Über irreguläre Iterationsfolgen

Von LOTHAR BERG (Rostock)

Es sei $f(x)$ eine stetige Funktion, die das Grundintervall $[a, b]$ in sich abbildet. Dann kann man dort für beliebige natürliche Zahlen n die durch

$$f_0(x)=x, \qquad f_1(x)=f(x), \qquad f_{n+1}(x)=f(f_n(x))$$

erklärten Iterierten von $f(x)$ bilden. Ist x_0 ein fester Punkt aus $[a, b]$, so sind zwei Fälle möglich (vgl. B. BARNA [1]):

I. Die Folge $f_n(x_0)$ hat endlich viele Häufungspunkte (die notwendig Fixpunkte von $f(x)$ sind, wenn man die Fixpunkte höherer Ordnung, d. h., die gewöhnlichen Fixpunkte der Iterierten $f_m(x)$, mitrechnet).

II. Die Folge $f_n(x_0)$ hat unendlich viele Häufungspunkte (in diesem Fall heißt sowohl der Punkt x_0 als auch die Folge $f_n(x_0)$ *irregulär*).

Es wäre für verschiedene Anwendungen sehr angenehm, wenn es unter den Häufungspunkten einer irregulären Folge stets mindestens einen Fixpunkt geben würde. Wie wir jedoch durch ein *Gegenbeispiel* zeigen werden, braucht dies nicht der Fall zu sein. Zuvor wollen wir untersuchen, welche Struktur eine Menge F_0 hat, die sich aus den Punkten der Folge $f_n(x_0)$ und deren Häufungspunkte zusammensetzt und nur aus irregulären Punkten besteht. Wir behaupten: *Jede solche Menge F_0 enhält eine nirgends dichte perfekte Teilmenge F_λ, von der jeder Punkt Häufungspunkt der Iterationsfolge eines beliebigen Punktes von F_λ ist.*

Ist F_0 nicht schon vom Typ F_λ, so konstruieren wir uns gewisse Mengen F_μ, wobei μ eine Ordnungszahl der ersten oder zweiten Zahlklasse ist. Es mögen bereits alle F_ν mit $\nu<\mu$ erklärt sein. Hat μ keinen unmittelbaren Vorgänger, so definieren, wir F_μ als Durchschnitt aller F_ν mit $\nu<\mu$. Anderfalls wählen wir einen solchen Punkt $x_\mu \in F_{\mu-1}$ (sofern es ihn gibt), daß die Menge F_μ aller Häufungspunkte der Folge $f_n(x_\mu)$ eine echte Teilmenge von $F_{\mu-1}$ ist. Da alle F_μ abgeschlossen sind und $F_\nu \supset F_\mu$ für alle $\nu<\mu$ gilt, muß das Verfahren auf Grund des Stationäritätsprinzips von Cantor und Baire (vgl. etwa I. P. NATANSON [3]) nach endlich oder abzählbar unendlich vielen Schritten abbrechnen. Die letzte dabei entstehende Menge ist die gesuchte Menge F_λ.

Um zu zeigen, daß F_λ perfekt ist, benötigen wir folgenden

Hilfssatz. *Ist F_μ irgendeine der vorhergehenden Mengen und ξ ein beliebiger Punkt von F_μ, so ist die Menge der Häufungspunkte von $f_n(\xi)$ eine Teilmenge von F_μ.*

Ist nämlich η ein Häufungspunkt von $f_n(\xi)$, so gibt es eine Teilfolge mit $f_{n_k}(\xi)\to\eta$. Wegen $\xi \in F_\nu$ für jedes $\nu \leqq \mu$ gibt es, falls $\nu-1$ existiert, weiterhin eine Teilfolge mit

$f_{m_l}(x_\nu) \to \xi$ und wegen der Stetigkeit der $f_{n_k}(x)$ folglich auch eine Teilfolge mit $f_{n_k+m_{l_k}}(x_\nu) \to \eta$. Dies bedeutet aber gerade $\eta \in F_\nu$ und somit $\eta \in F_\mu$, da wir entweder $\nu = \mu$ wählen oder den Durchschnitt über alle $\nu < \mu$ bilden können.

Aus dem soeben bewiesenen Hilfssatz folgt sofort, daß F_λ in sich dicht und somit als abgeschlossene Menge perfekt ist. Hätte nämlich F_λ einen isolierten Punkt $x_{\lambda+1}$, so wäre die zugehörige Menge $F_{\lambda+1}$ eine echte Teilmenge von F_λ und wir hätten einen Widerspruch zur Definition von λ. Analog sieht man, daß die Iterierten eines beliebigen Punktes von F_λ in F_λ dicht liegen.

