Zur Theorie der Lagrange-Funktionen

Von I. MAKAI (Debrecen)

Einleitung

In der mathematischen Behandlung der allgemeinen Naturgesetze spielt eine wichtige Rolle die Theorie der Lagrangeschen (s. z. B. A. NIJENHUIS [17], S. 151., J. A. SCHOUTEN [24], S. 112.), oder Hamiltonschen (s. z. B. A. S. EDDINGTON [6], S. 206.) Ableitung der Lagrange-Funktionen, die über einem Gebiet G der n-dimensionalen Mannigfaltigkeit X_n (in Terminologie der Theorie der geometrischen Objekten, s. z. B. J. ACZÉL—ST. GOŁĄB [1]) solche Differentialkomitanten endlicher Ordnung gewisser Grundobjektenfelder (z. B. eines affinen Zusammenhangs Γ^{*i}_{jk}, oder eines metrischen Fundamentaltensors g_{ij}, oder der Vereinigungsobjekten gewisser differentialgeometrischen Objekten) sind, wie die Weylschen Dichten vom Gewichte $+1$ (oder, in Terminologie von J. A. SCHOUTEN [24] „scalar Δ-densities of weight $+1$") sein sollen. In der heutigen mathematischen Literatur können wir neue Ergebnisse finden, die sich auch auf die funktionale Gestalt der Lagrange-Funktionen beziehen (s. z. B. H. RUND [21], [22], [23], J. C. DU PLESSIS [19], [20]).

Das Hauptziel dieser Arbeit ist die Charakterisierung, möglichst die Bestimmung der funktionalen Gestalt der Lagrange-Funktion mit wenigstens Regularitätsannahmen in gewissen Spezialfällen. Wir werden z. B. ein neuer Beweis eines bekannten Satzes von E. NOETHER geben, der die Abhängigkeit der Lagrange-Funktion vom metrischen Fundamentaltensor ausdrückt (s. E. NOETHER [18], R. WEITZENBÖCK [27], A. S. EDDINGTON [6], H. RUND [22]). In den Bezeichnungen werden wir möglichst die Arbeiten von H. RUND ([21], [22], [23]) und J. C. DU PLESSIS ([19], [20]) folgen.

Es sei ein *differentialgeometrisches Objektenfeld r-ter Klasse* ($r \geqq 0$, s. [1], S. 15—16.)

$$\psi_\alpha = \psi_\alpha(x^j) \qquad (\alpha = 1, \dots N)$$

in einem Gebiet G der Mannigfaltigkeit X_n gegeben, wo x^j die lokalen Koordinaten der Punkten des Gebietes G bezeichnet. Nehmen wir an, daß die Funktionen ψ_α ($\alpha = 1, \dots N$) in G stetige partielle Ableitungen einschließend bis K-ter Ordnung besitzen, wo K eine natürliche Zahl ist. Wir bezeichnen diese Ableitungen mit

$$\psi_{\alpha, i_1 \dots i_k} \overset{\text{df}}{=} \frac{\partial^K \psi_\alpha}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_k}}. \qquad (k = 1, \dots K)$$

Aus unseren Voraussetzungen folgt, daß das Objekt ψ_α bezüglich der zulässigen

Koordinatentransformationen wenigstens $r+K$-ter Regularitätsklasse

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^j) \tag{1}$$

$$\left(\det\left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}\right) \neq 0; \qquad B^i_{j_1 \dots j_p} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \frac{\partial^p x^i}{\partial \bar{x}^{j_1} \dots \partial \bar{x}^{j_p}}, \right.$$

$$\left. \bar{B}^i_{j_1 \dots j_p} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \frac{\partial^p \bar{x}^i}{\partial x^{j_1} \dots \partial x^{j_p}}, \qquad p = 1, 2, \dots r+K \right)$$

eine (bestimmte) Transformationsformel von der Gestalt

$$\bar{\psi}_\alpha = \bar{\psi}_\alpha(\bar{x}^i) = \Psi_\alpha(\psi_1, \dots \psi_N, B^i_j, B^i_{j_1 j_2}, \dots B^i_{j_1 \dots j_r}) \qquad (\alpha = 1, \dots N)$$

hat. Wenn Ψ_α $(\alpha = 1, \dots N)$ in allen ihren Veränderlichen stetige partielle Ableitungen bis K-ter Ordnung besitzt, so bietet das Funktionensystem

$$\{\psi_\alpha; \psi_{\alpha, i_1}; \dots \psi_{\alpha, i_1 \dots i_k}\} \qquad (1 \leqq k \leqq K) \tag{2}$$

wieder ein differentialgeometrisches Objekt (höchstens $r+k$-ter Klasse). Die Transformationsformel dieses Objektes kann allein mit Hilfe des Funktionensystems $\bar{\psi}_\alpha$ bestimmt werden.

Es sei noch ein differentialgeometrisches Objekt erster Klasse $\mathscr{L}_\lambda$ $(\lambda = 1, \dots L)$ in G erklärt, so daß $\mathscr{L}_\lambda$ eine (algebraische) *Komitante* (s. [1], S. 16.) des Objektes (2), d. h. eine *Differentialkomitante k-ter Ordnung* von ψ_α (s. [1], S. 17.).

$$\mathscr{L}_\lambda = \Phi_\lambda(\psi_\alpha; \psi_{\alpha, i_1}; \dots \psi_{\alpha, i_1 \dots i_k}) \tag{3}$$

ist. Die Funktionen Φ_λ sollen gegenüber den Koordinatentransformationen invariant sein, die Gleichung (3) soll also in jedem Koordinatensystem $(\bar{x}^j)$ bestehen

$$\bar{\mathscr{L}}_\lambda = \Phi_\lambda(\bar{\psi}_\alpha; \bar{\psi}_{\alpha, i_1}; \dots \bar{\psi}_{\alpha, i_1 \dots i_k}),$$

wo die Koordinaten $\bar{x}^j$ mit der Koordinaten x^i nach (1) verknüpft sind. Schreibt man die Transformationsformel von $\mathscr{L}_\lambda$ in der Form

$$\bar{\mathscr{L}}_\lambda = \Lambda_\lambda(\mathscr{L}_1, \dots \mathscr{L}_L, B^i_j),$$

so folgen die Identitäten

$$\Phi_\lambda(\bar{\psi}_\alpha; \bar{\psi}_{\alpha, i_1}; \dots \bar{\psi}_{\alpha, i_1 \dots i_k}) = \Lambda_\lambda\big(\Phi_\mu(\psi_\alpha; \psi_{\alpha, i_1}; \dots \psi_{\alpha, i_1 \dots i_k};), B^i_j\big), \tag{4}$$

die man als weitere Voraussetzung bezüglich der Transformationsformel von $\mathscr{L}_\lambda$ auffassen kann.

Ist $L = 1$ und hat die Funktion $\Lambda = \Lambda_1$ die Gestalt

$$\Lambda(\mathscr{L}, B^i_j) = |\det(B^i_j)| \mathscr{L}$$

so werden wir das Objekt $\mathscr{L}$ *Lagrange-Funktion k-ter Ordnung bezüglich des Objektes* ψ_α nennen. (Eine Lagrange-Funktion soll daher eine Weylsche Dichte vom Gewichte $+1$ sein.) Die Identität (4) lautet in diesem Fall

$$\Phi(\bar{\psi}_\alpha; \bar{\psi}_{\alpha, 1}; \dots \bar{\psi}_{\alpha, i_1 \dots i_k}) = |\det(B^i_j)| \Phi(\psi_\alpha; \dots \psi_{\alpha, i_1 \dots i_k}). \tag{5}$$

Wir bemerken, daß sich die soeben gegebene Definition der Lagrange-Funktion von der von H. Rund ([22], S. 243—245.) herrührenden Definition der Lagrange-

Funktion in gewissen Einzelheiten unterscheidet. Wir setzen keine Regularitätsannahme bezüglich der funktionalen Gestalt der Lagrange-Funktion voraus, dagegen ist die Unabhängigkeit der Lagrange-Funktion von den Koordinaten x^i als getrennten Variablen erfordert (s. die Bemerkungen z. B. am Ende der Paragraphen 1. und 2. dieser Arbeit).

Mit Rücksicht darauf, daß die Identität (5) in einem beliebigen fixen Punkt x_0^i von G in eine Identität von der Form

$$\Phi(\bar{\psi}_\alpha; \bar{\psi}_{\alpha,i_1}; \dots \bar{\psi}_{\alpha,i_1\dots i_k}) = |\det(B_j^i)|\,\Phi(\psi_\alpha; \dots \psi_{\alpha,i_1\dots i_k}) \qquad (x^i = x_0^i) \tag{6}$$

übergeht, die als Funktionalgleichung bezüglich der Lagrange-Funktion $\mathscr{L} = \Phi$ mit freien Parametern B_j^i $(\det(B_j^i) \neq 0)$, $B_{j_1 j_2}^i, \dots, B_{j_1 \dots j_{r+k}}^i$ aufgefaßt werden kann, können wir die Methoden der Theorie der Funktionalgleichungen zur Untersuchung der Lagrange-Funktion jeweils verwenden.

§ 1. Lagrange-Funktionen über X_1

Es seien $u = u(x)$, $u_\alpha = u_\alpha(x)$ kovariante, $v = v(x)$, $v_\alpha = v_\alpha(x)$ kontravariante Vektorfelder $(\alpha = 1, \dots, N)$, so daß die Funktionen $u(x)$, $u_\alpha(x)$, $v(x)$, $v_\alpha(x)$ über X_1 k-mal differenzierbar sind. Wir bezeichnen die Ableitungen von $u(x)$, $u_\alpha(x)$, $v(x)$, $v_\alpha(x)$ mit

$$u', u'', \dots u^{(k)}, u'_\alpha, u''_\alpha, \dots u_\alpha^{(k)},$$
$$v', v'', \dots v^{(k)}, v'_\alpha, v''_\alpha, \dots v_\alpha^{(k)}.$$

Wir werden in diesem Paragraphen solche Lagrange-Funktionen untersuchen, die die Gestalt

$$L = L_1(u, u', \dots u^{(k)}),$$
$$L = L_2(v, v', \dots v^{(k)}),$$
$$L = L_3(u, u', \dots u^{(k)}, v, v', \dots v^{(k)}),$$
$$L = L_4(u, u', \dots u^{(k)}, u_\alpha, u'_\alpha, \dots u_\alpha^{(k)}),$$
$$L = L_5(v, v', \dots v^{(k)}, v_\alpha, v'_\alpha, \dots v_\alpha^{(k)})$$

haben. Die Nachstehenden bieten die Verallgemeinerungen der Ergebnisse von G. Knapecz ([8]) und des Verfassers ([13]).

Mit Anwendung der Bezeichnungen

$$\beta_i \overset{\text{df}}{=} B^1_{\underbrace{1\dots 1}_{i\text{-mal}}} = \frac{d^i x}{d\bar{x}^i}, \qquad \bar{\beta}_i \overset{\text{df}}{=} \bar{B}^1_{\underbrace{1\dots 1}_{i\text{-mal}}} = \frac{d^i \bar{x}}{dx^i},$$

$$\bar{u}^{(j)} \overset{\text{df}}{=} \frac{d^j \bar{u}}{d\bar{x}^j}, \qquad \bar{u}_\alpha^{(j)} \overset{\text{df}}{=} \frac{d^j \bar{u}_\alpha}{d\bar{x}^j},$$

$$\bar{v}^{(j)} \overset{\text{df}}{=} \frac{d^j \bar{v}}{d\bar{x}^j}, \qquad \bar{v}_\alpha^{(j)} \overset{\text{df}}{=} \frac{d^j \bar{v}_\alpha}{d\bar{x}^j},$$

$$(i = 1, 2, \dots k+1,\ j = 0, 1, 2, \dots k)$$

beweisen wir vor allem zwei Hilfssätze.

