ldots \right.$$
$$\left. \ldots, \left[\frac{p_s}{\langle p_s, q_1\rangle}, \ldots, \frac{p_s}{\langle p_s, q_t\rangle}\right]\right).$$

Beweis. Ist das Polynom F aus $\mathfrak{a}:(q)$, so gilt $Fq \in \mathfrak{a} \cap (q)$. Nach Satz 3′ existiert eine Darstellung $Fq = \sum_{i=1}^{s} g_i [p_i, q] = \left(\sum_{i=1}^{s} g_i \frac{p_i}{\langle p_i, q\rangle}\right) q$, aus der $F = \sum_{i=1}^{s} f_i \frac{p_i}{\langle p_i, q\rangle}$ und weiter $\mathfrak{a}:(q) \subseteqq \left(\frac{p_1}{\langle p_1, q\rangle}, \ldots, \frac{p_s}{\langle p_s, q\rangle}\right)$ folgt. Wegen $[p_i, q] \in (p_i) \subseteqq \mathfrak{a}$, also $\frac{p_i}{\langle p_i, q\rangle} \in \mathfrak{a}:(q)$ für alle i, gilt auch die umgekehrte Relation $\supseteqq$, womit (6) und folglich nach Regel (4) und Satz 3′ der Satz 5′ bewiesen ist.

In der obigen Regel (5) kann das Hauptideal (q) nicht durch ein beliebiges Potenzproduktideal $\mathfrak{i}$ ersetzt werden, ohne die Richtigkeit zu verletzen. Beispielsweise ist $(x_1^2, x_2):(x_2^2, x_1x_3) = (x_1, x_2)$, andererseits ist $\big((x_1^2):(x_2^2, x_1x_3)\big) + \big((x_2):(x_2^2, x_1x_3)\big) = (x_1^2, x_2)$. Es gilt nur der

Satz 6. *Es seien* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ *beliebige Potenzproduktideale. Dann gilt*

$$(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}):\mathfrak{c} \supseteqq (\mathfrak{a}:\mathfrak{c}) + (\mathfrak{b}:\mathfrak{c}).$$

Beweis. Ist nämlich $\mathfrak{c}=(q_1, \ldots, q_t)$. so folgt aus den Regeln (4) und (5)

$$(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}):\mathfrak{c} = ((\mathfrak{a}, \mathfrak{b}):(q_1))\cap((\mathfrak{a}, \mathfrak{b}):(q_2))\cap\ldots\cap((\mathfrak{a}, \mathfrak{b}):(q_t)) =$$
$$= ((\mathfrak{a}:(q_1))+(\mathfrak{b}:(q_1)))\cap((\mathfrak{a}:(q_2))+(\mathfrak{b}:(q_2)))\cap\ldots\cap((\mathfrak{a}:(q_t))+(\mathfrak{b}:(q_t))) \supseteqq$$
$$\supseteqq ((\mathfrak{a}:(q_1))\cap(\mathfrak{a}:(q_2))\cap\ldots\cap(\mathfrak{a}:(q_t)))+((\mathfrak{b}:(q_1))\cap(\mathfrak{b}:(q_2))\cap\ldots\cap(\mathfrak{b}:(q_t))) =$$
$$= (\mathfrak{a}:\mathfrak{c})+(\mathfrak{b}:\mathfrak{c}).$$

Weiter ergibt sich der

Satz 7. *Es sei $p_1, \ldots, p_s$ die unverkürzbare Basis des Potenzproduktideales $\mathfrak{a}$. Für den Idealquotienten gilt $\mathfrak{a}:(q) = \mathfrak{a}$ dann und nur dann, wenn der größte gemeinsame Teiler $\langle p_i, q\rangle=1$ ist für jedes i.*

Beweis. Nach Satz 5′ ergibt sich aus $\mathfrak{a}:(q) = \mathfrak{a}$

$$\mathfrak{a} = (p_1, \ldots, p_s) = \left(\frac{p_1}{\langle p_1, q\rangle}, \ldots, \frac{p_s}{\langle p_s, q\rangle}\right).$$

Da die unverkürzbare Potenzproduktbasis von $\mathfrak{a}$ eindeutig bestimmt ist, gilt $p_i = \dfrac{p_k}{\langle p_k, q\rangle}$ für $i=1, \ldots, s$ und jeweils ein k. Daraus folgt $i=k$ und weiter $\langle p_i, q\rangle=1$ für alle i. Aus der Gültigkeit von $\langle p_i, q\rangle=1$ für alle i folgt umgekehrt wegen Satz 5′

$$\mathfrak{a}:(q) = (p_1, \ldots, p_s) = \mathfrak{a}.$$

Folgerung 1 aus Satz 7. *Es sei $F = aq+\cdots$ ein Polynom mit $a\in K$ und $a\neq 0$, und sei $\mathfrak{a}=(p_1, \ldots, p_r)$ ein Potenzproduktideal. Wenn der größte gemeinsame Teiler $\langle p_i, q\rangle=1$ ist für alle i, so gilt $\mathfrak{a}:(F) = \mathfrak{a}$.*

Zum Beweis dieser Folgerung wird neben dem Satz 7 auch der Satz 14 herangezogen; dieser besagt, daß die zu einem Potenzproduktideal gehörigen Primideale auch Potenzproduktideale sind. (Da der Beweis von Satz 14 ohne die obige Folgerung geführt wird, kann er hier herangezogen werden.) Zu zeigen ist (vgl. [11], Seite 36), daß F in keinem der zu $\mathfrak{a}$ gehörigen Primideale $\mathfrak{p}_k$ liegt. Aus $F\in\mathfrak{p}_1$ würde $q\in\mathfrak{p}_1$ folgen (nach Satz 1); o.B.d.A. gilt $p_2\in(x_1)\subseteqq\mathfrak{p}_1$ sowie $q\in(x_1)$, woraus sich ein Widerspruch zu $\langle p_1, q\rangle=1$ ergäbe.

Vermittels der Regel (4) erhalten wir nun die

Folgerung 2 aus Satz 7. *Es sei $\mathfrak{a}=(p_1, \ldots, p_s)$ ein Potenzproduktideal, $\mathfrak{b}=(F_1, \ldots, F_t)$ sei ein Polynomideal, und für $F_1 = aq+\cdots$ mit $a\in K$ und $a\neq 0$ gelte $\langle p_i, q\rangle=1$ für jedes i. Dann gilt $\mathfrak{a}:\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$.*

Wir fragen nach dem Zusammenhang, der zwischen einem Potenzproduktideal $\mathfrak{a}=(p_1, \ldots, p_s)$ aus $K[x_1, \ldots, x_n]$ und dem zugehörigen homogenen Polynomideal $\mathfrak{a}_0$ aus $K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ besteht. Einem Polynom $F=\sum\limits_{i=1}^{m} a_i q_i\in\mathfrak{a}$ $(a_i\in K, a_i\neq 0)$ vom Grade g — der Grad der Potenzprodukte q_r sei g_r — entsprechen alle Formen $F_k=x_0^k\sum\limits_{i=1}^{m} a_i p_i x_0^{g-g_i}$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$ aus $K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$, und so erhalten wir aus den Polynomen F aus $\mathfrak{a}$ sämtliche Formen aus $\mathfrak{a}_0$. Natürlich ist mit $\mathfrak{a}$ auch $\mathfrak{a}_0$ ein Potenzproduktideal, $\mathfrak{a}_0=(p_1, \ldots, p_s)\subset K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$. Es gilt auch die Umkehrung:

Satz 8. *Ein homogenes Potenzproduktideal $\mathfrak{a}_0$ mit der unverkürzbaren Potenzproduktbasis $p_1, \ldots, p_s$ aus $K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ ist genau dann das zu einem inhomogenen Polynomideal $\mathfrak{a}$ aus $K[x_1, \ldots, x_n]$ gehörige H-Ideal* ([2], *Seite* 53: *wenn* $\mathfrak{a}_0:(x_0)=\mathfrak{a}_0$), *wenn keines der Basispotenzprodukte $p_1, \ldots, p_s$ durch x_0 teilbar ist. Das H-Ideal $\mathfrak{a}_0$ ist dann zu dem Potenzproduktideal $\mathfrak{a}=(p_1, \ldots, p_s)\subset K[x_1, \ldots, x_n]$ äquivalent.*

§ 2. Prime und primäre Potenzproduktideale

Ein Polynomideal $\mathfrak{p}$ heißt *prim*, wenn aus $AB\in\mathfrak{p}$ und $A\notin\mathfrak{p}$ stets $B\in\mathfrak{p}$ folgt. Aus dieser Definition ergibt sich unmittelbar

Satz 9. *Ein Potenzproduktideal $\mathfrak{p}\neq(1)$ ist genau dann prim, wenn es die unverkürzbare Potenzproduktbasis $x_i, x_j, \ldots, x_k$ mit $1\leqq i<j<\cdots<k\leqq n$ bzw. $0\leqq i<j<$ $<\cdots<k\leqq n$ besitzt.*

Folgerung aus Satz 9. *Jedes prime Potenzproduktideal ist ein Ideal der Hauptklasse.*

Ist $\mathfrak{p}$ ein d-dimensionales primes Potenzproduktideal, etwa $\mathfrak{p}=(x_{d+1}, \ldots, x_n)$, so besteht die Primidealkette

$$\mathfrak{p}\subset(\mathfrak{p}, x_1)\subset\cdots\subset(\mathfrak{p}, x_1, \ldots, x_d)\subset\mathfrak{p}_0=(1) \text{ bzw. } \mathfrak{p}_0=(x_0, x_1, \ldots, x_n)$$

aus $d+2$ Gliedern und kann nicht durch Einschalten weiterer Primideale verlängert werden ([2], Seite 143).