Es muß jetzt nur noch bewiesen werden, daß F_λ kein Teilintervall J enthält. Wäre dies doch der Fall, so könnten wir es maximal wählen und mit Hilfe der Funktion $f(x)$ die Folge der zugehörigen iterierten Intervalle J_n betrachten. Wären alle J_n zu J punktfremd, so würde ein beliebiger Punkt $x_{\lambda+1}$ aus dem Innern von J nach unserem Hilfssatz wieder zu einer echten Teilmenge $F_{\lambda+1}$ von F_λ führen, was nicht möglich ist. Eine teilweise Überlappung eines Intervalls J_m mit J ist ebenfalls nicht möglich, da wir J maximal gewählt haben. Schließlich kann auch kein J_m vollständig in J liegen, da andernfalls nach dem Fixpunktsatz von Brouwer (vgl. etwa L. Collatz [3]) in J ein Fixpunkt von $f_m(x)$ liegen würde. Weitere Fälle gibt es nicht, so daß unsere Behauptung vollständig bewiesen ist.

Zur Konstruktion des oben angekündigten *Gegenbeispiels* führen wir die Abkürzung $a_n = f_n(x_0)$ ein und definieren

$$\varrho_n = \inf_k |a_{k+n} - a_k|.$$

Offenbar verschwindet ϱ_m genau dann, wenn ein (gewöhnlicher) Fixpunkt von $f_m(x)$ Häufungspunkt der Folge a_n ist. Unser Gegenbeispiel ist daher gefunden, wenn alle $\varrho_n > 0$ sind.

Im folgenden sei unser Grundintervall das Intervall [0, 1]. Geben wir uns eine beliebige Folge ϱ_n mit

$$2 \sum_{\nu=1}^{n} \varrho_\nu < 1 \tag{1}$$

für alle n vor, so gibt es in [0, 1] stets eine Folge a_n mit $|a_{k+n} - a_k| \geqq \varrho_n$. Wir brauchen nämlich nur a_1 irgendwie festzulegen und, falls $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ bereits bestimmt sind, a_n außerhalb der Intervalle $|x - a_\nu| \leqq \varrho_{n-\nu}$ für $\nu = 1, \ldots, n-1$ zu wählen, die das Intervall [0, 1] wegen (1) niemals vollständig überdecken können. Es bleibt dann noch zu zeigen, daß die a_n gleichzeitig so gewählt werden können, daß *die durch $f(a_n) = a_{n+1}$ zunächst nur in den Punkten a_n erklärte Funktion $f(x)$ auf das ganze Intervall* [0, 1] *stetig fortsetzbar ist.*

Wir können uns davon überzeugen, daß dies möglich ist, wenn wir $\varrho_n = 2^{-n-1}$ und die a_n im Intervall [0, 1] minimal wählen. Für die ersten zehn a_n berechnet man leicht

$$a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{1}{4}, \quad a_3 = \frac{1}{2}, \quad a_4 = \frac{1}{16}, \quad a_5 = \frac{5}{16}, \quad a_6 = \frac{9}{16}, \quad a_7 = \frac{1}{8},$$

$$a_8 = \frac{3}{8}, \quad a_9 = \frac{5}{8}, \quad a_{10} = \frac{1}{1024}.$$

Durch vollständige Induktion kann man folgende Gesetzmäßigkeiten feststellen:

$$a_{3n+2} = \frac{1}{4} + a_{3n+1}, \quad a_{3n+3} = \frac{1}{2} + a_{3n+1}$$

und $a_n = 2^{-n}$, falls $n = 3^k + 1$ ist und k eine nichtnegative ganze Zahl, d. h.

$$a_2 = 2^{-2}, \quad a_4 = 2^{-4}, \quad a_{10} = 2^{-10}, \quad a_{28} = 2^{-28}, \quad a_{82} = 2^{-82}, \quad a_{244} = 2^{-244}, \ldots$$