Hilfssatz 1. *Es gelten die Relationen*

$$\bar{u} = \beta_1 u,$$

$$(7)\qquad \begin{cases} \bar{u}' = \beta_2 u + \beta_1^2 u', \\ \bar{u}'' = \beta_3 u + 3\beta_1 \beta_2 u' + \beta_1^3 u'', \\ \bar{u}''' = \beta_4 u + 4\beta_1 \beta_3 u' + (3\beta_2^2 u' + 6\beta_1^2 \beta_2 u'') + \beta_1^4 u''', \end{cases}$$

und für jedes i $(2 \leqq i \leqq k)$

$$(8)\qquad \bar{u}^{(i)} = \beta_{i+1} u + (i+1)\beta_1 \beta_i u' + \sum_{p=1}^{i-1} P_p^i(\beta_1, \beta_2, \dots \beta_{p+1}) u^{(i-p)} + \beta_1^{i+1} u^{(i)},$$

wo P_p^i *homogene Polynome von* $\beta_2, \dots, \beta_{p+1}$ *sind.*

Beweis. (7) kann man durch Differenzieren verifizieren. Wir durchführen den Beweis durch Induktion. Nach (7) ist (8) für $i=2$ gültig. Vorausgesetzt, daß die Gleichung (8) für ein i schon gültig ist, derivieren wir (8) bezüglich x:

$$(9)\qquad \begin{cases} \bar{u}^{(i+1)} = \beta_{i+2} u + (i+2)\beta_1 \beta_{i+1} u' + (i+1)\beta_2 \beta_i u' + (i+1)\beta_1^2 \beta_i u'' + \\ \qquad + \sum_{p=1}^{i-1} \left(\sum_{q=1}^{p+1} \frac{\partial P_p^i}{\partial \beta_q} \beta_{q+1} u^{(i-p)} + \beta_1 P_p^i u^{(i+1-p)} \right) + (i+1)\beta_1^i \beta_2 u^{(i)} + \beta_1^{i+2} u^{(i+1)}, \end{cases}$$

und wir sehen, daß (9) mit den Bezeichnungen

$$(10)\qquad \begin{cases} P_1^{i+1} \overset{\text{df}}{=} (i+1)\beta_1^i \beta_2 + \beta_1 P_1^i, \\ P_r^{i+1} \overset{\text{df}}{=} \beta_1 P_r^i + \sum_{q=1}^{r} \frac{\partial P_{r-1}^i}{\partial \beta_q} \beta_{q+1} \qquad (1 < r < i), \\ P_i^{i+1} \overset{\text{df}}{=} (i+1)\beta_2 \beta_i + \sum_{q=1}^{i} \frac{\partial P_{i-1}^i}{\partial \beta_q} \beta_{q+1} \end{cases}$$

ein Formel von der Gestalt (8) ist, womit der Induktionsbeweis beendet ist.

Hilfssatz 2. *Es gelten die Relationen:*

$$(11)\qquad \begin{aligned} v &= \beta_1 \bar{v}, \\ v' &= \bar{\beta}_1 \beta_2 \bar{v} + \bar{v}', \\ v'' &= \bar{\beta}_1^2 \beta_3 \bar{v} + \bar{\beta}_2 \beta_2 \bar{v} + \bar{\beta}_1^2 \beta_2 \bar{v}' + \beta_1 \bar{v}'', \\ v''' &= \bar{\beta}_1^3 \beta_4 \bar{v} + (3\bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 \beta_3 + \beta_2 \bar{\beta}_3)\bar{v} + (3\bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 \beta_2 + 2\bar{\beta}_1^3 \beta_3)\bar{v}' + (\bar{\beta}_2 + \bar{\beta}_1^3 \beta_2)\bar{v}'' + \bar{\beta}_1^2 \bar{v}''' \end{aligned}$$

und für jedes i $(2 \leqq i \leqq k)$ *gilt*

$$(12)\qquad v^{(i)} = \bar{\beta}_1^i \beta_{i+1} \bar{v} + \sum_{p=1}^{i} Q_p^i(\bar{\beta}_1, \beta_2, \bar{\beta}_2, \dots \beta_{p+1}, \bar{\beta}_{p+1}) \bar{v}^{(i-p)} + \bar{\beta}_1^{i-1} \bar{v}^{(i)},$$

wo Q_p^i *homogene Polynome von* $\beta_2, \bar{\beta}_2, \dots, \beta_{p+1}, \bar{\beta}_{p+1}$ *sind.*

BEWEIS. Dies ist dem Beweis des Hilfssatzes 1 analog, wenn wir (8) bezüglich x derivieren. (Der Formel (9), bzw. (10) entspricht die Formel

$$v^{(i+1)} = \bar{\beta}_1^{i+1}\beta_{i+2}\bar{v} + i\bar{\beta}_1^{i-1}\bar{\beta}_2\beta_{i+1}\bar{v} + \bar{\beta}_1^{i+1}\beta_{i+1}\bar{v}' +$$
$$+ \sum_{p=1}^{i}\left[\bar{v}^{(i+1-p)}\bar{\beta}_1 Q_p^i + \bar{v}^{(i-p)}\sum_{q=2}^{p+1}\left(\frac{\partial Q_p^i}{\partial\beta_q}\bar{\beta}_1\beta_{q+1} + \frac{\partial Q_p^i}{\partial\bar{\beta}_q}\bar{\beta}_{q+1}\right) + \bar{v}^{(i-p)}\frac{\partial Q_p^i}{\partial\bar{\beta}_1}\bar{\beta}_2\right] +$$
$$+ (i-1)\bar{\beta}_1^{i-2}\bar{\beta}_2\bar{v}^{(i)} + \bar{\beta}_1^i\bar{v}^{(i+1)}$$

bzw.

$$Q_1^{i+1} \overset{\text{df}}{=} \bar{\beta}_1 Q_1^i + (i-1)\bar{\beta}_1^{i-2}\bar{\beta}_2,$$

$$Q_r^{i+1} \overset{\text{df}}{=} \delta_{ri}\bar{\beta}_1^{i+1}\beta_{i+1} + \bar{\beta}_1 Q_r^i + \sum_{q=2}^{r}\left(\frac{\partial Q_{r-1}^i}{\partial\beta_q}\bar{\beta}_1\beta_{q+1} + \frac{\partial Q_{r-1}^i}{\partial\bar{\beta}_q}\bar{\beta}_{q+1}\right) + \frac{\partial Q_{r-1}^i}{\partial\bar{\beta}_1}\bar{\beta}_2$$
$$(1 < r < i+1),$$

$$Q_{i+1}^{i+1} \overset{\text{df}}{=} i\bar{\beta}_1^{i-1}\bar{\beta}_2\beta_{i+1} + \sum_{q=2}^{i+1}\left(\frac{\partial Q_i^i}{\partial\beta_q}\bar{\beta}_1\beta_{q+1} + \frac{\partial Q_i^i}{\partial\bar{\beta}_q}\bar{\beta}_{q+1}\right) + \frac{\partial Q_i^i}{\partial\bar{\beta}_1}\bar{\beta}_2.)$$

Wir beweisen nachher den folgenden

Satz 1. *Die allgemeinste Form der Lagrange-Funktion*

$$L = L_1(u, u', \dots u^{(k)}) \qquad (u \neq 0)$$

bzw.

$$L = L_2(v, v' \dots v^{(k)}) \qquad (v \neq 0)$$

ist

$$L_1 = c_1|u|$$

bzw.

$$L_2 = c_2|v|^{-1},$$

wo c_1 und c_2 beliebige konstante Skalarenfaktoren sind.

BEWEIS. Die Gleichheit (6) geht in diesen Fällen in

(13.1) $$L_1(\bar{u}, \bar{u}', \bar{u}'', \dots \bar{u}^{(k)}) = |\beta_1| L_1(u, u', u'', \dots u^{(k)})$$
bzw.
(13.2) $$L_2(\bar{v}, \bar{v}', \bar{v}'', \dots \bar{v}^{(k)}) = |\beta_1| L_2(v, v', v'', \dots v^{(k)})$$

über. Es seien hier die Parameter $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k, \beta_{k+1}$ nach

$$\beta_1 = 1, \quad \beta_2 = \dots = \beta_k = 0$$

gewählt, somit gelten

$$\bar{\beta}_1 = 1, \quad \bar{\beta}_2 = \dots = \bar{\beta}_k = 0, \quad \bar{\beta}_{k+1} = -\beta_{k+1}$$

(vgl. [1], S. 26., Korollar 3), und wir erhalten wegen (7) und (8), bzw. (11) und (12) die Gleichungen

(14.1) $$L_1(u, u', \dots u^{(k-1)}, u^{(k)} + \beta_{k+1}u) = L_1(u, u', \dots u^{(k)})$$
bzw.
(14.2) $$L_2(v, v', \dots v^{(k-1)}, v^{(k)} - \beta_{k+1}v) = L_2(v, v', \dots v^{(k)}).$$

Setzen wir jetzt in (14. 1)

$$\beta_{k+1} = -\frac{u^{(k)}}{u}$$

bzw. in (14. 2)

$$\beta_{k+1} = \frac{v^{(k)}}{v},$$

so folgt

$$L_1(u, u', \dots u^{(k-1)}, 0) = L_1(u, u', \dots u^{(k-1)}, u^{(k)}) \tag{14.3}$$

bzw.

$$L_2(v, v', \dots v^{(k-1)}, 0) = L_2(v, v', \dots v^{(k-1)}, v^{(k)}), \tag{14.4}$$

d. h. die Funktion L_1 bzw. L_2 ist von ihren Veränderlichen $u^{(k)}$ bzw. $v^{(k)}$ unabhängig ($k \geqq 1$). Nach k-maliger Wiederholung des Verfahrens, das aus (14. 1) bzw. (14. 2) zu (14. 3) bzw. zu (14. 4) geführt hat, können wir feststellen, daß L_1 bzw. L_2 allein von u bzw. v abhängt:

$$L_1 = L_1(u)$$

bzw.

$$L_2 = L_2(v).$$

Setzen wir diese Gestalt der Lagrange-Funktionen in (13. 1) bzw. (13. 2) ein, so bekommem wir

$$L_1(\beta_1 u) = |\beta_1| L_1(u)$$

bzw.

$$L_2(\beta_1^1 v) = |\beta_1| L_2(v),$$

und es folgt hieraus mit $\beta_1 = u^{-1}$ bzw. $\beta_1 = v$

$$L_1(u) = c_1 |u|, \qquad (c_1 \overset{\mathrm{df}}{=} L_1(1)) \tag{15.1}$$

bzw.

$$L_2(v) = c_2 |v|^{-1}, \quad (c_2 \overset{\mathrm{df}}{=} L_2(1)). \tag{15.2}$$

Mann kann sich leicht überzeugen, daß die Lagrange-Funktion (15. 1) bzw. (15. 2) mit *beliebigem* Skalarenfaktor c_1 bzw. c_2 der Forderung (13. 1) bzw. (13. 2) genügt.