Ein Polynomideal $\mathfrak{q}$ heißt primär, wenn es ein Primideal $\mathfrak{p}$ und eine natürliche Zahl ϱ mit $\mathfrak{p}^\varrho\subseteqq\mathfrak{q}\subseteqq\mathfrak{p}$ gibt und aus $AB\in\mathfrak{q}$ und $A\notin\mathfrak{q}$ stets $B\in\mathfrak{p}$ sowie aus $AB\in\mathfrak{q}$ und $B\notin\mathfrak{q}$ stets $A\in\mathfrak{p}$ folgt; $\mathfrak{p}$ heißt das zu $\mathfrak{q}$ gehörige Primideal.

Satz 10. *Es sei $\mathfrak{q}$ ein primäres Potenzproduktideal. Das zugehörige Primideal $\mathfrak{p}$ ist ebenfalls ein Potenzproduktideal: es sei etwa $\mathfrak{p}=(x_1, x_2, \ldots, x_r)$. Dann besitzt die unverkürzbare Potenzproduktbasis von $\mathfrak{q}$ die Bauart*

$$\mathfrak{q} = (x_1^{c_1}, x_2^{c_2}, \ldots, x_r^{c_r}) \text{ oder}$$

$$\mathfrak{q} = \left(x_1^{c_1}, x_2^{c_2}, \ldots, x_r^{c_r}, \prod_{i=1}^{r} x_i^{c_{1i}}, \prod_{i=1}^{r} x_i^{c_{2i}}, \ldots, \prod_{i=1}^{r} x_i^{c_{si}}\right),$$

wobei $r\geqq 1$, $c_k\geqq 1$ und $c_{j1}+\cdots+c_{jr}>1$ für alle k und j gilt.

Beweis. Es sei $F=a_1p_1+\cdots+a_mp_m$ $(a_i\in K)$ ein beliebiges Polynom aus dem zu $\mathfrak{q}$ gehörigen Primideal $\mathfrak{p}$. Wegen $\mathfrak{p}^\varrho\subseteqq\mathfrak{q}$ enthält das Potenzproduktideal $\mathfrak{q}$ die Potenz F^ϱ und nach Satz 1 auch jedes Glied p_i^ϱ, woraus $p_i\in\mathfrak{p}$ für jedes i folgt. Also ist $\mathfrak{p}$ ein Potenzproduktideal. Sei also im folgenden $\mathfrak{p}=(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ das zu dem primären Potenzproduktideal $\mathfrak{q}$ gehörige Primideal. Es bleibt zu zeigen, daß jedes Basispotenzprodukt q von $\mathfrak{q}$ nur die Variablen $x_1, \ldots, x_r$ nicht aber x_{r+1} oder $x_{r+2}, \ldots$ oder x_n als Faktoren enthält. Angenommen, es wäre $q=p_1p_2$, wobei p_1

ein Potenzprodukt der $x_1, \ldots, x_r$ und p_2 ein Potenzprodukt der $x_{r+1}, \ldots, x_n$ ist, ein Basispotenzprodukt von $\mathfrak{q}$. Dann müßte bei $p_1 \notin \mathfrak{q}$ $p_2 \in \mathfrak{p}$ gelten, was offenbar unmöglich ist. Folglich muß $p_1 = q \in \mathfrak{q}$ sein. — Hat umgekehrt ein Potenzproduktideal $\mathfrak{q}$ eine Basis der angegebenen Bauart, und wäre $F = G \cdot H \in \mathfrak{q}$ ein reduzibles Polynom und $G \notin \mathfrak{q}$ sowie $H \notin \mathfrak{p}$, so gäbe es mindestens ein Glied ap $(a \in K, a \neq 0)$ in H mit $p \notin \mathfrak{p}$ (Satz 1). Weiter stehen in G Glieder, die durch kein Basispotenzprodukt des Ideals $\mathfrak{q}$ teilbar sind; es sei bq $(b \in K, b \neq 0)$ ein solches Glied mit minimalem Grad in bezug auf $x_1, \ldots, x_r$. Dann ist $ab \cdot pq$ mit $ab \in K$ und $ab \neq 0$ ein Glied von F, und es wäre $pq \notin \mathfrak{q}$ im Widerspruch zu Satz 1. Mithin muß $H \in \mathfrak{p}$ gelten; $\mathfrak{q}$ ist also ein Primärideal.

Folgerung 1 aus Satz 10. *Jede Potenz eines primären Potenzproduktideals ist wieder primär.*

Insbesondere ist jede Potenz eines primen Potenzproduktideals primär, was für beliebige Primideale keineswegs gilt (vgl. [11], Seite 61, Aufgabe 3 und [2], Seite 137, Fußnote 3).

Nach [1] heißt ein Polynomideal $\mathfrak{a}$ *quasiprimär*, wenn es ein Primideal $\mathfrak{p}$ und eine natürliche Zahl ϱ gibt mit $\mathfrak{p}^\varrho \subseteq \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$. Jede Potenz eines primen Polynomideals ist also quasiprimär, aber nicht notwendig primär. Es gibt auch quasiprimäre Potenzproduktideale, die nicht primär sind, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 1. Es sei $\mathfrak{a} = (x_1^2, x_1 x_2)$, dann gilt zwar $(x_1)^2 \subset \mathfrak{a} \subset (x_1)$, aber nach Satz 10 ist $\mathfrak{a}$ nicht primär.

Folgerung 2 aus Satz 10. *Es sei $\mathfrak{q}$ ein primäres Potenzproduktideal und $\mathfrak{p} = (x_1, x_2, \ldots, x_r)$ das zugehörige Primideal, q sei ein Potenzprodukt der x_ν. Dann ist $\mathfrak{q}:(q)$ ebenfalls ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges primäres Potenzproduktideal, oder es ist gleich dem Einheitsideal.*

Beweis. Es sei $q = x_1^{a_1} \ldots x_r^{a_r} x_{r+1}^{a_{r+1}} \ldots x_n^{a_n} = q^+ \cdot x_{r+1}^{a_{r+1}} \ldots x_n^{a_n}$. Dann ist nach Satz 5 $\mathfrak{q}:(q) = \mathfrak{q}:(q^+)$, und bei $\mathfrak{q} = (x_1^{c_1}, \ldots, x_r^{c_r}, \ldots)$ gilt

$$\mathfrak{q}:(q^+) = (x_1^{(c_1, a_1)}, \ldots, x_r^{(c_r, a_r)}, \ldots),$$

wobei $(c_i, a_i) = c_i - \min\{c_i, a_i\}$ gesetzt ist. Der Idealquotient $\mathfrak{q}:(q)$ ist genau dann gleich dem Einheitsideal (1), wenn für mindestens ein i $c_i \leqq a_i$ gilt; sonst ist $(c_k, a_k) > 0$ für jedes k und $\mathfrak{q}:(q)$ ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges primäres Potenzproduktideal.

