Forderungen

$$a \vee (b \wedge a) = a \qquad (a \vee b) \wedge a = a$$

bereits Kommutativität bedingt.

Um eine Antwort auf die obige Frage geben zu können, definieren wir den Begriff der *Spur* eines schiefverbandstheoretischen Terms $T^{\wedge\vee}$. Hierzu ordnen wir jedem $\wedge\vee$-Term $T^{\wedge\vee}$ seinen bezüglich $\vee$ kommutierten Term $T^{\wedge\triangledown}$ zu, d. h. denjenigen $\wedge\triangledown$-Term, der aus $T^{\wedge\vee}$ entsteht, wenn man jeden $\wedge\vee$-Teilterm der Form $T' \vee T''$ durch $T'' \triangledown T'$ ersetzt. Unter der Spur sp $T$ eines Terms $T^{\wedge\vee}$ verstehen wir sodann die erste Variable des bezüglich $\vee$ kommutierten Terms $T^{\wedge\triangledown}$.

Nun lautet die Antwort auf die obige Frage folgendermaßen:

*Dann und nur dann ist ein Schiefverband* $(M; \wedge, \vee)$ *ein Verband, wenn in* $(M; \wedge, \vee)$ *mindestens ein Zusatzaxiom* $\forall\, a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n \in M\colon\ T^{\wedge\vee}(a_1, \ldots, a_m) = S^{\wedge\vee}(b_1, \ldots, b_n)$ *mit* sp $T \neq$ sp $S$ *gilt.*

Beweis. Zunächst seien in allen Zusatzaxiomen die Spuren der beiden Terme gleich. Da dies auch in den einen Schiefverband charakterisierenden Axiomen der Fall ist, folgt die Spurgleichheit für alle Termgleichungen der Theorie. Denn die Relation der Spurgleichheit in der Menge aller $\wedge\vee$-Terme ist eine Kongruenzrelation. Es kann also weder $a \wedge b = b \wedge a$ noch $a \vee b = b \vee a$ für je zwei $a, b \in M$ gefolgert werden, weil hier die Spuren der Terme links und rechts des Gleichheitszeichens vevschieden sind.

Es gelte nun ein Zusatzaxiom $\forall a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n \in M\colon T^{\wedge\vee}(a_1, \ldots, a_m) = S^{\wedge\vee}(b_1, \ldots, b_n)$ mit sp $T \neq$ sp $S$. $a$ und $b$ seien beliebige Elemente von M. Man ersetze in $T^{\wedge\vee} = S^{\wedge\vee}$ die Spur sp $T$ und alle zu sp $T$ gleichen Elemente durch $a \wedge b$, alle übrigen Elemente dagegen durch $b \wedge a$. Die neue Termgleichung sei $T_0^{\wedge\vee} = S_0^{\wedge\vee}$. Dann besteht der Term $T_0^{\wedge\vee}$ entweder nur aus $a \wedge b$, oder das durch die Abbildung $T^{\wedge\vee} \to T_0^{\wedge\vee}$ erzeugte Bild $a \wedge b$ von sp $T$ ist folgendermaßen mit $a \wedge b$ oder $b \wedge a$ verknüpft: $(a \wedge b) \wedge (a \wedge b)$, $(a \wedge b) \wedge (b \wedge a)$, $(a \wedge b) \vee (a \wedge b)$ oder $(b \wedge a) \vee (a \wedge b)$. Wegen der sich aus Assoziativität, Idempotenz und Glattheit ergebenden Identitäten $(x \wedge y) \wedge (y \wedge x) = x \wedge y$ und $(x \wedge y) \vee (y \wedge x) = [(x \wedge y) \wedge (y \wedge x)] \vee (y \wedge x) = y \wedge x$ haben alle vier Terme den Wert $a \wedge b$. Jede weitere Verknüpfung dieses Resultates mit $a \wedge b$ oder $b \wedge a$ liefert ebenso $a \wedge b$, so daß nach höchstens endlich vielen Schritten der Nachweis $T_0^{\wedge\vee} = a \wedge b$ gelingt. Entsprechend ist $S_0^{\wedge\vee} = b \wedge a$; also ergibt sich insgesamt $a \wedge b = b \wedge a$. Dual erhält man $a \vee b = b \vee a$, wenn man sp $T$ und alle hierzu gleichen Elemente durch $a \vee b$, die zu sp $T$ verschiedenen Elemente der Termgleichung $T^{\wedge\vee} = S^{\wedge\vee}$ jedoch durch $b \vee a$ ersetzt. Damit ist die Kommutativität von $(M; \wedge, \vee)$ nachgewiesen. Insbesondere ist eine Verflechtung schon dann ein Verband, wenn sie bezüglich nur einer der beiden Operationen kommutativ ist.