Für die dazwischen liegenden Werte findet man die Darstellung

$$a_{n_k+\nu} = a_{n_k} + a_{\nu+1}$$

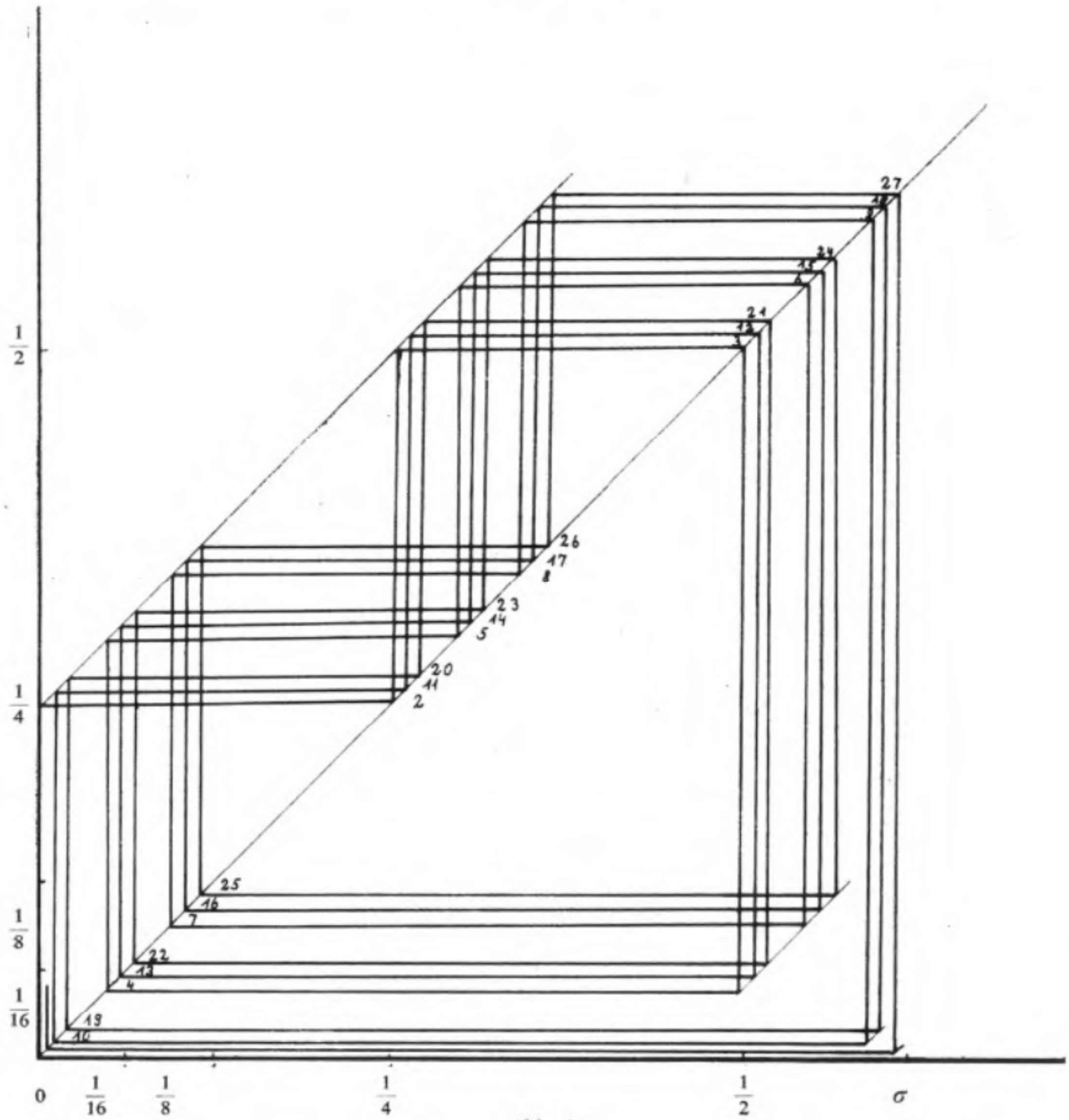

Abb. 1

für $\nu = 1, 2, \ldots, n_{k+1} - n_k - 1$ mit $n_k = 3^k + 1$ (vgl. Abb. 1, die der Deutlichkeit halber nicht maßstabsgetreu ist) und hieraus durch vollständige Induktion

$$a_{n_k - 1} = 2 \sum_{\nu=0}^{k-1} a_{n_\nu}. \tag{2}$$

Bezeichnen wir die Werte (2) mit σ_k und den Grenzwert der σ_k mit σ, so kann man sich weiterhin davon überzeugen, daß die a_n durch Iteration einer Funktion $f(x)$ entstehen, die folgendermaßen erklärt ist:

$$f(x) = x - \sigma_k + a_{n_k} \quad \text{für} \quad \sigma_k \leqq x \leqq \sigma - a_{n_k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