Für die Struktur der Funktion L_3 gilt der folgende

Satz 2. *Die allgemeinste Form der Lagrange-Funktion*

$$L = L_3(u, u', \dots u^{(k)}, v, v', \dots v^{(k)}) \qquad (v \neq 0)$$

ist

$$L_3 = L_3^0(u, u_1, u_2, \dots u_k, v),$$

wo

$$u_1 \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{d}{dx}(vu), \quad u_{i+1} \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{d}{dx}(vu_i) \qquad (i = 1, 2, \dots k-1)$$

kovariante Vektorfelder sind, und die Funktion L_3^0 soll in ihren Veränderlichen im folgenden Sinne homogen sein:

$$L_3^0(tu, tu_1, tu_2, \dots tu_k, t^{-1}v) = |t| L_3^0(u, u_1, u_2, \dots u_k, v) \tag{16}$$

(wo $t \neq 0$, sonst aber t ein beliebiger Skalar ist).

Beweis. Die Funktion L_3 soll nach (6) der Funktionalgleichung

$$L_3(\bar{u}, \bar{u}', \dots \bar{u}^{(k)}, \bar{v}, \bar{v}', \dots \bar{v}^{(k)}) = |\beta_1| L_3(u, \dots u^{(k)}, v, \dots v^{(k)}) \tag{17}$$

genügen, woraus man durch die Substitution

$$\beta_1 = 1, \beta_3 = \dots = \beta_k = \beta_{k+1} = 0,$$

d. h.

$$\bar{\beta}_1 = 1, \bar{\beta}_3 = \dots = \bar{\beta}_k = \bar{\beta}_{k+1} = 0$$

(vgl. [1], S. 26., Korollar 3) wegen der Hilfssätze 1 und 2 die Identität

$$L_3(u, u' + \beta_2 u, u'' + 3\beta_2 u', \dots v, v' - \beta_2 v, v'' - \beta_2 v' + 2\beta_2^2 v, \dots) = L_3(u, u', \dots v, v', \dots) \tag{18}$$

erhalten kann. Es sei in (18)

$$\beta_2 = \frac{v'}{v}, \tag{19}$$

so folgen

$$u' + \beta_2 u = \frac{1}{v} u_1,$$

$$v' - \beta_2 v = 0,$$

bzw. (wegen

$$u' = \frac{1}{v}(u_1 - uv') \equiv \varphi_1(u, u_1, v, v'), \tag{20}$$

wo φ_1 Polynom von $u, u_1, \frac{1}{v}, v'$ ist) bezüglich $u'', \dots, u^{(k)}$ die folgenden Ausdrücke

$$\begin{cases} u'' = \varphi_2(u, u_1, u_1', v, v', v'') \\ \vdots \\ u^{(k)} = \varphi_k(u, u_1, u_1', \dots u_1^{(k-1)}, v, v', \dots v^{(k)}) \end{cases} \tag{21}$$

(wo $\varphi_2, \dots, \varphi_k$ wieder Polynome von $u, u_1, \dots, u_1^{(k-1)}, \frac{1}{v}, v', \dots v^{(k)}$ sind). Wir bekommen aus (18) (wegen (20) und (21)) eine Identität vom Typ

$$L_3 = L_3^*(u, u_1, u_1', \dots u_1^{(k-1)}, v, v', \dots v^{(k-1)}, v^{(k)}).$$

Setzen wir diese Form von L_3 in (17) ein und wählen wir die Parameter $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_k, \beta_{k+1}$ nach

$$\beta_1 = 1, \beta_2 = \dots = \beta_k = 0, \beta_{k+1} = \frac{v^{(k)}}{v},$$

so kann man sehen, daß die Funktion L_3^* von ihrer separierten Veränderliche $v^{(k)}$ unabhängig ist:

$$L_3 = L_3^1(u, u_1, u_1', \dots u_1^{(k-1)}, v, v', \dots v^{(k-1)}).$$

Mit Wiederholen unseres obigen Verfahrens gewinnen wir schrittweise die folgenden Ausdrücke bezüglich L_3:

$$\begin{aligned}
L_3 &= L_3^{1*}(u, u_1, u_2, u_2', \dots u_2^{(k-2)}, v, v', \dots v^{(k-1)}), \\
L_3 &= L_3^{2*}(u, u_1, u_2, u_2', \dots u_2^{(k-2)}, v, v', \dots v^{(k-2)}); \\
&\vdots \\
L_3 &= L_3^{(k-1)*}(u, u_1, u_2, \dots u_{k-1}, u_k, v, v'), \\
L_3 &= L_3^0(u, u_1, u_2, \dots u_k, v).
\end{aligned}$$

Wenn wir diese letzte Form von L_3 in (17) einsetzen und wir den Parameter β_1 nach

$$t \overset{\mathrm{df}}{=} \beta_1 \quad (\neq 0, \text{ sonst ein beliebiger Wert})$$

bezeichnen, so bekommen wir die Identität (16) als einzige Forderung bezüglich der Funktion L_3^0, w. z. b. w.

Auf analoge Weise können wir die folgenden Sätze beweisen:

Satz 3. *Die Lagrange-Funktion*

$$L = L_4(u, u', \dots u^{(k)}, u_\alpha, u_\alpha', \dots u_\alpha^{(k)})$$

ist, falls $u \neq 0$, eine invariante Funktion der folgenden Größen

$$u, \underset{1}{u_\alpha}, \dots \underset{k}{u_\alpha}, \underset{1}{\sigma_\alpha}, \underset{2}{\sigma_\alpha}, \dots \underset{k}{\sigma_\alpha},$$

wo

$$\underset{1}{\sigma_\alpha} \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{u_\alpha}{u}, \qquad \underset{1}{u_\alpha} \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{d}{dx} \underset{1}{\sigma_\alpha},$$

$$\underset{i+1}{\sigma_\alpha} \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\underset{i}{u_\alpha}}{u}, \qquad \underset{i+1}{u_\alpha} \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{d}{dx} \underset{i+1}{\sigma_\alpha} \qquad (i=1, \dots k-1)$$

ist ($u, \underset{1}{u_\alpha}, \dots, \underset{k}{u_\alpha}$ sind kovariante Vektorfelder, $\underset{1}{\sigma_\alpha}, \dots, \underset{k}{\sigma_\alpha}$ sind Skalarfelder).

Satz 4. *Die allgemeinste Form der Lagrange-Funktion L_5 ist im Fall $v \neq 0$:*

$$L_5 = L_5^0\Big(v, v_\alpha, \underset{1}{v_\alpha}, \dots \underset{k}{v_\alpha}, \underset{1}{\textstyle\sum_\alpha}, \underset{2}{\textstyle\sum_\alpha}, \dots \underset{k}{\textstyle\sum_\alpha}\Big),$$

wo

$$\underset{1}{\textstyle\sum_\alpha} \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{v_\alpha}{v}, \qquad \underset{1}{v_\alpha} \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{d}{dx} \underset{1}{\textstyle\sum_\alpha},$$

$$\underset{i+1}{\textstyle\sum_\alpha} \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\underset{i}{v_\alpha}}{v}, \qquad \underset{i+1}{v_\alpha} \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{d}{dx} \underset{i+1}{\textstyle\sum_\alpha} \qquad (i=1, \dots k-1)$$

ist ($\underset{1}{v_\alpha}, \dots, \underset{k}{v_\alpha}$ sind kontravariante Vektorfelder, $\underset{1}{\textstyle\sum_\alpha}, \dots, \underset{k}{\textstyle\sum_\alpha}$ sind Skalarfelder), *und L_5^0 ist eine beliebige, in ihren Veränderlichen $v, v_\alpha, \underset{1}{v}_\alpha, \dots, \underset{k}{v}_\alpha$ im folgenden Sinne homogene Funktion:*

$$L_5^0\left(tv, tv_\alpha, t\underset{1}{v}_\alpha, \dots t\underset{k}{v}_\alpha, \underset{1}{\sum}_\alpha, \dots \underset{k}{\sum}_\alpha\right) = |t|\, L_5^0\left(v, v_\alpha, \dots \underset{k}{\sum}_\alpha\right)$$

(t ist ein beliebiger, von Null verschiedener Skalar).

Wir beweisen hier nur den Satz 3, der Beweis des Satzes 4 kann man ähnlicherweise durchführen.

Die Funktion L_4 soll (nach (6)) die Gleichung

$$L_4(\bar{u}, \bar{u}', \dots \bar{u}^{(k)}, \bar{u}_\alpha, \bar{u}'_\alpha, \dots \bar{u}_\alpha^{(k)}) = |\beta_1|\, L_4(u, u', \dots u_\alpha^{(k)}) \tag{22}$$

befriedigen. Setzen wir hier

$$\beta_1 = 1, \quad \beta_2 = -\frac{u'}{u}, \quad \beta_3 = \dots = \beta_{k+1} = 0$$

ein, so erhalten wir an der linken Seite von (22) wegen

$$u_\alpha = u\underset{1}{\sigma}_\alpha, \quad u'_\alpha = u'\underset{1}{\sigma}_\alpha + u\underset{1}{\sigma}'_\alpha, \dots \underset{\alpha}{u}^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} u^{(i)} \underset{1}{\sigma}_\alpha^{(k-i)}$$

einen Ausdruck, der nur von $u, u', \dots, u^{(k)}, \underset{1}{\sigma}_\alpha, \underset{1}{u}_\alpha, \underset{1}{u}'_\alpha, \dots, \underset{1}{u}_\alpha^{(k-1)}$ abhängt:

$$L_4 = L_4^{1*}\left(u, u' \dots u^{(k)}, \underset{1}{\sigma}_\alpha, \underset{1}{u}_\alpha, \underset{1}{u}'_\alpha, \dots \underset{1}{u}_\alpha^{(k-1)}\right).$$

Es sei jetzt L_4^{1*} in (22) eingesetzt, und es seien danach in (22) die Parameter $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{k+1}$ nach

$$\beta_1 = 1, \quad \beta_2 = \dots = \beta_k = 0, \quad \beta_{k+1} = -\frac{u^{(k)}}{u}$$

gewählt, so kann man sehen, daß L_4 von $u^{(k)}$ unabhängig ist:

$$L_4 = L_4^1\left(u, u', \dots u^{(k-1)}, \underset{1}{\sigma}_\alpha, \underset{1}{u}_\alpha, \underset{1}{u}'_\alpha, \dots \underset{1}{u}_\alpha^{(k-1)}\right).$$

Nach $k-1$-maligen Wiederholung dieses Verfahrens bekommen wir

$$L_4 = L_4^0\left(u, \underset{1}{u}_\alpha, \underset{2}{u}_\alpha, \dots \underset{k}{u}_\alpha, \underset{1}{\sigma}_\alpha, \underset{2}{\sigma}_\alpha, \dots \underset{k}{\sigma}_\alpha\right).$$

Die Funktion L_4^0 soll wieder der Gleichung (22) genügen:

$$L_4^0\left(\beta_1 u, \beta_1 \underset{1}{u}_\alpha, \beta_1 \underset{k}{u}_\alpha, \underset{1}{\sigma}_\alpha, \dots \underset{k}{\sigma}_\alpha\right) = |\beta_1|\, L_4^0\left(u, \underset{1}{u}_\alpha, \dots \underset{k}{\sigma}_\alpha\right),$$

wo man den Wert $t = \beta_1 (\neq 0)$ beliebig wählen kann. Die Funktion L_4^0 ist folglich in ihren Veränderlichen $u, \underset{1}{u}_\alpha, \dots, \underset{k}{u}_\alpha$ im folgenden Sinne homogen:

$$L_4^0\left(tu, t\underset{1}{u}_\alpha, \dots t\underset{k}{u}_\alpha, \underset{1}{\sigma}_\alpha, \dots \underset{k}{\sigma}_\alpha\right) = |t|\, L_4^0\left(u, \dots \underset{k}{\sigma}_\alpha\right) \tag{23}$$

$(t \neq 0)$. Umgekehrt, man kann einsehen, daß eine beliebig gewählte, im Sinne (23) homogene Funktion der Größen $u, \underset{1}{u}_\alpha, \dots, \underset{k}{u}_\alpha, \underset{1}{\sigma}_\alpha, \dots, \underset{k}{\sigma}_\alpha$ eine Lösung der Funktionalgleichung (22) ist.