Folgerung 3 aus Satz 10. *Es sei $\mathfrak{q}$ ein primäres Potenzproduktideal, und $\mathfrak{p} = (x_1, x_2, \ldots, x_r)$ sei das zugehörige Primideal; $\mathfrak{b}$ sei ein beliebiges Potenzproduktideal. Dann ist $\mathfrak{c} = \mathfrak{q}:\mathfrak{b}$ wiederum ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges primäres Potenzproduktideal, oder es ist gleich dem Einheitsideal.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{b} = (q_1, q_2, \ldots, q_s)$. Aus Regel (4) folgt

$$\mathfrak{c} = (\mathfrak{q}:(q_1)) \cap (\mathfrak{q}:(q_2)) \cap \ldots \cap (\mathfrak{q}:(q_s)).$$

Die einzelnen Komponenten sind zu $\mathfrak{p}$ gehörige Primärideale oder gleich (1). Als Durchschnitt von zu demselben Primideal $\mathfrak{p}$ gehörigen primären Potenzproduktidealen ist auch der Idealquotient $\mathfrak{c}$ ein zu $\mathfrak{p}$ gehörendes primäres Potenzproduktideal, q. e. d.

§ 3. Darstellung der Potenzproduktideale durch irreduzible Potenzproduktideale

Ein Ideal, das nicht der Durchschnitt zweier echter Teiler ist, heißt irreduzibel. Die Darstellung $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}_1\cap\mathfrak{b}_2\cap\cdots\cap\mathfrak{b}_t$ eines Ideals $\mathfrak{a}$ durch die echten Teiler $\mathfrak{b}_i$ von $\mathfrak{a}$ heißt unverkürzbar, wenn kein $\mathfrak{b}_i$ den Durchschnitt $\mathfrak{a}_i$ der übrigen Ideale $\mathfrak{b}_k$ teilt. Läßt sich außerdem kein $\mathfrak{b}_i$ durch einen echten Teiler ersetzen, so heißt die Darstellung von $\mathfrak{a}$ reduziert ([6]. Seite 31/32).

Jedes Ideal $\mathfrak{a}$ kann als Durchschnitt endlich vieler irreduzibler Ideale dargestellt werden. Diese Darstellung ist durch Streichen der im obigen Sinne überflüssigen Ideale in eine unverkürzbare Darstellung zu verwandeln. Sie ist sodann schon reduziert ([6], Seite 35).

Ein irreduzibles Ideal ist stets primär. Der Durchschnitt endlich vieler Primärideale mit demselben zugehörigen Primideal $\mathfrak{p}$ ist auch ein zu $\mathfrak{p}$ gehörendes Primärideal. Der Durchschnitt endlich vieler nicht zu demselben Primideal gehörigen Primärideale ist, wenn kein Primärideal gestrichen werden kann, nicht primär ([11], Seite 31/32).

Fassen wir, von einer unverkürzbaren Darstellung des Ideals $\mathfrak{a}$ durch irreduzible Ideale ausgehend, sämtliche zu demselben Primideal gehörigen irreduziblen Ideale zu einem Primärideal zusammen, so erhalten wir eine reduzierte Darstellung des Ideals $\mathfrak{a}$ durch größte Primärkomponenten ([6], Seite 36). Die zugehörigen Primideale und die isolierten Primärkomponenten sind durch $\mathfrak{a}$ eindeutig bestimmt ([11], Seite 35—38).

Wir beginnen diesen Paragraphen mit einer Charakterisierung der irreduziblen Potenzproduktideale.

Definition 2. *Wir nennen ein Potenzprodukt q rein, wenn $q=x_i^c$ gilt ($1\leqq i\leqq n$ bzw. $0\leqq i\leqq n$ und c ist natürliche Zahl). Besitzt ein Potenzproduktideal $\mathfrak{a}$ eine Basis, die nur aus reinen Potenzprodukten besteht, so heißt $\mathfrak{a}$ ein reines Potenzproduktideal.*

Nach Satz 10 ist jedes reine Potenzproduktideal primär und zugleich ein Ideal der Hauptklasse. Umgekehrt ist nach Satz 10 jedes primäre Potenzproduktideal der Hauptklasse rein.

Satz 11. *Ein Potenzproduktideal $\mathfrak{q}\neq(1)$ ist genau dann irreduzibel, wenn es rein ist, also ein primäres Ideal der Hauptklasse ist.*

Beweis. 1. Es sei $\mathfrak{q}\neq(1)$ ein irreduzibles Potenzproduktideal mit der unverkürzbaren Potenzproduktbasis $(q_1, q_2, \ldots, q_s)$. Wäre $\mathfrak{q}$ kein reines Potenzproduktideal, so wäre etwa $q_1=x_1^{c_1}x_2^{c_2}p$ mit $c_i\geqq 1$ und $\langle p, x_i\rangle=1$ für $i=1,2$. Für $\mathfrak{q}_1=(px_1^{c_1}, q_2, \ldots, q_s)$ und $\mathfrak{q}_2=(px_2^{c_2}, q_2, \ldots, q_s)$ gälte dann $\mathfrak{q}\subset\mathfrak{q}_i$ und nach Satz 3 $\mathfrak{q}=\mathfrak{q}_1\cap\mathfrak{q}_2$; $\mathfrak{q}$ wäre also reduzibel, q. e. a.

2. Wäre $\mathfrak{q}=(x_1^{c_1}, \ldots, x_r^{c_r})$ ein reduzibles Potenzproduktideal, so wäre es der Durchschnitt zweier zu dem Primideal $\mathfrak{p}=(x_1, \ldots, x_r)$ gehörigen Primärideale $\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{q}_2$ ([11], Seite 31/32). Jedes Primärideal $\mathfrak{q}_i$ enthält ein maximales Potenzproduktideal $\mathfrak{q}_i^+$, das durch die Potenzprodukte der $x_1, \ldots, x_r$, die in $\mathfrak{q}_i$ liegen, erzeugt wird. Wegen $\mathfrak{q}=\mathfrak{q}_1\cap\mathfrak{q}_2$ würde $x_k^{c_k}\in\mathfrak{q}_i^+$ für $i=1,2$ und für jedes k folgen, also $\mathfrak{q}\subseteqq\mathfrak{q}_1^+\cap\mathfrak{q}_1^+$, woraus $\mathfrak{q}=\mathfrak{q}_1^+\cap\mathfrak{q}_2^+$ folgte. Der Durchschnitt zweier primärer Potenzproduktideale, die selbst nicht rein sind, kann nach den Sätzen 3′ und 10

nicht rein sein. Also wäre o. B. d. A. $\mathfrak{q}_1^+ = \mathfrak{q}$, und das Primärideal $\mathfrak{q}_1$ enthielte ein Polynom F, dessen sämtliche Glieder nicht in $\mathfrak{q}$ liegen. Da das Potenzproduktideal $\mathfrak{p}$ zu $\mathfrak{q}_1$ gehört, wäre aber jedes Glied von F durch ein $x_i \in \mathfrak{p}$ teilbar. Es möge x_1^a (mindestens) ein Glied von F teilen, ein anderes Glied jedoch nicht. Dann wäre $x_1^{c_1-a}F$ die Summe eines Polynoms aus $\mathfrak{q}$ und eines Polynoms $F_1 \in \mathfrak{q}_1$ mit weniger Gliedern, als F sie besaß, und die Glieder von F_1 gehörten sämtlich nicht zu $\mathfrak{q}$, lägen jedoch in $\mathfrak{p}$. Es möge x_i^b mit $1 \leqq i \leqq r$ ein Glied von F_1 teilen, ein anderes Glied jedoch nicht. Dann wäre $x_i^{c_i-b}F_1$ die Summe eines Polynoms aus $\mathfrak{q}$ und eines Polynoms F_2 aus $\mathfrak{q}_1$ mit weniger Gliedern, als F_1 sie besaß, und die Glieder von F_1 gehörten sämtlich nicht zu $\mathfrak{q}$, jedoch zu $\mathfrak{p}$. ... Das Verfahren bricht bei einem Polynom F_j ab, das die Gestalt $F_j = fp$ mit $f \in K, f \neq 0$ hätte, und dabei wäre p ein Potenzprodukt der x_ν, das in $\mathfrak{q}_1$, aber nicht in dem maximalen Potenzproduktideal $\mathfrak{q}$ von $\mathfrak{q}_1$ läge, q. e. a.*)

Satz 12. *Jedes Potenzproduktideal $\mathfrak{a} = (q_1, q_2, \ldots, q_s)$ läßt sich als Durchschnitt irreduzibler Potenzproduktideale darstellen. Die Potenzprodukte*

$$q_1 = \prod_{i=1}^{r} x_i^{c_{1i}},\ q_2 = \prod_{i=1}^{r} x_i^{c_{2i}},\ \ldots,\ q_s = \prod_{i=1}^{r} x_i^{c_{si}}$$

mit nichtnegativen ganzzahligen Exponenten c_{ki} $(i=1, \ldots, r;\ k=1, \ldots, s)$ mögen eine Potenzproduktbasis für das Ideal $\mathfrak{a}$ bilden. Dann ist

$$\mathfrak{a} = \bigcap_{i_1=1}^{r} \bigcap_{i_2=1}^{r} \cdots \bigcap_{i_s=1}^{r} (x_{i_1}^{c_{1i_1}}, x_{i_2}^{c_{2i_2}}, \ldots, x_{i_s}^{c_{si_s}}) = \tag{7}$$

$$= (x_1^{c_{11}}, x_1^{c_{21}}, \ldots, x_1^{c_{s1}}) \cap (x_1^{c_{11}}, \ldots, x_1^{c_{s-1\cdot 1}}, x_2^{c_{s2}}) \cap \ldots \cap (x_r^{c_{1r}}, x_r^{c_{2r}}, \ldots, x_r^{c_{sr}})$$

eine Darstellung von $\mathfrak{a}$ durch irreduzible Potenzproduktideale.

Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion nach s mit Hilfe von Satz 3 bzw. 3′ und dessen Folgerung 1.

Satz 13. *(a) Jedes Potenzproduktideal $\mathfrak{a}$ besitzt eine Darstellung als Durchschnitt irreduzibler Potenzproduktideale.*

(b) Für jedes Potenzproduktideal $\mathfrak{a}$ gibt es eine und (bis auf die Reihenfolge der Komponenten) nur eine unverkürzbare Darstellung als Durchschnitt irreduzibler Potenzproduktideale

$$Ri(\mathfrak{a}) \equiv \mathfrak{i}_1 \cap \mathfrak{i}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{i}_t.$$

(c) Eine unverkürzbare Darstellung eines Potenzproduktideals als Durchschnitt irreduzibler Potenzproduktideale ist reduziert (im Sinne von Emmy Noether).

Beweis. (*a*): Es sei $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Potenzproduktideal. Streicht man in der Darstellung (7) für $\mathfrak{a}$ sämtliche irreduziblen Ideale, die eine andere Komponente

*) Ist z. B. $\mathfrak{q} = (x_1^3, x_2^4, x_3^3)$ und $F = x_1^2x_2^2 + x_1x_2^3 + x_1^2x_3^2 + x_1x_2^2x_3^2$, so ergibt sich $F_1 = x_1F - x_1^3(x_2^2 + x_3^2) = x_1^2x_2^3 + x_1^2x_2^2x_3^2 \notin \mathfrak{q}$ und weiter $F_2 = x_2F_1 - x_2^4x_1^2 = x_1^2x_2^3x_3^2 \notin \mathfrak{q}$.

der Darstellung umfassen, so erhält man eine unverkürzbare Darstellung

$$Ri(\mathfrak{a}) \equiv \mathfrak{i}_1 \cap \mathfrak{i}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{i}_t$$

für $\mathfrak{a}$ als Durchschnitt irreduzibler Potenzproduktideale.

(b)*): Es sei $\mathfrak{a} = \mathfrak{j}_1 \cap \mathfrak{j}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{j}_u$ eine weitere unverkürzbare Darstellung von $\mathfrak{a}$ als Durchschnitt irreduzibler Potenzproduktideale. Für eine beliebige irreduzible Komponente $\mathfrak{i}_k$ gilt

$$\mathfrak{i}_k = (\mathfrak{i}_k, \mathfrak{a}) = (\mathfrak{i}_k, \mathfrak{j}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{j}_u) = (\mathfrak{i}_k, \mathfrak{j}_1) \cap \ldots \cap (\mathfrak{i}_k, \mathfrak{j}_u)$$

nach Folgerung 1 aus Satz 3. Da $\mathfrak{i}_k$ irreduzibel ist, gilt für ein geeignetes l $(\mathfrak{i}_k, \mathfrak{j}_l) = i_k$, also $\mathfrak{j}_l \subseteqq \mathfrak{i}_k$. Entsprechend gibt es zu $\mathfrak{j}_l$ eine Komponente $\mathfrak{i}_m$ mit $(\mathfrak{j}_l, \mathfrak{i}_m) = \mathfrak{j}_l$, also $\mathfrak{i}_m \subseteqq \mathfrak{j}_l$. Aus $\mathfrak{i}_m \subseteqq \mathfrak{j}_l \subseteqq \mathfrak{i}_k$ folgt $k = m$ und $\mathfrak{j}_l = \mathfrak{i}_k$. Das ergibt $t = u$ und $\mathfrak{i}_k = \mathfrak{j}_k$ bei geeigneter Numerierung der Komponenten, q. e. d.

(c)**): Es sei $\mathfrak{a} = \mathfrak{i} \cap \mathfrak{k}$ eine unverkürzbare Darstellung des Polynomideals $\mathfrak{a}$, und $\mathfrak{i}$ sei irreduzibel; es gilt $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{i}$ und $\mathfrak{k}$. Angenommen, es gäbe ein Polynomideal $\mathfrak{q}$ mit $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{q}$ und $\mathfrak{a} = \mathfrak{q} \cap \mathfrak{k}$. Dann ließe sich jedes Element f des Ideals

$$\mathfrak{q}^+ = \mathfrak{q} \cap (\mathfrak{i}, \mathfrak{k})$$

als $f = q = i + k$ mit $q \in \mathfrak{q}$, $i \in \mathfrak{i}$, $k \in \mathfrak{k}$ darstellen. Aus $k = q - i \in \mathfrak{k} \cap \mathfrak{q} = \mathfrak{a}$ folgt $q = i + k \in (\mathfrak{i}, \mathfrak{k}) = \mathfrak{i}$, also gilt $\mathfrak{q}^+ \subseteqq \mathfrak{i}$. Nach Definition von $\mathfrak{q}^+$ umfaßt $\mathfrak{q}^+$ das irreduzible Ideal $\mathfrak{i}$, woraus sich $\mathfrak{q}^+ = \mathfrak{i}$ ergäbe. $\mathfrak{q}^+$ ist jedoch reduzibel, q. e. a.

Satz 14. (A) *Für jedes Potenzproduktideal $\mathfrak{a}$ gibt es eine und (bis auf die Reihenfolge der Komponenten) nur eine reduzierte Darstellung als Durchschnitt primärer Potenzproduktideale, die zu verschiedenen Primidealen gehören,*

$$Rq(\mathfrak{a}) \equiv \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_u.$$

(B) *Die zu einem Potenzproduktideal gehörigen Primideale und isolierten Primärkomponenten sind ebenfalls Potenzproduktideale.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Potenzproduktideal. Faßt man in der reduzierten Darstellung $Ri(\mathfrak{a})$ für $\mathfrak{a}$ als Durchschnitt irreduzibler Potenzproduktideale die zu demselben Primideal gehörenden irreduziblen Komponenten zu einem Primärideal zusammen, so entsteht bereits eine reduzierte Darstellung (nach [6]) für $\mathfrak{a}$

$$Rq(\mathfrak{a}) \equiv \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_u$$

als Durchschnitt primärer Potenzproduktideale mit den zugehörigen Primidealen $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_u$, für die $p_i \neq p_j$ für $i \neq j$ gilt.

Da in der Darstellung $Rq(\mathfrak{a})$ sämtliche Primärkomponenten und die zugehörigen Primideale Potenzproduktideale sind und in jeder unverkürzbaren Darstellung von $\mathfrak{a}$ durch primäre Polynomideale die zu den Primärkomponenten gehörigen Primideale und die isolierten Primärkomponenten stets dieselben sind, gilt die Behauptung (B).

*) Siehe G. Birkhoff, Rings of sets, *Duke Math. J.* **3** (1937), 442—454.