## Literatur

[1] M. D. Gerhardts, Zur Charakterisierung distributiver Schiefverbände. *Math. Ann.* **161** (1965), 231—240.
[2] P. Jordan u. E. Witt, Zur Theorie der Schrägverbände. *Akad. Mainz* 1953, 225—232.
[3] P. Jordan, Beiträge zur Theorie der Schrägverbände. *Akad. Mainz* 1956, 29—42.
[4] S. Matsushita, Zur Theorie der nichtkommutativen Verbände. *Math. Ann.* **137** (1959), 1—8.

*(Eingegangen am 11. Juni 1968.)*

# Bemerkung über das Maximum der Partialsummen von trigonometrischen Polynomen

Von KÁROLY TANDORI (Szeged)

1. Es sei $N$ eine natürliche Zahl. Für eine Folge $\{a_n\}_1^N$ bilden wir

$$I(a_1, \ldots, a_N) = \sup \int_0^{2\pi} \big( \max_{1 \leq i \leq N} |a_1 \cos(x-\alpha_1) + \ldots + a_i \cos i(x-\alpha_i)| \big)^2 dx,$$

wobei das Supremum für alle Folgen $\{\alpha_n\}_N^1$ gebildet ist. Für die Funktion $I(a_1, \ldots, a_N)$ werden wir die folgende Behauptung beweisen.

**Satz.** *Es gibt eine positive absolute Konstante $K(=6)$ derart, daß im Falle $|c_i| \leq |d_i|$ $(i=1, \ldots, N)$*

$$I(c_1, \ldots, c_N) \leq KI(d_1, \ldots, d_N) \tag{1}$$

*besteht.*

2. Beweis des Satzes. Wir betrachten die nach $2\pi$ periodischen Funktionen

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \sqrt{2} & (0 \leq x < \pi), \\ 0 & (\pi \leq x < 2\pi), \end{cases} \qquad \varphi_2(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x < \pi), \\ \sqrt{2} & (\pi \leq x < 2\pi). \end{cases}$$

Durch einfacher Rechnung erhalten wir die Fourierentwicklungen

$$\varphi_1(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{2}\,\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1},$$

$$\varphi_2(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{4}{\sqrt{2}\,\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}.$$

Die Funktion $\varphi_1(x)$ ist mit Ausnahme der Punkte $x=0, \pi, 2\pi$ im Intervall $[0, 2\pi]$ überall stetig und hat beschränkte Schwankung. Nach bekannten Sätzen[1]) konvergieren also die Partialsummen der Fourierreihe von $\varphi_1(x)$ in der Menge $(\delta, \pi-\delta) \cup (\pi+\delta, 2\pi-\delta)$ für jedes $\delta > 0$ gleichmäßig gegen $\varphi_1(x)$ und sind diese Partialsummen gleichmäßig beschränkt.

[1]) Siehe z. B. A. Zygmund, *Trigonometric Series* (Cambridge, 1959), Vol. I, S. 57 und 90.

Die $\nu$-te Partialsumme der Fourierreihe von $\varphi_1(x)$, bzw. $\varphi_2(x)$ bezeichnen wir mit $s_\nu(\varphi_1; x)$, bzw. mit $s_\nu(\varphi_2; x)$. Es sei $\varepsilon(>0)$ eine beliebige Zahl. Nach obigen gelten also für jede angegebenen Folgen $\{c_n\}_1^N$, $\{\alpha_n\}_1^N$, bzw. $\{d_n\}_1^N$, $\{\beta_n\}_1^N$

$$\int_0^{\pi} (s_\nu(\varphi_1; x))^2 \big(\max_{1 \leqq i \leqq N} |c_1 \cos 2(x-\alpha_1) + \dots + c_i \cos 2i(x-\alpha_i)|\big)^2 \, dx \geqq \tag{2}$$

$$\geqq 2 \int_0^{\pi} \big(\max_{1 \leqq i \leqq N} |c_1 \cos 2(x-\alpha_1) + \dots + c_i \cos 2i(x-\alpha_i)|\big)^2 \, dx - \varepsilon,$$

$$\int_0^{2\pi} (s_\nu(\varphi_1; x))^2 \big(\max_{1 \leqq i \leqq N} |d_1 \cos 2(x-\beta_1) + \dots + d_i \cos 2i(x-\beta_i)|\big)^2 \, dx \leqq \tag{3}$$

$$\leqq \int_0^{2\pi} \big(\max_{1 \leqq i \leqq N} |d_1 \cos 2(x-\beta_1) + \dots + d_i \cos 2i(x-\beta_i)|\big)^2 \, dx + \varepsilon,$$

wenn nun $\nu$ genügend groß ist.