Bemerkungen.

H. Rund hat in seiner Arbeit [22] (S. 245) die Lagrange-Funktion der Gestalt

$$L = L_6(x, s_m, s_m', s_m'')$$

als Beispiel untersucht, wo $s_m = s_m(x)$ $(m = 1, \dots, N)$ Skalaren sind. Mit Hilfe der „Invarianzbedingung"

$$\bar{L}_6(\bar{x}, \bar{s}_m, \bar{s}_m', \bar{s}_m'') = |\beta_1| L_6(x, s_m, s_m', s_m'') \tag{24}$$

(vgl. [22], (1. 6)) können wir zuerst einsehen, daß die Funktion L_6 von ihrer Veränderliche x unabhängig ist. (Wir wählen aus diesem Zwecke die Koordinatentransformation $\bar{x} = \bar{x}(x)$ nach

$$\bar{x} = x + \xi,$$

wo ξ ein *beliebiger* Wert ist, somit bekommen wir aus (24) wegen $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 0$ die Beziehung

$$L_6(x + \xi, s_m, s_m', s_m'') = L_6(x, s_m, s_m', s_m''),$$

die zeigt, daß L_6 von ihrer Veränderliche x tatsächlich unabhängig ist.) Die Größen s_m' sind kovariante Vektorfelder

$$u_m \overset{\mathrm{df}}{=} s_m' \quad (m = 1, \dots N)$$

und L_6 besitzt die Form

$$L_6 = L_6(s_m, u_m, u_m').$$

Es ist klar, daß unser Satz 3 auch im Falle gültig ist, in dem die Funktion L_4 auch von weiteren Skalarfelder S_m abhängt (das entsprechende Resultat wäre

$$L_4 = L_4^0(u, \underset{1}{u}_\alpha, \dots \underset{k}{u}_\alpha, \underset{1}{\sigma}_\alpha, \dots \underset{k}{\sigma}_\alpha, s_m),$$

wo die Funktion L_4^0 in ihren Veränderlichen $u, \underset{1}{u}_\alpha, \dots, \underset{k}{u}_\alpha$ im Sinne (23) homogen ist), folglich kann L_6 z. B. falls $u_1 \neq 0$ die allgemeinste Gestalt

$$L_6 = L_6^0(s_m, u_1, u_\gamma, \underset{1}{u}_\gamma, \underset{1}{\sigma}_\gamma) \qquad \left(\underset{1}{\sigma}_\gamma \overset{\mathrm{df}}{=} (u_1)^{-1} u_\gamma,\ \underset{1}{u}_\gamma \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{d}{dx} \underset{1}{\sigma}_\gamma,\ \gamma = 2, \dots N\right)$$

mit der Homogenitätsbedingung

$$L_6(s_m, tu_1, tu_\gamma, t\underset{1}{u}_\gamma, \underset{1}{\sigma}_\gamma) = |t| L_6(s_m, u_1, \dots \underset{1}{\sigma}_\gamma) \qquad (t \neq 0)$$

besitzen.

§ 2. Über Lagrange-Funktionen, die Komitanten kovarianter Vektorfelder in X_n sind

Es sei ein System von kovarianten Vektorfeldern $\overset{\alpha}{u}_i$ $(\alpha=1, \ldots, p, p \leqq n)$ mit seinen partiellen Ableitungen $\overset{\alpha}{u}_{i,j}$ über einem Gebiet $G(\subseteqq X_n, n>1)$ erklärt und wir stellen uns zuerst die Aufgabe aus diesem System von kovarianten Vektorfeldern eine Differentialkomitante erster Ordnung $\mathscr{L}_\lambda$ $(\lambda=1, \ldots, N)$ aufzubauen. Es ist also $\mathscr{L}_\lambda$ von der Form:

$$\mathscr{L}_\lambda = \Phi_\lambda(\overset{\alpha}{u}_i; \overset{\alpha}{u}_{i,j}), \qquad (\lambda=1, \ldots N)$$

und da $\mathscr{L}_\lambda$ ein Objekt erster Klasse ist, besteht:

$$\overline{\mathscr{L}}_\lambda = \Lambda_\lambda(\mathscr{L}_\mu, B^i_j).$$

Wir werden im folgenden Λ_λ als gegebenes, Φ_λ als gesuchtes Funktionensystem betrachten. Das System Φ_λ soll nach (4) in einem beliebigen fixen Punkt x^0_i $(\in G)$ der Funktionalgleichung

$$\Phi_\lambda(B^i_k \overset{\alpha}{u}_k, B^i_k B^m_j \overset{\alpha}{u}_{k,m} + B^k_{ij} \overset{\alpha}{u}_k) = \Lambda_\lambda(\Phi_\mu(\overset{\alpha}{u}_i; \overset{\alpha}{u}_{i,j}); B^i_j) \tag{25}$$

genügen. Natürlich sollen die Funktionen Λ_λ unter anderen auch die *Identitätsbedingung* (vgl. [1], S. 12.)

$$\Lambda_\lambda(\mathscr{L}_\mu; \delta^i_j) = \mathscr{L}_\lambda \tag{26}$$

befriedigen, wo δ^i_j das Kronecker-Symbol ist.

Setzen wir noch die lineare Unabhängigkeit der Vektorfelder $\overset{\alpha}{u}_i$ über G (d. h. die lineare Unabhängigkeit der Vektoren $\overset{\alpha}{u}_i(\xi_0)$ in jedem einzelnen Punkt ξ^i_0 von G) voraus.

Wir führen die Bezeichnungen

$$\overset{\beta}{T}_{ij} \overset{\mathrm{df}}{=} \overset{\beta}{u}_{[i,j]}, \quad \overset{\beta}{t}_{ij} \overset{\mathrm{df}}{=} \overset{\beta}{u}_{(i,j)}$$

ein und wir stellen fest, daß $\overset{\beta}{T}_{ij}$ ein rein kovarianter Tensor zweiter Stufe ist, bzw. für $\overset{\beta}{t}_{ij}$ die Relationen

$$\overset{\overline{\beta}}{t}_{ij} = B^k_i B^m_j \overset{\beta}{t}_{km} + B^m_{ij} \overset{\beta}{u}_m \tag{27}$$

gelten.

Nach diesen Vorbereitungen werden wir den folgenden Satz beweisen:

Satz 5. *Alle Objekte $\mathscr{L}_\lambda$ erster Klasse, die Differentialkomitanten erster Ordnung des Systems von linear unabhängigen kovarianten Vektorfeldern $\overset{\alpha}{u}_i$ $(\alpha=1, \ldots, p, p \leqq n)$ sind, müssen algebraische Komitanten der Vektorfelder $\overset{\alpha}{u}_i$ und der nach*

$$\overset{\beta}{T}_{ij} \overset{\mathrm{df}}{=} \overset{\alpha}{u}_{[i,j]}$$

definierten Tensorfelder sein.

BEWEIS. Es folgt aus den Relationen

$$\overset{\alpha}{u}_{i,j} = \overset{\alpha}{T}_{ij} + \overset{\alpha}{t}_{ij}; \quad \overset{\alpha}{T}_{ij} = \overset{\alpha}{u}_{[i,j]}, \quad \overset{\alpha}{t}_{ij} = \overset{\alpha}{u}_{(i,j)},$$

daß wir die Größen $\overset{\alpha}{T}_{ij}$, $\overset{\alpha}{t}_{ij}$ in dem Funktionensystem Φ_λ statt $\overset{\alpha}{u}_{i,j}$ als neue Veränderlichen auffassen können:

$$\Phi_\lambda = \Phi_\lambda(\overset{\alpha}{u}_i; \overset{\alpha}{T}_{ij}; \overset{\alpha}{t}_{ij})$$

und das Funktionalgleichungssystem (25) geht wegen (27) in

$$\Phi_\lambda(B_i^k \overset{\alpha}{u}_k; B_i^k B_j^m \overset{\alpha}{T}_{km}; B_i^k B_j^m \overset{\alpha}{t}_{km} + B_{ij}^m \overset{\alpha}{u}_m) = \Lambda_\lambda(\Phi_\mu(\overset{\alpha}{u}_i; \overset{\alpha}{T}_{ij}; \overset{\alpha}{t}_{ij}); B_j^i) \tag{28}$$

über. Setzen wir in (28) die Werte

$$B_j^i = \delta_j^i$$

ein, so folgt aus (28) wegen (26) die Identität

$$\Phi_\gamma(\overset{\alpha}{u}_i; \overset{\alpha}{T}_{ij}; \overset{\alpha}{t}_{ij} + B_{ij}^m \overset{\alpha}{u}_m) = \Phi_\lambda(\overset{\alpha}{u}_i; \overset{\alpha}{T}_{ij}; \overset{\alpha}{t}_{ij}), \tag{29}$$

wo $B_{ij}^m = B_{ji}^m$ beliebig gewählt werden kann.*)

Wegen der vorausgesetzten linearen Unabhängigkeit der Vektoren $\overset{\alpha}{u}_i = \overset{\alpha}{u}_i(x_0)$, hat das algebraische Gleichungssystem

$$\overset{\alpha}{t}_{ij} + B_{ij}^m \overset{\alpha}{u}_m = 0$$

bei jedem festen Wertepaar i, j bezüglich der „Unbekannten" B_{ij}^m mindestens eine Lösung:

$$B_{ij}^m = \overset{\circ}{B}{}_{ij}^m, \tag{30}$$

Setzen wir diese Werte von B_{ij}^m in (29) ein, so bekommen wir die Identität

$$\Phi_\lambda(\overset{\alpha}{u}_i; \overset{\alpha}{T}_{ij}; 0) = \Phi_\lambda(\overset{\alpha}{u}_i; \overset{\alpha}{T}_{ij}; \overset{\alpha}{t}_{ij}), \tag{30.1}$$

die eben den Satz 5 beweist.

Im speziellen erhielten wir auch den

Satz 6. *Jede Lagrange-Funktion von der Gestalt*

$$L = L(\overset{\alpha}{u}_i, \overset{\alpha}{u}_{i,j})$$

ist eine algebraische Komitante der Größen $\overset{\alpha}{u}_i$, $\overset{\alpha}{u}_{[i,j]}$ ($\alpha = 1, \ldots, p$, $\overset{\alpha}{u}_i$ *sind linear unabhängige Veltorfelder*).

*) Der hier folgende Beweis des Satzes 5 stammt von Herrn A. MOÓR; der ursprüngliche Beweis des Verfassers war wesentlich komplizierter.