**) Siehe in [6] in §3 Hilfssatz II.

Aus der Darstellung $Ri(\mathfrak{a})$ erhält man die eindeutig bestimmten reduzierten Darstellungen $Ri(\mathfrak{q}_k)$, indem man jeweils die zu dem Primideal $\mathfrak{p}_k$ gehörigen irreduziblen Komponenten von $Ri(\mathfrak{a})$ auswählt; es gilt

$$Ri(\mathfrak{a}) \equiv Ri(\mathfrak{q}_1) \cap Ri(\mathfrak{q}_2) \cap \ldots \cap Ri(\mathfrak{q}_u).$$

Es sei umgekehrt $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1^+ \cap \mathfrak{q}_2^+ \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_v^+$ eine reduzierte Darstellung von $\mathfrak{a}$ als Durchschnitt primärer Potenzproduktideale. Wegen (B) gilt $u = v$, und o. B. d. A. ist $\mathfrak{p}_k$ das zu $\mathfrak{q}_k^+$ gehörige Primideal. Jedes Primärideal $\mathfrak{q}_k^+$ besitzt nach Satz 13 eine eindeutig bestimmte unverkürzbare Darstellung $Ri(\mathfrak{q}_k^+)$ als Durchschnitt irreduzibler Potenzproduktideale. Wir zeigen, daß

$$Ri(\mathfrak{q}_1^+) \cap Ri(\mathfrak{q}_2^+) \cap \ldots \cap Ri(\mathfrak{q}_u^+)$$

eine unverkürzbare Darstellung von $\mathfrak{a}$ durch irreduzible Potenzproduktideale ist. — Ist $\mathfrak{i}$ eine irreduzible Komponente von $Ri(\mathfrak{q}_i^+)$ und $\mathfrak{j}$ eine solche von $Ri(\mathfrak{q}_j^+)$

$$\mathfrak{q}_i^+ = \mathfrak{i} \cap \mathfrak{i}^+ \text{ und } \mathfrak{q}_j^+ = \mathfrak{j} \cap \mathfrak{j}^+ \text{ mit } \mathfrak{q}_i^+ \neq \mathfrak{i}^+ \text{ und } \mathfrak{q}_j^+ \neq \mathfrak{j}^+,$$

so würde aus $\mathfrak{i} \subseteq \mathfrak{j}$ die Gleichheit $\mathfrak{q}_i^+ \cap \mathfrak{j}^+ = \mathfrak{q}_i^+ \cap \mathfrak{q}_j^+$ folgen, so daß in der obigen Darstellung von $\mathfrak{a}$ das Primärideal $\mathfrak{q}_j^+$ durch das größere Potenzproduktideal $\mathfrak{j}^+$ ersetzt werden könnte — im Widerspruch zur Reduziertheit der Darstellung. Folglich gilt

$$Ri(\mathfrak{a}) \equiv Ri(\mathfrak{q}_1^+) \cap Ri(\mathfrak{q}_2^+) \cap \ldots \cap Ri(\mathfrak{q}_u^+).$$

Die Darstellung $Ri(\mathfrak{q}_k^+)$ enthält sämtliche zu dem Primideal $\mathfrak{p}_k$ gehörenden irreduziblen Komponenten dieser Darstellung für $\mathfrak{a}$ und nur diese. Da die Darstellung $Ri(\mathfrak{a})$ eindeutig bestimmt ist, folgt $Ri(\mathfrak{q}_k^+) \equiv Ri(\mathfrak{q}_k)$ und weiter $\mathfrak{q}_k^+ = \mathfrak{q}_k$ für $k = 1, 2, \ldots, u$, q. e. d.

Zur Herstellung der reduzierten Darstellung eines Potenzproduktideals $\mathfrak{a}$ ist also im Gegensatz zu beliebigen Polynomidealen die Theorie der Grundideale nicht erforderlich (vgl. [4]); überdies liefern die Grundideale nicht immer reduzierte Darstellungen, so im Beispiel 3.

Beispiel 2. Es ist

$$\mathfrak{a} = (x_1^2, x_1 x_2 x_3, x_2^2) = (x_1^2, x_1, x_2^2) \cap (x_1^2, x_2, x_2^2) \cap (x_1^2, x_3, x_2^2) =$$
$$= (x_1, x_2^2) \cap (x_1^2, x_2) \cap (x_1^2, x_2^2, x_3) = (x_1^2, x_2^2, x_1 x_2) \cap (x_1^2, x_2^2, x_3).$$

Eine andere unverkürzbare Darstellung dieses Ideals ist

$$\mathfrak{a} = (x_1^2, x_2^2, x_1 x_2) \cap (x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_1 x_2 x_3).$$

Aber die eingebettete Komponente der ersten Darstellung umfaßt die der zweiten; im Sinne von Emmy Noether ist daher nur die erste Darstellung reduziert. Auch in diesem strengen Sinne ist die reduzierte Darstellung der Potenzproduktideale durch größte primäre *Polynomideale* i. a. nicht eindeutig bestimmt, wie das bekannte Beispiel $\mathfrak{a} = (x_1^2, x_1 x_2) = (x_1) \cap (x_1^2, a x_1 + x_2)$ für alle $a \in K$ zeigt.

Beispiel 3. Es ist

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a} &= (x_1^3, x_1^2 x_2, x_1 x_2 x_3^2, x_2^4, x_2^2 x_3^2) = \\
&= (x_1^3, x_1^2, x_1, x_2^4, x_2^2) \cap (x_1^3, x_1^2, x_1, x_2^4, x_3^2) \cap \\
&\quad \cap (x_1^3, x_1^2, x_2, x_2^4, x_2^2) \cap (x_1^3, x_1^2, x_2, x_2^4, x_3^2) \cap (x_1^3, x_1^2, x_3^2, x_2^4, x_2^2) \cap \\
&\quad \cap (x_1^3, x_1^2, x_3^3, x_2^4, x_3^2) \cap (x_1^3, x_2, x_1, x_2^4, x_2^2) \cap (x_1^3, x_2, x_1, x_2^4, x_3^2) \cap \\
&\quad \cap (x_1^3, x_2, x_2, x_2^4, x_2^2) \cap (x_1^3, x_2, x_2, x_2^4, x_3^2) \cap (x_1^3, x_2, x_3^2, x_2^4, x_2^2) \cap \\
&\quad \cap (x_1^3, x_2, x_3^2, x_2^4, x_3^2) = \\
&= (x_1, x_2^2) \cap (x_1, x_2^4, x_3^2) \cap (x_1^2, x_2) \cap (x_1^2, x_2, x_3^2) \cap \\
&\quad \cap (x_1^2, x_2^2, x_3^2) \cap (x_1^2, x_2^4, x_3^2) \cap (x_1, x_2) \cap (x_1, x_2, x_3^2) \cap (x_1^3, x_2) \cap (x_1^3, x_2, x_3^2) \cap \\
&\quad \cap (x_1^3, x_2, x_3^2) \cap (x_1^3, x_2, x_3^2) = \\
&= (x_1, x_2^2) \cap (x_1^3, x_2) \cap (x_1^2, x_2^4, x_3^2) \quad [Ri(\mathfrak{a})] \\
&= (x_1^3, x_2^2, x_1 x_2) \cap (x_1^2, x_2^4, x_3^2). \qquad [Rq(\mathfrak{a})].
\end{aligned}$$

Eine andere unverkürzbare Darstellung von $\mathfrak{a}$, die sich nach der Methode von Grete Hermann ([4]) ergibt, ist

$$\mathfrak{a} = (x_1^3, x_2^2, x_1 x_2) \cap (x_1^3, x_2^4, x_3^4, x_1^2 x_2, x_1^2 x_3^2, x_1 x_2 x_3^2, x_1 x_3^3, x_2^2 x_3^2, x_2 x_3^3).$$

Sie ist aber nicht reduziert, da die eingebettete Komponente in derjenigen der Darstellung $Rq(\mathfrak{a})$ enthalten ist.

Speziell für Idealquotienten gilt

Folgerung aus Satz 14. *Es seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ Potenzproduktideale. Es sei $Rq(\mathfrak{a}) \equiv \equiv \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_u$ die reduzierte Darstellung für $\mathfrak{a}$ als Durchschnitt primärer Potenzproduktideale. Dann ist*

$$Rq(\mathfrak{a}):\mathfrak{b} \equiv (\mathfrak{q}_1:\mathfrak{b}) \cap (q_2:\mathfrak{b}) \cap \cdots \cap (\mathfrak{q}_u:\mathfrak{b}) \equiv Rq(\mathfrak{a}:\mathfrak{b}),$$

nachdem die Komponenten $\mathfrak{q}_k:\mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{q}_k:\mathfrak{b} = (1)$ gestrichen sind, die reduzierte Darstellung für den Idealquotienten $\mathfrak{a}:\mathfrak{b}$ als Durchschnitt primärer Potenzproduktideale.