Offensichtlich gilt für jede Folge $\{a_n\}_1^N$

$$I(a_1, \dots, a_N) = \sup_{\{\alpha_n\}} \int_0^{2\pi} \big(\max_{1 \leqq i \leqq N} a_1 \cos 2(x-\alpha_1) + \dots + a_i \cos 2i(x-\alpha_i)|\big)^2 \, dx.$$

Daraus, auf Grund der Definition von $I(c_1, \dots, c_N)$ gibt es eine Folge $\{\alpha_n\}_1^N$ mit

$$\int_0^{2\pi} \big(\max_{1 \leqq i \leqq N} |c_1 \cos 2(x-\alpha_1) + \dots + c_i \cos 2i(x-\alpha_i)|\big)^2 \, dx \geqq I(c_1, \dots, c_N) - \varepsilon. \tag{4}$$

Es sei

$$h_i(x) = \frac{c_i}{d_i} \cos 2i(x-\alpha_i)\, s_\nu(\varphi_1; x) + \sqrt{1 - \frac{c_i^2}{d_i^2}} \sin 2i(x-\alpha_i)\, s_\nu(\varphi_2; x)$$

$(i=1, \dots, N)$. (Im Falle $d_i = 0$ soll man anstatt $c_i/d_i$ 1 nehmen.) Aus (2) und (4) erhalten wir

$$\int_0^{2\pi} \big(\max_{1 \leqq i \leqq N} |d_1 h_1(x) + \dots + d_i h_i(x)|\big)^2 \, dx \geqq$$

$$\geqq \int_0^{\pi} \big(\max_{1 \leqq i \leqq N} |d_1 h_1(x) + \dots + d_i h_i(x)|\big)^2 \, dx \geqq \tag{5}$$

$$\geqq 2 \int_0^{\pi} \big(\max_{1 \leqq i \leqq N} |c_1 \cos 2(x-\alpha_1) + \dots + c_i \cos 2i(x-\alpha_i)|\big)^2 \, dx - \varepsilon =$$

$$= \int_0^{2\pi} \big(\max_{1 \leqq i \leqq N} |c_1 \cos 2(x-\alpha_1) + \dots + c_i \cos 2i(x-\alpha_i)|\big)^2 \, dx - \varepsilon \geqq I(c_1, \dots, c_N) - 2\varepsilon.$$

Durch einfache Rechnung folgt

$$h_i(x) = \frac{c_i}{d_i}\cos 2i(x-\alpha_i)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{4}{\sqrt{2}\,\pi}\sum_{1\leqq 2k+1\leqq \nu}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}\right)+$$

$$+\sqrt{1-\frac{c_i^2}{d_i^2}}\sin 2i(x-\alpha_i)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{4}{\sqrt{2}\,\pi}\sum_{1\leqq 2k+1\leqq \nu}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2i(x+\beta_i)+\left(\frac{4}{\sqrt{2}\,\pi}\sum_{1\leqq 2k+1\leqq \nu}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}\right)\sin 2i(x-\beta_i)=$$

$$=\cos 2i(x-\beta_i)\,s_\nu(\varphi_1;x)+\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos 2i(x+\beta_i)-\cos 2i(x-\beta_i))$$

mit gewissen $\beta_i$. Aus (3) bekommen wir also

$$\int_0^{2\pi}\big(\max_{1\leqq i\leqq N}|d_1h_1(x)+\dots+d_ih_i(x)|\big)^2dx\leqq$$

$$\leqq 3\left(\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\big(\max_{1\leqq i\leqq N}|d_1\cos 2(x+\beta_1)+\dots+d_i\cos 2i(x+\beta_i)|\big)^2dx+\right.$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\big(\max_{1\leqq i\leqq N}|d_1\cos 2(x-\beta_1)+\dots+d_i\cos 2i(x-\beta_i)|\big)^2dx+ \tag{6}$$

$$\left.+\int_0^{2\pi}(s_\nu(\varphi_1;x))^2\big(\max_{1\leqq i\leqq N}|d_1\cos 2(x-\beta_1)+\dots+d_i\cos 2i(x-\beta_i)|\big)^2dx\right)\leqq$$

$$\leqq 6I(d_1,\dots,d_N)+3\varepsilon.$$

Da $\varepsilon(>0)$ beliebig ist, ergibt sich aus (5) und (6) die Behaptung mit $K=6$.

*(Eingegangen am 14. Juni 1968.)*