Nimmt man an, daß die Vektorfelder $\overset{\alpha}{u}_i$ $(\alpha=1, \dots, p)$ mit Hilfe eines Systems von Skalarfelder $\overset{\alpha}{\sigma}$ als

$$\overset{\alpha}{u}_i \overset{\mathrm{df}}{=} \overset{\alpha}{\sigma}_{,i} \quad (\alpha=1, \dots p, i=1, \dots n, p \leqq n)$$

erklärt sind, vorausgesetzt, daß die Funktionen $\overset{\alpha}{\sigma}=\overset{\alpha}{\sigma}(x)$ über G stetige partielle Ableitungen zweiter Ordnung haben, so folgen aus dieser letzten Voraussetzung die Identitäten

$$\overset{\alpha}{u}_{[i,j]}=0,$$

und die Sätze 5, 6 lauten in diesem Fall folgendermaßen:

Satz 7. *Alle Differentialkomitanten $\mathscr{L}_\lambda$ zweiter Ordnung der über G zweimal stetig-differenzierbaren Skalarfelder $\overset{\alpha}{\sigma}$ $(\alpha=1, \dots p, p \leqq n;$ $\overset{1}{\sigma}_{,i}, \dots \overset{p}{\sigma}_{,i}$ sind linear unabhängige Vektorfelder) sind algebraische Komitanten der Größen $\overset{\alpha}{\sigma}, \overset{\alpha}{\sigma}_{,i}$, vorausgesetzt, daß $\mathscr{L}_\lambda$ ein Objekt erster Klasse (z. B. eine Lagrange-Funktion) ist.*

Als Folgerung bekamen wir auch den folgenden Satz (bezüglich der Terminologie s. z. B. [22]):

Satz 8. *Es gibt kein homogenes Variationsproblem zweiter Art, welches durch ein solches System von Skalarfelder $\overset{\alpha}{\sigma}$ $(\alpha=1, \dots p, p \leqq n)$ bestimmt ist, wo $\overset{\alpha}{\sigma}_{,i}$ $(\alpha=1, \dots p)$ linear unabhängige Vektorfelder sind.*

* * *

Es sei von nun an die Gleichheit $p=n$ vorausgesetzt.

Wir können in diesem Fall auf einfachere Weise (vgl. [12], Beweis des Satzes 1) zur Ergebnis gelangen. Wegen

$$\begin{vmatrix} \overset{1}{u}_1 & \dots & \overset{1}{u}_n \\ . & \dots & . \\ \overset{n}{u}_1 & \dots & \overset{n}{u}_n \end{vmatrix} \neq 0$$

gibt es (in jedem Punkt von G) ein kontravariantes n-Bein $\underset{\alpha}{v}^i (\alpha=1, \dots n)$, das nach den Relationen

$$\text{(31)} \qquad \underset{\alpha}{v}^i \overset{\beta}{u}_i = \delta^\beta_\alpha, \quad \text{d. h.} \quad \sum_{\alpha=1}^{n} \underset{\alpha}{v}^i \overset{\alpha}{u}_j = \delta^i_j$$

bestimmt ist, folglich existieren auch die partiellen Ableitungen $\underset{\alpha}{v}_{i,j}$ über G. Die Ableitungen $\overset{\alpha}{u}^i_{,j}$ und $\underset{\alpha}{v}^i_{,j}$ erfüllen die Relationen

$$\text{(32)} \qquad \overset{\alpha}{u}_{k,m} = -\overset{\alpha}{u}_q \underset{\beta}{v}^q_{,m} \overset{\beta}{u}_k,$$

die man aus (31) leicht herleiten kann. Wir bemerken, daß die Größen

(33) $$\sum\nolimits^{\gamma}_{\alpha\beta} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \overset{\gamma}{u}_i \underset{[\alpha}{v^k} \underset{\beta]}{v^i}_{,k}$$

die Rotationskoeffizienten von Ricci (s. [24], S. 171.), Skalaren sind.

Das Funktionalgleichungssystem (25) kann man nach den oben gesagten folgendermaßen auflösen. Setzen wir die Werte

$$B^i_j = \underset{j}{v^i}, \quad B^q_{ij} = \underset{(i}{v^m} \underset{j)}{v^q}_{,m}$$

in (25) ein, so bekommen wir wegen (31) und (32)

$$B^k_i \overset{\alpha}{u}_k = \delta^\alpha_i,$$

$$B^k_i B^m_j \overset{\alpha}{u}_{k,m} + B^q_{ij} \overset{\alpha}{u}_q = - \underset{i}{v^k} \underset{j}{v^m} \overset{\alpha}{u}_q \underset{\beta}{v^q}_{,m} \overset{\beta}{u}_k + \overset{\alpha}{u}_q \underset{(i}{v^m} \underset{j)}{v^q}_{,m} = - \overset{\alpha}{u}_q \underset{[i}{v^m} \underset{j]}{v^q}_{,m} = - \sum\nolimits^\alpha_{ij},$$

dementsprechend geht (25) in

(34) $$\Phi^*_\lambda\left(\sum\nolimits^\alpha_{ij}\right) = \Lambda_\lambda\left(\Phi_\mu(\overset{\alpha}{u}_i, \overset{\alpha}{u}_{i,j}); \underset{j}{v^i}\right)$$

$\left(\Phi^*_\lambda(\sum^\alpha_{ij}) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \Phi_\lambda(\delta^\alpha_i, -\sum^\alpha_{ij})\right)$ über. Wir können die Funktionenwerte Φ_λ aus (34) leicht ausdrücken. Die Transformationsformel

$$\bar{\mathscr{L}}_\lambda = \Lambda_\lambda(\mathscr{L}_\mu, B^i_j)$$

des Objektes $\mathscr{L}_\lambda$ soll die Forderung

(35) $$\Lambda_\lambda\left(\Lambda_\mu(\mathscr{L}^0_\gamma, X^i_j), Y^i_j\right) = \Lambda_\lambda(\mathscr{L}^0_\mu, X^i_k Y^k_j)$$

(die „fundamentale Funktionalgleichung" der Transformationsformel, s. [1], S. 12.) für alle Werte $\mathscr{L}^0_\mu$ des Objektes $\mathscr{L}_\mu$ und für alle reguläre Matrizen (X^i_j), (Y^i_j) befriedigen. Es sei in (35)

$$\mathscr{L}^0_\mu = \Phi_\mu = \Phi_\mu(\overset{\alpha}{u}_i; \overset{\alpha}{u}_{i,j}), \quad X^i_j = \underset{j}{v^i}, \quad Y^i_j = \overset{i}{u}_j$$

eingesetzt, so kann man (wegen (26) und (34)) die Gültigkeit der Identitäten

(36) $$\Phi_\lambda = \Lambda_\lambda\left(\Phi^*_\mu(\sum\nolimits^\alpha_{ij}), \overset{i}{u}_j\right)$$

leicht einsehen.

Nehmen wir an, daß Φ^*_μ in (36) ein beliebig-gewähltes Funktionensystem der Rotationskoeffizienten $\sum^\alpha_{ij}$ ist; wir behaupten, daß (36) die allgemeinste Form der Lösungen des Funktionalgleichungssystems (25) darstellt. Die Größen

$$\sum\nolimits_\mu \stackrel{\mathrm{df}}{=} \Phi^*_\mu\left(\sum\nolimits^\alpha_{ij}\right)$$

sind nämlich Skalaren, folglich geht (25), falls

$$\Phi_\lambda = \Lambda_\lambda\left(\sum\nolimits_\mu, \overset{i}{u}_j\right)$$

ist, in

$$\Lambda_\lambda\left(\sum\nolimits_\mu, B^k_j \overset{i}{u}_k\right) = \Lambda_\lambda\left(\Lambda_\mu(\sum\nolimits_\nu, \overset{i}{u}_j), B^i_j\right)$$

über, die wegen der Gleichung (35) eine Identität ist, w. z. b. w.

Die erhaltenen Resultate können wir im folgenden Satz formulieren.

Satz 9. *Es sei ein System von linear-unabhängigen kovarianten Vektorfeldern* $\overset{\alpha}{u}_i$ $(\alpha = 1, \dots n)$ *mit seinen partiellen Albeitungen* $\overset{\alpha}{u}_{i,j}$ *über einem Gebiet des Raumes* X_n *gegeben, und* $\underset{\alpha}{v}^i$ *bezeichne das zu* $\overset{\alpha}{u}_i$ *adjungierte n-Bein. Die allgemeinste Form der Differentialkomitanten* $\mathscr{L}_\lambda$ *erster Ordnung und erster Klasse der Felder* $\overset{\alpha}{u}_i$ *ist*

$$\mathscr{L}_\lambda = \Lambda_\lambda\big(\Phi^*_\mu(\textstyle\sum^{\alpha}_{ij}), \overset{i}{u}_j\big), \tag{36}$$

wo Λ_λ *nach der Transformationsformel von* $\mathscr{L}_\lambda$

$$\bar{\mathscr{L}}_\lambda = \Lambda_\lambda(\mathscr{L}_\mu, B^i_j)$$

bestimmt ist, die Größen $\sum^{\alpha}_{ij}$ *die (nach* (33) *bestimmte) Rotationskoeffizienten des n-Beins* $\overset{\alpha}{u}_i$ *sind und* Φ^*_λ *sind beliebige Funktionen.*

Bemerkungen

1. Wir haben in [14] die Differentialkomitanten erster Ordnung von zwei linear unabhängigen kovarianten Vektorfeldern charakterisiert, die Objekte erster Klasse sind. Der Satz 5 bietet eine unmittelbare Verallgemeinerung dieses Resultates.

2. Die Ergebnisse der Sätze 5 und 9 sind anscheinend unverträglich, wenn wir die Behauptung des Satzes 5 im Falle $p = n$ beachten. In der Tat ist (36) (mit Vertauschung ihrer Seiten) im Fall $p = n$ eine Relation der Form (30. 1), nämlich kann man die Beziehungen

$$\textstyle\sum^{\alpha}_{\beta\gamma} = \underset{\beta}{v}^k \underset{\gamma}{v}^m \overset{\alpha}{u}_{[k,m]} = \underset{\beta}{v}^k \underset{\gamma}{v}^m \overset{\alpha}{T}_{km}$$

aus (31), (32), (33) ableiten.

3. Mit den Voraussetzungen des Satzes 9 können wir feststellen, daß die Lagrange-Funktion der Gestalt

$$L = L(\overset{\alpha}{u}_i, \overset{\alpha}{u}_{i,j}) \quad (\det(\overset{\alpha}{u}_i) \neq 0)$$

die Form

$$L = \left|\det(\overset{\alpha}{u}_i)\right| \Phi^*(\textstyle\sum^{\alpha}_{ij})$$

hat, wo Φ^* eine willkürliche Funktion der Skalare $\sum^{\alpha}_{ij}$ ist.

4. Die Formel (36) gibt auch die tensoriellen Differentialkomitanten erster Ordnung der Felder $\overset{\alpha}{u}_i$ $(\det(\overset{\alpha}{u}_i) \neq 0)$ in der Form

$$T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = C^{a_1 \dots a_p}_{b_1 \dots b_q}(\textstyle\sum^{\alpha}_{ij}) \underset{a_1}{v}^{i_1} \dots \underset{a_p}{v}^{i_p} \overset{b_1}{u}_{j_1} \dots \overset{b_q}{u}_{j_q}$$

wieder $\big(C^{a_1 \dots a_p}_{b_1 \dots b_q}(\sum^{\alpha}_{ij})$ bezeichnet ein beliebiges Funktionensystem der Skalare $\sum^{\alpha}_{ij}\big)$, somit können wir die Behauptung des Satzes 9 als eine Verallgemeinerung des Satzes 2 von [12] auffassen.

5. Der Satz 9 gibt eine Verallgemeinerung auch einiger der Ergebnisse von M. Kucharzewski ([9], [10], [11]) und A. Zajtz ([28], S. 43—45.), die sich auf algebraische Komitanten eines Systems von rein kovarianten, bzw. rein kontravarianten Vektoren beziehen (s. auch der folgende Satz 10).