Beweis. Wir betrachten zunächst ein beliebiges primäres Potenzproduktideal $\mathfrak{q}$. Es sei $Ri(\mathfrak{q}) \equiv \mathfrak{i}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{i}_s$ die reduzierte Darstellung von $\mathfrak{q}$ durch irreduzible Potenzproduktideale. Dann ist

$$Ri(\mathfrak{q}):\mathfrak{b} \equiv (\mathfrak{i}_1:\mathfrak{b}) \cap \cdots \cap (\mathfrak{i}_s:\mathfrak{b})$$

eine im allgemeinen noch verkürzbare Darstellung für $\mathfrak{q}:\mathfrak{b}$. Streicht man hier die Komponenten mit $\mathfrak{i}_k:\mathfrak{b} = (1)$, so bleibt nach Folgerung 3 aus Satz 10 und Satz 13 die reduzierte Darstellung $Ri(\mathfrak{q}:\mathfrak{b})$ stehen. — Setzen wir die entsprechenden Darstellungen in $Rq(\mathfrak{a}):\mathfrak{b}$ ein, so ergibt sich

$$Ri(\mathfrak{q}_1:\mathfrak{b}) \cap Ri(\mathfrak{q}_2:\mathfrak{b}) \cap \cdots \cap Ri(\mathfrak{q}_u:\mathfrak{b}) \equiv Ri(\mathfrak{a}:\mathfrak{b});$$

denn zu verschiedenen $\mathfrak{q}_k:\mathfrak{b}$ gehören nach Folgerung 3 aus Satz 10 auch verschiedene

Primideale. Folglich ergibt die Darstellung $Rq(\mathfrak{a}):\mathfrak{b}$ eine reduzierte Darstellung für den Idealquotienten $\mathfrak{a}:\mathfrak{b}$ als Durchschnitt primärer Potenzproduktideale, die nach Satz 14 eindeutig bestimmt ist.

Das Radikal $Rad\,\mathfrak{a}$ eines Potenzproduktideals $\mathfrak{a}$ ist als Durchschnitt der zu $\mathfrak{a}$ gehörigen Primideale nach Satz 13 ebenfalls ein Potenzproduktideal. Es gilt

Satz 15. *Es sei*

$$\mathfrak{a} = \left(\prod_{i=1}^{m_1} x_{1i}^{c_{1i}},\ \prod_{i=1}^{m_2} x_{2i}^{c_{2i}},\ \ldots,\ \prod_{i=1}^{m_s} x_{si}^{c_{si}}\right)$$

ein Potenzproduktideal aus $K[x_1, \ldots, x_n]$ *bzw.* $K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *und* $x_{ki} \in \{x_1, \ldots, x_n\}$ *bzw.* $\in \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ *mit* $x_{ki} \neq x_{kj}$ *für* $i \neq j$, $c_{ki} \geqq 1$; $i, j = 1, 2, \ldots, m_k$; $k = 1, 2, \ldots, s$. *Dann hat das Radikal von* $\mathfrak{a}$ *die Basisdarstellung*

$$Rad\,\mathfrak{a} = \left(\prod_{i=1}^{m_1} x_{1i},\ \prod_{i=1}^{m_2} x_{2i},\ \ldots,\ \prod_{i=1}^{m_s} x_{si}\right);$$

sie ist im allgemeinen noch verkürzbar.

Nicht jedes Radikal eines Potenzproduktideals aus $K[x_1, \ldots, x_n]$ besitzt eine Basis aus höchstens $n+1$ Elementen; dies zeigt das Beispiel 4. Nach einem Verfahren von PERRON*) erhält man zu jedem Polynomideal $\mathfrak{a}$ ein Polynomideal $\mathfrak{b}$ mit höchstens $n+1$ Basiselementen, so daß gilt $Rad\,\mathfrak{a} = Rad\,\mathfrak{b}$.

Beispiel 4. Für das Potenzproduktideal

$$\begin{aligned}\mathfrak{a} &= (x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_2x_3, x_2x_4, x_3x_4) \\ &= (x_1, x_2, x_3) \cap (x_1, x_2, x_4) \cap (x_1, x_3, x_4) \cap (x_2, x_3, x_4)\end{aligned}$$

aus $K[x_1, x_2, x_3, x_4]$ gilt $\mathfrak{a} = Rad\,\mathfrak{a}$. Für das Polynomideal

$$\mathfrak{b} = (x_1x_2 - x_3x_4, x_1x_3 - x_2x_4, x_1x_4, x_2x_3)$$

gilt z. B. $Rad\,\mathfrak{a} = Rad\,\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$.

§ 4. Konstruktion von Kompositionsreihen für primäre Potenzproduktideale

Jedes Primärideal $\mathfrak{q}$ besitzt mindestens eine Kompositionsreihe nach dem zugehörigen Primideal $\mathfrak{p}$; das ist eine echte Teilerkette $\mathfrak{q} = \mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{q}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{q}_\mu = \mathfrak{p}$, die aus zu $\mathfrak{p}$ gehörigen Primäridealen besteht und durch Einschalten weiterer Glieder nicht mehr verlängert werden kann. Die Länge μ der Kompositionsreihe heißt die Multiplizität des Ideals $\mathfrak{q}$ ([2], Seite 88/89). Durch jedes zu $\mathfrak{p}$ gehörige Primärideal $\bar{\mathfrak{q}} \subset \mathfrak{q}$ führt mindestens eine Kompositionsreihe des Ideals $\mathfrak{q}$; denn entweder ist zwischen $\mathfrak{q}$ und $\bar{\mathfrak{q}}$ kein Glied mehr einzuschalten, oder es existiert ein $\bar{\bar{\mathfrak{q}}}$ dazwischen, — im ersten Fall bilden $\mathfrak{q}$ und eine Kompositionsreihe von $\bar{\mathfrak{q}}$ eine Kompositions-

*) Siehe O. PERRON, Beweis und Verschärfung eines Satzes von Kronecker, *Math. Ann.* **118** (1941/43), 441—448.

reihe für das Ideal $\mathfrak{q}$, im zweiten Fall ist zu untersuchen, ob zwischen $\mathfrak{q}$ und $\bar{\bar{\mathfrak{q}}}$ noch ein Primärideal liegt, usw.

Wir wollen hier ein Verfahren angeben, das für jedes primäre Potenzproduktideal eine Kompositionsreihe aus primären Potenzproduktidealen liefert.

Satz 16. *Es sei $\mathfrak{q}$ ein primäres Potenzproduktideal, $\mathfrak{p}=(x_1, x_2, \dots, x_r)$ bezeichne das zugehörige Primideal. Das folgende Verfahren liefert eine Kompositionsreihe von $\mathfrak{q}$ nach $\mathfrak{p}$ mit der Länge $\mu=h_0(\mathfrak{q})$, wo $h_0(\mathfrak{q})$ den Hilbertkoeffizienten des Ideals $\mathfrak{q}$ bezeichnet*

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_1 \subset \mathfrak{q}_2 \subset \dots \subset \mathfrak{q}_\mu = \mathfrak{p}.$$

Wir setzen $\mathfrak{q}_1=\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}_k=(\mathfrak{q}_{k-1}, q_k)=(\mathfrak{q}, q_2, \dots, q_k)$ für $1<k\leqq\mu$. Dabei bezeichnen

$$q_{s_m+1}, q_{s_m+2}, \dots, q_{s_{m+1}}$$

sämtliche Potenzprodukte der $x_1, x_2, \dots, x_r$ vom Grade $g_m = c_1+\dots+c_r-m$, die nicht in $\mathfrak{q}$ enthalten sind ($c_1, \dots, c_r$ sind die Exponenten der reinen Potenzprodukte der in Satz 10 gebenen unverkürzbaren Potenzproduktbasis für $\mathfrak{q}$), ihre Anzahl sei t_m; es ist $s_r=0$, $s_{m+1} = 1+t_r+\dots+t_m$, und m läuft von r bis $G-1 = c_1+\dots+c_r-1$.

Beweis. Wir konstruieren zunächst für das reine Potenzproduktideal $\mathfrak{q} = (x_1^{c_1}, x_2^{c_2}, \dots, x_r^{c_r})$ eine echte Teilerkette der Länge λ, in der sämtliche Glieder zu $\mathfrak{p}$ gehörige primäre Potenzproduktideale sind, und zeigen alsdann, daß diese Teilerkette eine Kompositionsreihe ist.