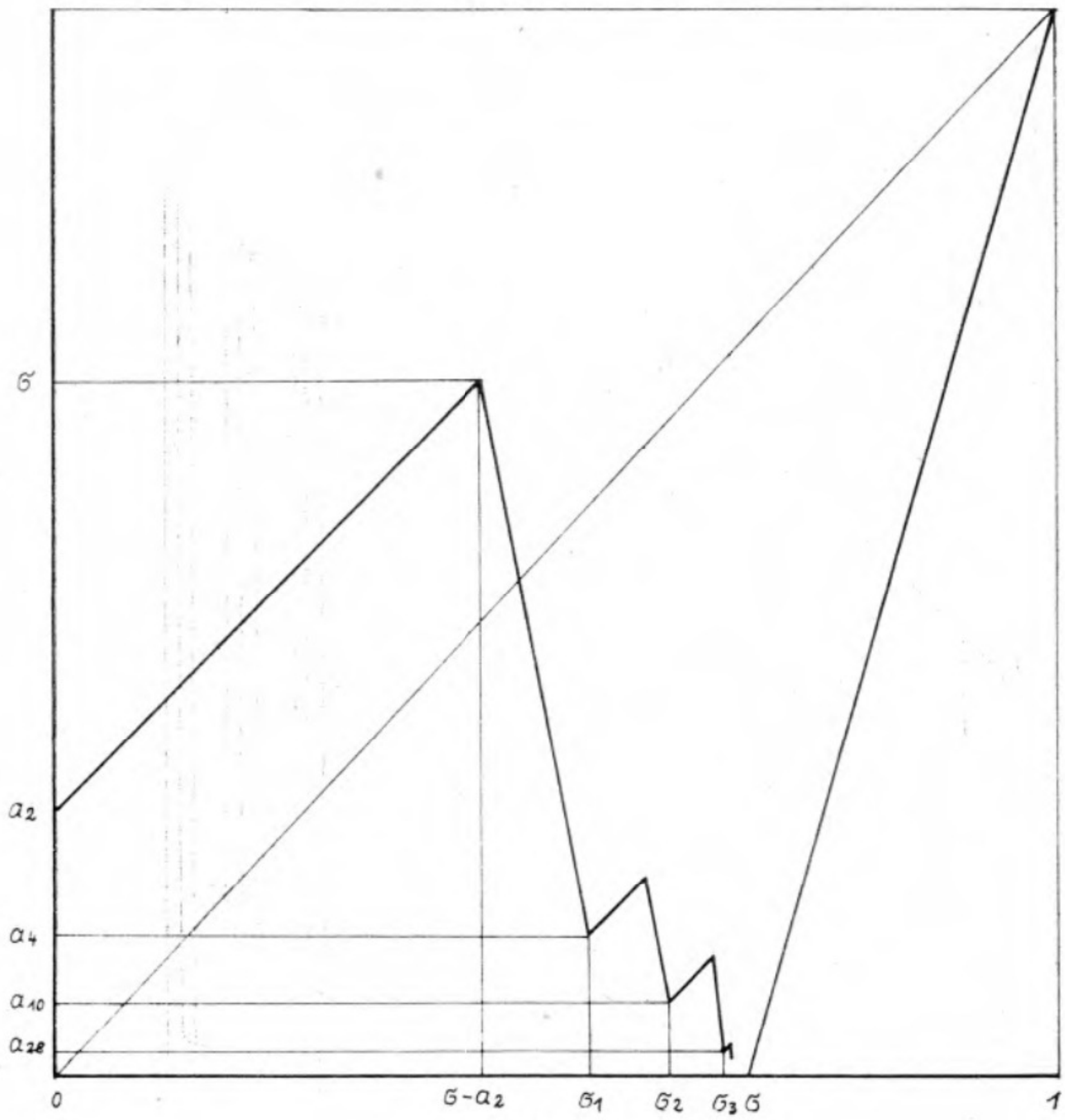

Abb. 2

und $\sigma_0 = 0$. Setzt man im Häufungspunkt σ der Definitionsintervalle $f(\sigma) = 0$ und setzt man $f(x)$ in den übrigen Intervallen $[\sigma - a_{n_k}, \sigma_{k+1}]$ und $[\sigma, 1]$ stetig fort (etwa linear), so ist $f(x)$ überall stetig (vgl. Abb. 2, die ebenfalls nicht maßstabsgetreu ist).

Literatur

[1] B. BARNA, Über die Iteration reeller Funktionen I, II, *Publ. Math. Debrecen* **7** (1960), 16—40; **13** (1966), 169—172.

[2] L. COLLATZ, Funktionalanalysis und numerische Mathematik, *Berlin—Göttingen—Heidelberg* 1964.

[3] I. P. NATANSON, Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen, *Berlin* 1954.

(Eingegangen am 20. Juni 1968.)