Aus dem Satz 9 können wir die Gültigkeit des folgenden Satzes einsehen:

Satz 10. *Es sei ein System von linear unabhängigen kontravarianten Vektorfeldern* $\underset{\alpha}{v}^i$ $(\alpha=1, \dots n)$ *mit seinen partiellen Ableitungen* $\underset{\alpha}{v}^i{}_{,j}$ *über einem Gebiet des* X_n *gegeben, und* $\overset{\alpha}{u}_i$ *bezeichne das zu* $\underset{\alpha}{v}^i$ *adjungierte n-Bein. Alle Differentialkomitanten* $\mathscr{L}_\lambda$ *erster Ordnung der Felder* $\underset{\alpha}{v}^i$ *haben die Gestalt*

$$\mathscr{L}_\lambda = \Lambda_\lambda\left(\Phi^*_\mu\left(\textstyle\sum^{\alpha}_{ij}\right), \overset{i}{u}_j\right),$$

die Objekte erster Klasse sind

$$\overline{\mathscr{L}}_\lambda = \mathscr{L}_\lambda(\mathscr{L}_\mu, B^i_j).$$

(Die Skalargrößen $\sum^{\alpha}_{ij}$ *— die Rotationskoeffizienten des n-Beines* $\underset{\alpha}{v}^i$ *— sind nach* (33) *bestimmt und* Φ^*_λ *bezeichnen beliebig gewählte Funktionen von* $\sum^{\alpha}_{ij}$*).*

(Zu dem Beweis dieses Satzes ist es hinreichend zu beachten, daß die Felder $\underset{\alpha}{v}^i$ ein System von kovarianten Vektorfeldern $\overset{\alpha}{u}_i$ nach (31) (wegen det $(\underset{\alpha}{v}^i) \neq 0$) ein-

ein$\underset{\alpha}{v}^i$ ein System von kovarianten Vektorfeldern $\overset{\alpha}{u}_i$ nach (31) (wegen det $(\underset{\alpha}{v}^i)$)bjekt $\mathscr{L}_\lambda$ eine Differentialkomitante erster Ordnung der Felder $\underset{\alpha}{v}^i$, d. h.

$$\mathscr{L}_\lambda = \Psi_\lambda\left(\underset{\alpha}{v}^i, \underset{\alpha}{v}^i{}_{,j}\right),$$

dann ist $\mathscr{L}_\lambda$ nach (31) und (32) eine Differentialkomitante erster Ordnung der Felder $\overset{\alpha}{u}_i$,

$$\mathscr{L}_\lambda = \Phi_\lambda\left(\overset{\alpha}{u}_i, \overset{\alpha}{u}_{i,j}\right)$$

usw.)

Zum Schluß geben wir noch eine Bemerkung.

Gibt man z. B. die Definition der Lagrange-Funktion L bezüglich der Felder $\overset{\alpha}{u}_i$ nach

$$L = L\left(x^i, \overset{\alpha}{u}_i, \overset{\alpha}{u}_{i,j}\right)$$

an — vorausgesetzt, daß $L(x^i, \overset{\alpha}{u}_i, \overset{\alpha}{u}_{i,j})$ eine zu (24) analoge Invarianzbedingung

$$L\left(\bar{x}^i, \overset{\bar{\alpha}}{u}_i, \overset{\bar{\alpha}}{u}_{i,j}\right) = |\det(B^i_j)|\, L\left(x^i, \overset{\alpha}{u}_i, \overset{\alpha}{u}_{i,j}\right) \tag{37}$$

in allen Punkte x^0_i von G befriedigt —, so soll L wieder von den Veränderlichen x^0_i unabhängig sein. Setzen wir nämlich in (37) $\bar{x}^i = x^i_0 + c^i$ (c^i sind beliebige Werte, $i=1, \dots n$), so geht (37) wegen $B^i_j = \delta^i_j$, $B^i_{jk} = 0$ in die Identität

$$L\left(x^i_0 + c^i, \overset{\alpha}{u}_i, \overset{\alpha}{u}_{i,j}\right) = L\left(x^i_0, \overset{\alpha}{u}_i, \overset{\alpha}{u}_{i,j}\right)$$

über, die eben die behauptete Unabhängigkeit beweist.

§ 3. Lagrange-Funktionen des metrischen Grundtensors und gewisser Vektorfelder

Es sei ein kovariantes Tensorfeld g_{ij}, ein System von kovarianten und ein System von kontravarianten Vektorfeldern ($\overset{\alpha}{u}_i$ und $\underset{\alpha}{v}^i, \alpha=1, \ldots, N$) über $G(\subseteqq X_n, n>1)$ gegeben. Wir setzen voraus, daß der Tensor g_{ij} den Bedingungen

$$g_{ij}=g_{ji}, \quad \det(g_{ij})\neq 0 \tag{38}$$

in jedem Punkt von G genügt, und $g_{ij}=g_{ij}(x)$, $\overset{\alpha}{u}_i=\overset{\alpha}{u}_i(x)$, $\underset{\alpha}{v}^i=\underset{\alpha}{v}^i(x)$ Funktionen der Klasse $C_2(G)$ sind. Aus diesen Forderungen folgen u. a. die Existenz der Christoffelschen Symbole erster und zweiter Art:

$$\Gamma_{ijk} \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{1}{2}(g_{ik,j}+g_{jk,i}-g_{ij,k})$$

bzw.

$$\Gamma^k_{ij} \overset{\mathrm{df}}{=} g^{kr}\Gamma_{ijr}$$

(wo g^{jr} der durch die Gleichungen $g^{jr}g_{ri}=\delta^j_i$ definierte kontravariante Tensor ist), die durch die symmetrischen Übertragungsparameter Γ^k_{ij} bestimmten kovarianten Ableitungen

$$\overset{\alpha}{u}_{i;j} \overset{\mathrm{df}}{=} \overset{\alpha}{u}_{i,j}-\Gamma^k_{ij}\overset{\alpha}{u}_k, \qquad \underset{\alpha}{v}^i_{;j} \overset{\mathrm{df}}{=} \underset{\alpha}{v}^i_{,j}+\Gamma^i_{jk}\underset{\alpha}{v}^k,$$

ferner folgt die Existenz des kovarianten Krümmungstensors

$$R_{imkj} \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{1}{2}(g_{ij,mk}+g_{mk,ij}-g_{ik,mj}-g_{mj,ik})+\Gamma^p_{mk}\Gamma_{ijp}-\Gamma^p_{mj}\Gamma_{ikp}.$$

Der Tensor R_{imkj} befriedigt die folgenden bekannten Symmetrierelationen (s. z. B. [7], S. 21.)

$$R_{imkj} = -R_{mikj} = -R_{imjk} = R_{kjim}, \tag{39}$$

$$R_{imkj}+R_{ikjm}+R_{ijmk} = 0. \tag{40}$$

Wir werden uns im folgenden mit den Differentialkomitanten (höchstens) zweiter Ordnung der Objekte $\overset{\alpha}{u}_i$, $\underset{\alpha}{v}^i$ beschäftigen, welche Objekte erster Klasse sind. Als Folgerungen ergeben sich auch Ergebnisse für die algebraische Form der Lagrange-Funktionen von der Gestalt

$$L=L_1(g_{ij}, g_{ij,k}, g_{ij,km}),$$

$$L=L_2(\overset{\alpha}{u}_i, \overset{\alpha}{u}_{i,j}, \overset{\alpha}{u}_{i,jk}, \underset{\alpha}{v}^i, \underset{\alpha}{v}^i_{,j}, \underset{\alpha}{v}^i_{,jk}, g_{ij}, g_{ij,k}, g_{ij,km}).$$

* * *

Für die Differentialkomitanten zweiter Ordnung von g_{ij}, die Objekte erster Klasse sind, ist der folgende Satz gültig:

Satz 11. *Ist das Objekt $\mathcal{L}_\lambda$ ($\lambda=1, \dots L$) erster Klasse eine Differentialkomitante zweiter Ordnung des Tensorfeldes g_{ij} mit den Eigenschaften* (38)

$$\mathcal{L}_\lambda = \Phi_\lambda(g_{ij}, g_{ij,k}, g_{ij,km}),$$

so ist es eine algebraische Komitante der Tensorfelder g_{ij} und R_{imkj}.

Beweis. Die Identitäten (4) werden jetzt die Form

$$\Phi_\lambda(\bar{g}_{ij}, \bar{g}_{ij,k}, \bar{g}_{ij,km}) = \Lambda_\lambda\big(\Phi_\mu(g_{ij}, g_{ij,k}, g_{ij,km}), B^i_j\big) \tag{41}$$

haben, wo

$$\begin{cases} \bar{g}_{ij} = B^p_i B^q_j g_{pq}, \ \bar{g}_{ij,k} = B^p_i B^q_j B^r_k g_{pq,r} + (B^p_{ik} B^q_j + B^p_i B^q_{jk}) g_{pq}, \\ \bar{g}_{ij,km} = B^p_i B^q_j B^r_k B^s_m g_{pq,rs} + (B^p_{im} B^q_j B^r_k + B^q_{jm} B^p_i B^r_k + B^r_{km} B^p_i B^q_j + B^p_{ik} B^q_j B^r_m + \\ \qquad + B^q_{jk} B^p_i B^r_m) g_{pq,r} + (B^p_{ik} B^q_{jm} + B^p_{im} B^q_{jk}) g_{pq} + (B^p_{ikm} B^q_j + B^q_{jkm} B^p_i) g_{pq} \end{cases} \tag{42}$$

sind. Wir werden die Identitäten (41) sofort in einem fixen Punkt x^i_0 von G betrachten, somit wird (41) ein Funktionalgleichungssystem mit freien Parametern $B^i_j, B^i_{jk}, B^i_{jkm}$. Durch die Substitution

$$B^i_j = \delta^i_j, \quad B^i_{jk} = 0,$$

wobei B^i_{jkm} ($\equiv B^i_{(jkm)}$) beliebige Werte sind, ergibt sich unter Beachtung von (42) und der dem (26) entsprechenden Eigenschaften der in (41) vorkommenden Funktionen Λ_λ:

$$\Phi_\lambda(g_{ij}, g_{ij,k}, g_{ij,km} + B^p_{ikm} g_{pj} + B^p_{jkm} g_{pi}) = \Phi_\lambda(g_{ij}, g_{ij,k}, g_{ij,km}) \tag{43}$$

Es sei nun

$$B^p_{ikm} = \frac{1}{6} g^{pj}\big(g_{ik,jm} + g_{im,jk} + g_{km,ij} - 2(g_{ij,km} + g_{jk,im} + g_{jm,ik})\big),$$

somit geht (43) in

$$\Phi_\lambda(g_{ij}, g_{ij,k}, T_{ijmk}) = \Phi_\lambda(g_{ij}, g_{ij,k}, g_{ij,km}) \tag{44}$$

über, wo

$$T_{ijkm} \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{3}(R_{ikmj} + R_{imkj}) + \frac{1}{6}(\Gamma^p_{kj}\Gamma_{imp} + \Gamma^p_{mj}\Gamma_{ikp} - 2\Gamma^p_{km}\Gamma_{ijp}) \tag{45}$$

ist.