Es sei $\mathfrak{q}_1=\mathfrak{q}$. Ist $\mathfrak{q}=\mathfrak{p}$, so ist $\lambda=1$, und wir sind fertig. Wenn $\mathfrak{q}$ kein Primideal ist, so wählen wir das Potenzprodukt q_2 zu $q_2=x_1^{c_1-1}\dots x_r^{c_r-1}$ und das Primärideal $\mathfrak{q}_2=(\mathfrak{q}_1, q_2)$. Es gilt $q_2\notin\mathfrak{q}_1$, aber $q_2\in\mathfrak{p}$. q_2 ist das einzige Potenzprodukt der $x_1, \dots, x_r$ das den Grad $g_r = G-r$ (wir setzen $G = c_1+\dots+c_r$) besitzt und nicht in $\mathfrak{q}$ liegt. Bei $\mathfrak{q}_2=\mathfrak{p}$ bricht die Kette mit $\lambda=2$ ab. Andernfalls suchen wir sämtliche Potenzprodukte der $x_1, \dots, x_r$ vom Grade $g_{r+1} = G-(r+1)$, die nicht in $\mathfrak{q}$ enthalten sind. Dies seien die t_{r+1} Potenzprodukte $q_3, q_4, \dots, q_{s_{r+2}}$ $(s_{r+2} = 2+t_{r+1})$, mit denen wir die Primärideale

$$\mathfrak{q}_3 = (\mathfrak{q}_2, q_3)\subset\mathfrak{q}_4 = (\mathfrak{q}_3, q_4)\subset\dots\subset\mathfrak{q}_{s_{r+2}} = (\mathfrak{q}_{s_{r+2}-1}, q_{s_{r+2}})$$

bilden. Falls $\mathfrak{q}_{s_{r+2}}\neq\mathfrak{p}$ gilt, also $G > r+2$ ist, bestimmen wir die t_{r+2} nicht in $\mathfrak{q}$ enthaltenen Potenzprodukte der $x_1, \dots, x_r$ vom Grade $g_{r+2} = G-(r+2)$ und bilden analog

$$\mathfrak{q}_{s_{r+2}+1}\subset\dots\subset\mathfrak{q}_{s_{r+3}},$$

Es sei t_m die Anzahl der verschiedenen Potenzprodukte der $x_1, \dots, x_r$ vom Grade $g_m = G-m$, die nicht in dem Potenzproduktideal $\mathfrak{q}$ liegen. Es seien dies die Potenzprodukte $q_{s_m+1}, \dots, q_{s_{m+1}}$. Eine Potenzproduktbasis für das Ideal $\mathfrak{q}_{s_m+i}$ ergibt sich aus einer solchen für das Potenzproduktideal $\mathfrak{q}_{s_m+i-1}$, indem zu dieser das Potenzprodukt q_{s_m+i} hinzugefügt wird. Dann ist $\mathfrak{q}_{s_m+i} = (\mathfrak{q}_{s_m+i-1}, q_{s_m+i})$ ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges primäres Potenzproduktideal $(1\leqq i\leqq t_m;\ r\leqq m\leqq G-1)$. Für $m = G-1$ gilt $t_m\leqq r$, es gibt nur die Potenzprodukte $x_1, \dots, x_r$ vom Grad g_m in $\mathfrak{p}$; folglich ist dann $\mathfrak{q}_{s_m}=\mathfrak{p}=(x_1, \dots, x_r)$.

Nach ihrer Konstruktion ist

$$\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q}\subset\mathfrak{q}_2\subset\dots\subset\mathfrak{q}_\iota = \mathfrak{p}$$

eine Teilerkette der Länge $\lambda = s_G = 1 + t_r + t_{r+1} + \cdots + t_{G-1}$. Um zu zeigen, daß es eine Kompositionsreihe ist, nehmen wir an, es existiere ein Primärideal $\bar{\mathfrak{q}}$ mit $\mathfrak{q}_{k-1} \subset \bar{\mathfrak{q}} \subset \mathfrak{q}_k$ und $2 \leqq k \leqq \lambda$. Dann wäre $\bar{\mathfrak{q}} = (\mathfrak{q}_{k-1}, F_1 q_k, \ldots, F_s q_k)$. Aus $q_k \notin \bar{\mathfrak{q}}$ folgte $F_j \in \mathfrak{p}$ für $j = 1, \ldots, s$. Mithin besäße $F_j q_k$, wenn F_j von 0 verschieden wäre, in jedem Glied in $x_1, \ldots, x_r$ einen größeren Grad als das Potenzprodukt q_k, so daß $F_j q_k \in \mathfrak{q}_{k-1}$ und weiter $\bar{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q}_{k-1}$ folgte. Die obige echte Teilerkette ist also bereits eine Kompositionsreihe. Sie besitzt ebensoviel Glieder, wie es Potenzprodukte $q_k (\neq 1)$ der $x_1, \ldots, x_r$ gibt, die nicht in $\mathfrak{q}$ enthalten sind. Jedes q_k hat die Gestalt $q_k = x_1^{d_1} x_2^{d_2} \ldots x_r^{d_r}$ mit $0 \leqq d_i \leqq c_i - 1$ und $d_1 + \cdots + d_r > 0$. Andererseits ist jedes Potenzprodukt dieser Bauart gleich einem der konstruierten q_k. Es gibt also genau $c_1 \ldots c_r - 1$ verschiedene Potenzprodukte q_k; folglich ist

$$\lambda = c_1 c_2 \ldots c_r .$$

Aus der obigen Kompositionsreihe für $\mathfrak{q} = (x_1^{c_1}, x_2^{c_2}, \ldots, x_r^{c_r})$ erhalten wir für ein beliebiges Primärideal

$$\mathfrak{q}' = \left(x_1^{c_1}, x_2^{c_2}, \ldots, x_r^{c_r}, \prod_{i=1}^{r} x_i^{c_{1i}}, \prod_{i=1}^{r} x_i^{c_{2i}}, \ldots, \prod_{i=1}^{r} x_i^{c_{si}} \right)$$

eine Teilerkette

$$\mathfrak{q}' = \mathfrak{q}'_1 \subset \mathfrak{q}'_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{q}'_\mu = \mathfrak{p}$$

auf folgende Weise: Aus der Kompositionsreihe für $\mathfrak{q}$ ergibt sich, wenn wir zunächst $\bar{\mathfrak{q}}_k = (\mathfrak{q}', q_2, \ldots, q_k)$ bilden, eine Teilerkette $\mathfrak{q}' = \bar{\mathfrak{q}}_1 \subseteqq \bar{\mathfrak{q}}_2 \subseteqq \cdots \subseteqq \bar{\mathfrak{q}}_\lambda = \mathfrak{p}$; aus der so erhaltenen Teilerkette für $\mathfrak{q}'$ streichen wir sodann sämtliche $\bar{\mathfrak{q}}_k$, für die $q_k \in \mathfrak{q}'$ gilt; die übriggebliebenen $\bar{\mathfrak{q}}_k$ und die zugehörigen q_k werden neu durchnumeriert und zur Unterscheidung mit einem Apostroph versehen, also $\mathfrak{q}'_k = (\mathfrak{q}', q'_2, \ldots, q'_k)$. Daß die so gewonnene echte Teilerkette eine Kompositionsreihe ist, folgt analog dem vorigen Beweis.

Die Länge der konstruierten Kompositionsreihe für $\mathfrak{q}'$ ist gleich der Gröbnerschen Multiplizität μ des Ideals $\mathfrak{q}'$ und genügt bei algebraisch abgeschlossenem Grundkörper K der Relation

$$h_0(\mathfrak{q}') = \mu h_0(\mathfrak{p})$$

([2], Seite 166), wobei $h_0(\mathfrak{a})$ den höchsten zu dem Polynomideal $\mathfrak{a}$ gehörigen Hilbertschen Koeffizienten, die Ordnung, bezeichnet. Da in unserem Fall $\mathfrak{p}$ ein Ideal der Hauptklasse ist, erhalten wir nach [2] (Seite 166) $h_0(\mathfrak{p}) = 1$ und damit $\mu = h_0(\mathfrak{q}')$; durch das obige Verfahren wird auch $h_0(\mathfrak{q}')$ bestimmt.

Beispiel 5. Wir wollen eine Kompositionsreihe für das reine Potenzproduktideal

$$\mathfrak{q} = (x_1^4, x_2^3, x_3^2) \quad (n \geqq 3)$$

konstruieren. Es ist $\mathfrak{p} = (x_1, x_2, x_3)$ das zugehörige Primideal, und

$q_2 = x_1^3 x_2^2 x_3$; $q_3 = x_1^3 x_2^2$, $q_4 = x_1^3 x_2 x_3$, $q_5 = x_1^2 x_2^2 x_3$; $q_6 = x_1^3 x_2$,
$q_7 = x_1^3 x_3$, $q_8 = x_1^2 x_2^2$, $q_9 = x_1^2 x_2 x_3$, $q_{10} = x_1 x_2^2 x_3$; $q_{11} = x_1^3$,
$q_{12} = x_1^2 x_2$, $q_{13} = x_1^2 x_3$, $q_{14} = x_1 x_2^2$, $q_{15} = x_1 x_2 x_3$, $q_{16} = x_2^2 x_3$;
$q_{17} = x_1^2$, $q_{18} = x_1 x_2$, $q_{19} = x_1 x_3$, $q_{20} = x_2^2$, $q_{21} = x_2 x_3$;
$q_{22} = x_1$, $q_{23} = x_2$, $q_{24} = x_3$

ist eine geeignete Numerierung der benötigten Potenzprodukte. Also bilden die Ideale