Es sei der Tensor $\overset{*}{R}_{imkj}$ nach

$$\overset{*}{R}_{imkj} \stackrel{\text{df}}{=} R_{ikmj} + R_{imkj} \tag{46}$$

definiert, d. h. (mit Anwendung von (39) und (40))

$$R_{imkj} = \frac{1}{3}(2\overset{*}{R}_{imkj} + \overset{*}{R}_{ikjm}), \tag{47}$$

dann sieht man aus (44), (45), (46), (47), daß Φ_λ nur von $g_{ij}, g_{ij,k}, \Gamma^i_{jk}, R_{imkj}$ abhängt:

$$\Phi_\lambda = \Phi^1_\lambda(g_{ij}, g_{ij,k}, \Gamma^i_{jk}, R_{imkj}).$$

Das Funktionalgleichungssystem (41) wird dementsprechend wegen

$$\bar{\Gamma}^i_{jk} = \bar{B}^i_p B^q_j B^r_k \Gamma^p_{qr} + \bar{B}^i_p B^p_{jk}, \tag{48}$$

(42) und auf Grund des Tensorcharakters von R_{imkj} durch die Substitution

$$B^i_j = \delta^i_j$$

die Form

$$\Phi^1_\lambda(g_{ij}, g_{ij,k} + B^p_{ik} g_{pj} + B^p_{jk} g_{ip}, \Gamma^i_{jk} + B^i_{jk}, R_{imkj}) = \Phi^1_\lambda(g_{ij}, g_{ij,k}, \Gamma^i_{jk}, R_{imkj}) \tag{49}$$

haben, wo $B^i_{jk} = B^i_{kj}$ beliebig gewählte Größen sind. Nehmen wir jetzt (s. [16], Beweis der Sätze 2, 4, 5, 6) für B_{jk} die Werte

$$B^i_{jk} = -\Gamma^i_{jk},$$

so bekommen wir wegen

$$g_{ij,k} + \Gamma^p_{ik} g_{pj} + \Gamma^p_{jk} g_{ip} = 0$$

die Identitäten

$$\Phi^1_\lambda(g_{ij}, 0, 0, R_{imkj}) = \Phi^1_\lambda(g_{ij}, g_{ij,k}, \Gamma^i_{jk}, R_{imkj}),$$

d. h. $\mathscr{L}_\lambda (= \Phi_\lambda = \Phi^1_\lambda)$ hängt allein von g_{ij} und R_{imkj} ab, w. z. b. w.

Aus dem Beweis dieses Satzes folgt auch der folgende

Satz 12. *Es gibt keine Differentialkomitante erster Ordnung und erster Klasse des Tensorfeldes g_{ij} $(= g_{ji}, \det(g_{ij}) \neq 0)$, die von den partiellen Ableitungen $g_{ij,k}$ von g_{ij} in expliziter Weise abhängt.*

Die Sätze 11, 12 gelten natürlich auch für Lagrange-Funktionen von der Gestalt

$$L = L_1(g_{ij}, g_{ij,k}, g_{ij,km}),$$

bzw.

$$L = L_2(g_{ij}, g_{ij,k})$$

ohne irgendwelche Regularitätsannahmen bezüglich der Funktionen L_1 bzw. L_2. Deswegen können wir diese Sätze für L_1 bzw. L_2 auch als Verallgemeinerungen gewisser Sätze der allgemeinen Relativitätstheorie auffassen (s. z. B. [19], [20], [21], [22], [25]), die man zu den Rechnungen mit Lagrange-Hamiltonschen Ableitungen üblich zugrunde legt (s. z. B. [2], [3], [4], [5]), und welche von E. Noether ([18], s. noch [26], [27]) herrühren.

Die Funktion $\sqrt{|g|}$ $(g \overset{\text{df}}{=} \det(g_{ij}))$ bildet eine Weylsche Dichte vom Gewichte $+1$, die über G wegen (38) nirgendswo verschwindet. Wenn $L = L_1(g_{ij}, g_{ij,k}, g_{ij,km})$ eine Lagrange-Funktion ist, so können wir nach

$$\sigma \overset{\text{df}}{=} |g|^{-\frac{1}{2}} L_1$$

ein Skalarfeld erklären, das natürlich wieder Differentialkomitante zweiter Ordnung des Feldes g_{ij} ist:

$$\sigma = \sigma(g_{ij}, g_{ij,k}, g_{ij,km}),$$

folglich gilt die Behauptung des Satzes 11 auch für σ:

$$\sigma = \sigma^*(g_{ij}, R_{imkj}).$$

Um die allgemeinste Form der Lagrange-Funktionen der Gestalt

$$L = L_1(g_{ij}, g_{ij,k}, g_{ij,km})$$

zu bestimmen, genügt es demgemäß die allgemeinste Form der Skalarkomitanten zweiter Ordnung des Feldes g_{ij} klarzustellen. Zur Zeit beschäftigen sich M. Lorens (Katowice, s. [29]). A. Zajtz (Krakow) (dem Wissen nach des Verfassers) mit dem letzteren Problem. Wir weisen an dieser Stelle noch auf die Resultate von M. A. McKiernan and H. Richards ([15]) hin.

Gehen wir zur Untersuchung der Differentialkomitanten erster Klasse der Form

$$\mathscr{L}_\lambda = \Phi_\lambda\big(\overset{\alpha}{u}_i, \overset{\alpha}{u}_{i,j}, \overset{\alpha}{u}_{i,jk}, \underset{\alpha}{v}^i, \underset{\alpha}{v}^i_{,j}, \underset{\alpha}{v}^i_{,jk}, g_{ij}, g_{ij,k}, g_{ij,km}\big)$$

über. Bekanntlich bilden

$$\overset{\alpha}{t}_{ij} \overset{\mathrm{df}}{=} \overset{\alpha}{u}_{i;j}, \quad \underset{\alpha}{t}^i_j \overset{\mathrm{df}}{=} \underset{\alpha}{v}^i_{;j},$$

wo das Semikolon die kovariante Ableitung bezeichnet, bzw.

$$\overset{\alpha}{t}_{ijk} \overset{\mathrm{df}}{=} \overset{\alpha}{t}_{ij;k}, \quad \underset{\alpha}{t}^i_{jk} \overset{\mathrm{df}}{=} \underset{\alpha}{t}^i_{j;k}$$

Tensorfelder der Valenz (0, 2), (1, 1), bzw. (0, 3), (1, 2), wodurch wir die partiellen Ableitungen von $\overset{\alpha}{u}_i$, $\underset{\alpha}{v}^i$ erster bzw. zweiter Ordnung nach

$$(50) \qquad \begin{cases} \overset{\alpha}{u}_{i,j} = \overset{\alpha}{t}_{ij} + \Gamma^p_{ij}\overset{\alpha}{u}_p, \\ \overset{\alpha}{u}_{ij,k} = \overset{\alpha}{t}_{ijk} + \Gamma^p_{ij}\overset{\alpha}{t}_{pk} + \Gamma^p_{ik}\overset{\alpha}{t}_{pj} + \Gamma^p_{jk}\overset{\alpha}{t}_{ip} + (\Gamma^p_{ij,k} + \Gamma^q_{ij}\Gamma^p_{qk})\overset{\alpha}{u}_q, \\ \underset{\alpha}{v}^i_{,j} = \underset{\alpha}{t}^i_j - \Gamma^i_{jp}\underset{\alpha}{v}^p, \\ \underset{\alpha}{v}^i_{j,k} = \underset{\alpha}{t}^i_{jk} + \Gamma^p_{jk}\underset{\alpha}{t}^i_p - \Gamma^i_{pk}\underset{\alpha}{t}^p_j - \Gamma^i_{jp}\underset{\alpha}{t}^p_k - (\Gamma^i_{jp,k} - \Gamma^i_{jq}\Gamma^q_{kp})\underset{\alpha}{v}^p \end{cases}$$

darstellen können. Diese Formeln zeigen, daß die partiellen Ableitungen $\overset{\alpha}{u}_{i,j}$, $\overset{\alpha}{u}_{i,jk}$, $\underset{\alpha}{v}_{i,j}$, $\underset{\alpha}{v}_{i,jk}$ durch die Tensorfelder $\overset{\alpha}{t}_{ij}$, $\overset{\alpha}{t}_{ijk}$, $\underset{\alpha}{t}^i_j$, $\underset{\alpha}{t}^i_{jk}$, g_{ij} und durch die partiellen Ableitungen $g_{ij,k}$, $g_{ij,km}$ des Tensorfeldes g_{ij} vollständig bestimmt sind. Auf Grund dieser Relationen folgt:

$$\mathscr{L}_\lambda = \Phi^*_\lambda\big(\overset{\alpha}{u}_i, \overset{\alpha}{t}_{ij}, \overset{\alpha}{t}_{ijk}, \underset{\alpha}{v}^i, \underset{\alpha}{t}^i_j, \underset{\alpha}{t}^i_{jk}, g_{ij}, g_{ij,k}, g_{ij,km}\big).$$

Die Funktionen Φ^*_λ sollen das den Identitäten (41) entsprechendes Relationssystem

$$\Phi^*_\lambda(\overline{\overset{\alpha}{u}_i}, \overline{\overset{\alpha}{t}_{ij}}, \dots \overline{g_{ij,km}}) = \Lambda_\lambda(\Phi^*_\mu(\overset{\alpha}{u}_i, \overset{\alpha}{t}_{ij}, \dots g_{ij,km}), B^i_j)$$

(auch in einem beliebigen gewählten fixen Punkt x^i_0 von G) erfüllen, aus welchen wir (schrittweise folgend den Beweis des Satzes 11) die Gültigkeit des folgenden Satzes einsehen können:

Satz 13. *Jede Differentialkomintante $\mathscr{L}_\lambda$ zweiter Ordnung und erster Klasse der Objektenfelder $\overset{\alpha}{u}_i$, $\underset{\alpha}{v}^i$, g_{ij} ist eine algebraische Komitante der Größen*

$$\overset{\alpha}{u}_i,\ \overset{\alpha}{u}_{i;j},\ \overset{\alpha}{u}_{i;jk},\ \underset{\alpha}{v}^i,\ \underset{\alpha}{v}^i_{;j},\ \underset{\alpha}{v}^i_{;jk},\ g_{ij},\ R_{imkj}.$$

Der Beweis ist wesentlich einfacher, wenn das Objekt $\mathscr{L}_\lambda$ eine Differentialkomitante erster Ordnung (und erster Klasse) der obenerwähnten Felder ist:

$$\Phi_\lambda = \Phi_\lambda\big(\overset{\alpha}{u}_i,\ \overset{\alpha}{u}_{i,j},\ \underset{\alpha}{v}^i,\ \underset{\alpha}{v}^i_{,j},\ g_{ij},\ g_{ij,k}\big).$$

Die zu (41) analoge Identität ist in diesem Fall

$$\Phi_\lambda\big(\overline{\overset{\alpha}{u}},\ \overline{\overset{\alpha}{u}}_{i,j},\ \underset{\alpha}{\bar v}^i,\ \underset{\alpha}{\bar v}^i_{,j},\ \bar g_{ij},\ \bar g_{ij,k}\big) = \Lambda_\lambda\big(\Phi_\mu(\overset{\alpha}{u}_i,\ \dots\ g_{ij,k}),\ B^i_j\big),$$

woraus man das Ergebnis

$$\Phi_\lambda = \Phi^{**}_\lambda\big(\overset{\alpha}{u}_i,\ \overset{\alpha}{t}_{ij},\ \underset{\alpha}{v}^i,\ \underset{\alpha}{t}^i_j,\ g_{ij}\big),$$

mit Hilfe der Substitution $B^i_{jk} = -\Gamma^i_{jk}$, leicht herleiten kann. Somit gilt der