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_1 = (x_1^4, x_2^3, x_3^2) \subset \mathfrak{q}_2 = (x_1^4, x_2^3, x_3^2, x_1^3 x_2^2 x_3) \subset \mathfrak{q}_3 = (x_1^4, x_2^3, x_3^2, x_1^3 x_2^2) \subset$$

$$\subset \mathfrak{q}_4 = (x_1^4, x_2^3, x_3^2, x_1^3 x_2^2, x_1^2 x_2 x_3) \subset \mathfrak{q}_5 = (x_1^4, x_2^3, x_3^2, x_1^3 x_2^2, x_1^3 x_2 x_3, x_1^2 x_2^2 x_3) \subset$$

$$\subset \mathfrak{q}_6 = (x_1^4, x_2^3, x_3^2, x_1^3 x_2, x_1^2 x_2^2 x_3) \subset \mathfrak{q}_7 = (x_1^4, x_2^3, x_3^2, x_1^3 x_2, x_1^3 x_3, x_1^2 x_2^2 x_3) \subset$$

$$\subset \mathfrak{q}_8 = (x_1^4, x_2^3, x_3^2, x_1^3 x_2, x_1^3 x_2, x_1^2 x_2^2) \subset \mathfrak{q}_9 =$$

$$= (x_1^4, x_2^3, x_3^2, x_1^3 x_2, x_1^3 x_3, x_1^2 x_2^2, x_1^2 x_2 x_3) \subset$$

$$\subset \mathfrak{q}_{10} = (x_1^4, x_2^3, x_3^2, x_1^3 x_2, x_1^3 x_3, x_1^2 x_2^2, x_1^2 x_2 x_3, x_1 x_2^2 x_3) \subset$$

$$\subset \mathfrak{q}_{11} = (x_1^3, x_2^3, x_3^2, x_1^2 x_2^2, x_1^2 x_2 x_3, x_1 x_2^2 x_3) \subset \mathfrak{q}_{12} = (x_1^3, x_2^3, x_3^2, x_1^2 x_2, x_1 x_2^2 x_3) \subset$$

$$\subset \mathfrak{q}_{13} = (x_1^3, x_2^3, x_3^2, x_1^2 x_2, x_1^2 x_3, x_1 x_2^2 x_3) \subset \mathfrak{q}_{14} = (x_1^3, x_2^3, x_3^2, x_1^2 x_2, x_1^2 x_3, x_1 x_2^2) \subset$$

$$\subset \mathfrak{q}_{15} = (x_1^3, x_2^3, x_3^2, x_1^2 x_2, x_1^2 x_3, x_1 x_2^2, x_1 x_2 x_3) \subset$$

$$\subset \mathfrak{q}_{16} = (x_1^3, x_2^3, x_3^2, x_1^2 x_2, x_1^2 x_3, x_1 x_2^2, x_1 x_2 x_3, x_2^2 x_3) \subset$$

$$\subset \mathfrak{q}_{17} = (x_1^2, x_2^3, x_3^2, x_1 x_2^2, x_1 x_2 x_3, x_2^2 x_3) \subset \mathfrak{q}_{18} = (x_1^2, x_2^3, x_3^2, x_1 x_2, x_2^2 x_3) \subset$$

$$\subset \mathfrak{q}_{19} = (x_1^2, x_2^3, x_3^2, x_1 x_2, x_1 x_3, x_2^2 x_3) \subset \mathfrak{q}_{20} = (x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_1 x_2, x_1 x_3) \subset$$

$$\subset \mathfrak{q}_{21} = (x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_1 x_2, x_1 x_3, x_2 x_3) \subset \mathfrak{q}_{22} = (x_1, x_2^2, x_3^2, x_2 x_3) \subset$$

$$\subset \mathfrak{q}_{23} = (x_1, x_2, x_3^2) \subset \mathfrak{q}_{24} = (x_1, x_2, x_3) = \mathfrak{p}$$

eine Kompositionsreihe der Länge $\mu = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

Jetzt soll für dasselbe Ideal $\mathfrak{q}$ eine Kompositionsreihe angegeben werden, die die Ideale

$$\mathfrak{a} = (x_1^3, x_2^3, x_3^2), \quad \mathfrak{b} = (x_1^3, x_2^3, x_3), \quad \mathfrak{c} = (x_1^3, x_2^2, x_3), \quad \mathfrak{d} = (x_1^2, x_2^2, x_3), \quad \mathfrak{e} = (x_1^2, x_2, x_3)$$

als Glieder enthält. Man erhält nach einer Umnumerierung der Potenzprodukte $q_2, \ldots, q_{24}$ etwa die Reihe

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_1 \subset \mathfrak{q}_2 = (\mathfrak{q}, x_1^3 x_2^2 x_3) \subset \mathfrak{q}_3 = (\mathfrak{q}, x_1^3 x_2^2) \subset \mathfrak{q}_4 = (\mathfrak{q}_3, x_1^3 x_2 x_3) \subset \mathfrak{q}_5 = (\mathfrak{q}, x_1^3 x_2) \subset$$

$$\subset \mathfrak{q}_6 = (\mathfrak{q}_5, x_1^3 x_3) \subset \mathfrak{q}_7 = (\mathfrak{q}_6, x_1^3) = \mathfrak{a} \subset \mathfrak{q}_8 = (\mathfrak{a}, x_1^2 x_2^2 x_3) \subset \mathfrak{q}_9 = (\mathfrak{a}, x_1^2 x_2 x_3) \subset$$

$$\subset \mathfrak{q}_{10} = (\mathfrak{q}_9, x_1 x_2^2 x_3) \subset \mathfrak{q}_{11} = (\mathfrak{q}_{10}, x_1^2 x_3) \subset \mathfrak{q}_{12} = (\mathfrak{q}_{11}, x_1 x_2 x_3) \subset$$

$$\mathfrak{q}_{13} = (\mathfrak{q}_{12}, x_2^2 x_3) \subset \mathfrak{q}_{14} = (\mathfrak{q}_{13}, x_1 x_3) \subset \mathfrak{q}_{15} = (\mathfrak{q}_{14}, x_2 x_3) \subset \mathfrak{q}_{16} = (\mathfrak{a}, x_3) = \mathfrak{b} \subset$$

$$\subset \mathfrak{q}_{17} = (\mathfrak{b}, x_1^2 x_2^2) \subset \mathfrak{q}_{18} = (\mathfrak{q}_{17}, x_1 x_2^2) \subset \mathfrak{q}_{19} = (\mathfrak{b}, x_2^2) = \mathfrak{c} \subset \mathfrak{q}_{20} = (\mathfrak{c}, x_1^2 x_2) \subset$$

$$\subset \mathfrak{q}_{21} = (\mathfrak{c}, x_1^2) = \mathfrak{d} \subset \mathfrak{q}_{22} = (\mathfrak{d}, x_1 x_2) \subset \mathfrak{q}_{23} = (\mathfrak{d}, x_2) = \mathfrak{e} \subset \mathfrak{q}_{24} = (\mathfrak{e}, x_1) = \mathfrak{p}.$$

Literatur

[1] L. Fuchs, On quasi-primary ideals, *Acta Sci. Math. Szeged* **11** (1947), 174—183.
[2] W. Gröbner, Moderne algebraische Geometrie. Die idealtheoretischen Grundlagen, *Wien und Innsbruck*, 1949.
[3] W. Gröbner, Über irreduzible Ideale in kommutativen Ringen, *Math. Ann.* **110** (1934), 197—222.
[4] G. Hermann, Die Frage der endlichen Schritte in der Theorie der Polynomideale, *Math. Ann.* **95** (1926), 736—788.
[5] W. Krull, Idealtheorie in Ringbereichen, *Berlin*, 1935.
[6] E. Noether, Idealtheorie in Ringbereichen, *Math. Ann.* **83** (1921), 24—66.
[7] E. Pahlisch, Idealquotient von Potenzproduktidealen, *Staatsexamensarbeit, PH Potsdam*, 1968.
[8] O. Perron, Algebra I. Die Grundlagen, *Berlin*, 1951.
[9] E. Sperner, Über einen kombinatorischen Satz von Macaulay, *Abh. Math. Sem. Hamburg* **7** (1930), 149—163.
[10] C. Veltzke, Berechnungsprobleme bei Polynomidealen, *Diplomarbeit, Humb.-Univ. Berlin*, 1958.
[11] B. L. v. d. Waerden, Algebra II, *Berlin, Göttingen, Heidelberg*, 1955.

(Eingegangen am 15. März 1968.)