Satz 14. *Jedes Objekt erster Klasse, das eine Differentialkomitante erster Ordnung der Größen $\overset{\alpha}{u}_i$, $\underset{\alpha}{v}^i$, g_{ij} ist, muß eine algebraische Komitante der Größen $\overset{\alpha}{u}_i$, $\overset{\alpha}{u}_{i;j}$, $\underset{\alpha}{v}^i$, $\underset{\alpha}{v}^i_{;j}$, g_{ij} sein.*

Es sei schließlich vorausgesetzt, daß ein Objekt $\mathscr{L}_\lambda$ erster Klasse

$$\overline{\mathscr{L}}_\lambda = \Lambda_\lambda(\mathscr{L}_\mu,\ B^i_j)$$

eine Differentialkomitante zweiter Ordnung der über G linear unabhängigen kovarianten Vektorfelder $\overset{\alpha}{u}_i$ $(\alpha = 1, \dots n,\ \det(\overset{\alpha}{u}_i) \neq 0)$ und des metrischen Tensorfeldes g_{ij} $\big(= g_{ji},\ \det(g_{ij}) \neq 0\big)$ ist:

$$\mathscr{L}_\lambda = \Phi_\lambda\big(\overset{\alpha}{u}_i,\ \overset{\alpha}{u}_{i,j},\ \overset{\alpha}{u}_{i,jk},\ g_{ij},\ g_{ij,k},\ g_{ij,km}\big).$$

Nach dem Satz 13 soll $\mathscr{L}_\lambda$ die Gestalt

$$\mathscr{L}_\lambda = \Phi^1_\lambda\big(\overset{\alpha}{u}_i,\ \overset{\alpha}{u}_{i;j},\ \overset{\alpha}{u}_{i;jk},\ g_{ij},\ R_{imkj}\big)$$

haben, wo die Funktionen Φ^1_λ in allem Punkt x^i_0 von G das Funktionalgleichungssystem

$$(51)\qquad \Phi^1_\lambda\big(B^r_i \overset{\alpha}{u}_r,\ B^r_i B^s_j \overset{\alpha}{u}_{r;s},\ \dots\ B^r_i B^s_m B^t_k B^u_j R_{rstu}\big) = \Lambda_\lambda\big(\Phi^1_\mu(\overset{\alpha}{u}_i,\ \dots\ R_{imkj});\ B^i_j\big)$$

befriedigen. Setzen wir hier die Werte B^i_j nach

$$B^i_j = \underset{j}{v}^i$$

($\underset{\alpha}{v}^i$ bezeichnet wieder das zu $\overset{\alpha}{u}_i$ adjungierte n-Bein), so folgen aus (51) die Identitäten

$$\Phi_\lambda^*(\overset{\alpha}{\sigma}_{ij}, \overset{\alpha}{\sigma}_{ijk}, \gamma_{ij}, \varrho_{imkj}) = \Lambda_\lambda(\Phi_\mu^1, \underset{j}{v}^i), \tag{52}$$

$(\Phi_\lambda^*(\overset{\alpha}{\sigma}_{ij}, \ldots \varrho_{imkj}) \overset{\text{df}}{=} \Phi_\lambda^1(\delta_i^\alpha, \overset{\alpha}{\sigma}_{ij}, \ldots \varrho_{imkj}))$, wo die Grössen $\overset{\alpha}{\sigma}_{ij}, \overset{\alpha}{\sigma}_{ijk}, \gamma_{ij}, \varrho_{imkj}$ nach

$$\begin{cases} \overset{\alpha}{\sigma}_{ij} \overset{\text{df}}{=} \underset{i}{v}^r \underset{j}{v}^s \overset{\alpha}{u}_{r;s}, & \overset{\alpha}{\sigma}_{ijk} \overset{\text{df}}{=} \underset{i}{v}^r \underset{j}{v}^s \underset{k}{v}^t \overset{\alpha}{u}_{r;st}, \\ \gamma_{ij} \overset{\text{df}}{=} \underset{i}{v}^r \underset{j}{v}^s g_{rs}, & \varrho_{imkj} \overset{\text{df}}{=} \underset{i}{v}^r \underset{m}{v}^s \underset{k}{v}^t \underset{j}{v}^u R_{rstu} \end{cases} \tag{53}$$

Skalarfelder sind. Das für Φ_μ^1 implizite Gleichungssystem (52) kann man auf ähnliche Weise auflösen, wie wir aus (34) zu (36) gelangt sind. Das Ergebnis ist

$$\Phi_\lambda^1 = \Lambda_\lambda(\Phi_\mu^*(\overset{\alpha}{\sigma}_{ij}, \ldots \varrho_{imkj}); \overset{i}{u}_j) \tag{54}$$

und wir können uns wieder leicht überzeugen, daß (54) mit beliebig gewähltem Funktionensystem Φ_λ^* eine Lösung des Gleichungssystems (51) darstellt.

Wir haben damit den folgenden Satz bewiesen:

Satz 15. *Die allgemeinste Form der Differentialkomitanten $\mathscr{L}_\lambda$ zweiter Ordnung der kovarianten Vektorfelder $\overset{\alpha}{u}_i$ ($\alpha = 1, \ldots n$, det $(\overset{\alpha}{u}_i) \neq 0$) und des Tensorfeldes g_{ij} ($= g_{ji}$, det $(g_{ij}) \neq 0$), die Objekte erster Klasse mit den Transformationsformeln*

$$\overline{\mathscr{L}}_\lambda = \Lambda_\lambda(\mathscr{L}_\mu, B_j^i)$$

sind, ist

$$\mathscr{L}_\lambda = \Lambda_\lambda(\Phi_\mu^*(\overset{\alpha}{\sigma}_{ij}, \overset{\alpha}{\sigma}_{ijk}, \gamma_{ij}, \varrho_{imkj}); \overset{i}{u}_j),$$

wo Φ_λ^* beliebige Funktionen der Skalarfelder $\sigma_{ij}, \ldots \varrho_{imkj}$ bedeuten ($\overset{\alpha}{\sigma}_{ij}, \ldots \varrho_{imkj}$ sind nach (53) *erklärt und $\underset{\alpha}{v}^i$ bezeichnet das zu $\overset{\alpha}{u}_i$ adjungierte n-Bein).*

Wir bemerken, daß man die Skalaren $\overset{\alpha}{\sigma}_{ij}, \overset{\alpha}{\sigma}_{ijk}$ mit Hilfe von $\sum_{\beta\gamma}^\alpha$ und mit dem Tensor

$$T_{jk}^i \overset{\text{df}}{=} \Gamma_{jk}^i - \underset{\alpha}{v}^i \overset{\alpha}{u}_{(j,k)}$$

nach

$$\overset{\alpha}{\sigma}_{ij} = \textstyle\sum_{ij}^\alpha - \overset{\alpha}{u}_p \underset{i}{v}^q \underset{j}{v}^r T_{qr}^p,$$

$$\overset{\alpha}{\sigma}_{ijk} = \underset{k}{v}^p \textstyle\sum_{ij,p}^\alpha + \sum_{ip}^\alpha \sum_{jk}^p + \sum_{pj}^\alpha \sum_{ik}^p - \sum_{ip}^\alpha \overset{p}{u}_q \underset{j}{v}^r \underset{k}{v}^s T_{rs}^q - \sum_{pj}^\alpha \overset{p}{u}_q \underset{i}{v}^r \underset{k}{v}^s T_{rs}^q -$$

$$- \textstyle\sum_{pk}^\alpha \overset{p}{u}_q \underset{i}{v}^r \underset{j}{v}^s T_{rs}^q + \overset{\alpha}{u}_p \underset{i}{v}^q \underset{j}{v}^r \underset{k}{v}^s T_{ms}^p T_{qr}^m - \overset{\alpha}{u}_p \underset{i}{v}^q \underset{j}{v}^r \underset{k}{v}^s T_{qr;s}^p$$

ausdrücken kann.

Bemerkungen

1) Ist L eine Lagrange-Funktion der Gestalt

$$L = L_1(\overset{\alpha}{u}_i, \overset{\alpha}{u}_{i,j}, \overset{\alpha}{u}_{i,jk}, \underset{\alpha}{v}^i, \underset{\alpha}{v}^i_{,j}, \underset{\alpha}{v}^i_{,jk}, g_{ij}, g_{ij,k}, g_{ij,km})$$

bzw.

$$L = L_2(\overset{\alpha}{u}_i, \overset{\alpha}{u}_{i,j}, \underset{\alpha}{v}^i, \underset{\alpha}{v}^i_{,j}, g_{ij}, g_{ij,k})$$

bzw.

$$L = L_3(\overset{\alpha}{u}_i, \overset{\alpha}{u}_{i,j}, \overset{\alpha}{u}_{i,jk}, g_{ij}, g_{ij,k}, g_{ij,km}), \quad \det(\overset{\alpha}{u}_i) \neq 0,$$

so können wir nach dem Satz 13, 14, bzw. 15 feststellen, daß diese Lagrange-Funktionen die Form

$$L_1 = \Phi_1(\overset{\alpha}{u}_i, \overset{\alpha}{u}_{i;j}, \overset{\alpha}{u}_{i;jk}, \underset{\alpha}{v}^i, \underset{\alpha}{v}^i_{;j}, \underset{\alpha}{v}^i_{;jk}, g_{ij}, R_{imkj}),$$

$$L_2 = \Phi_2(\overset{\alpha}{u}_i, \overset{\alpha}{u}_{i;j}, \underset{\alpha}{v}^i, \underset{\alpha}{v}^i_{;j}, g_{ij}),$$

$$L_3 = \left|\det(\overset{i}{u}_j)\right| \Phi^*(\overset{\alpha}{\sigma}_{ij}, \overset{\alpha}{\sigma}_{ijk}, \gamma_{ij}, \varrho_{imkj})$$

haben (das letzte ist wieder die allgemeinste Form für L_3, wo man die Funktion Φ^* beliebig wählen kann).

2) Man kann leicht einsehen, daß die Forderung der Unabhängigkeit der obigen Lagrange-Funktionen von x^i als eine Folgerung der zu (24) und (37) analogen Invarianzbedingung aufgefaßt werden kann.

3) Aus der Bemerkung 1) folgt für die Lagrange-Funktion

$$L = L_{11}(u_i, u_{i,j}, g_{ij})$$

(s. [2], [22]) bzw.

$$L = L_{12}(u_i, u_{i,j}, g_{ij}, g_{ij,k}, g_{ij,km})$$

(s. [22]) bzw.

$$L = L_{13}(u_i, u_{i,j}, u_{i,jk}, g_{ij}, g_{ij,k}, g_{ij,km})$$

(s. [2]) die Darstellungen

$$L_{11} = \Phi_{11}(u_i, u_{[i,j]}, g_{ij}),$$

bzw.

$$L_{12} = \Phi_{12}(u_i, u_{i;j}, g_{ij}, R_{imkj}),$$

bzw.

$$L_{13} = \Phi_{13}(u_i, u_{i;j}, u_{i;jk}, g_{ij}, R_{imkj}),$$

wo die Funktionen $\Phi_{11}, \Phi_{12}, \Phi_{13}$ solche Invarianzbedingungen erfüllen sollen, in welchen nur die partiellen Ableitungen B^i_j vorkommen.

§ 4. Lagrange-Funktionen einer affinen Übertragung und gewißer Vektorfelder

Wir beschäftigen uns in diesem Paragraph mit der Kennzeichnung der Differentialkomitanten $\mathscr{L}_\lambda$ zweiter, bzw. erster Ordnung einer affinen Übertragung Γ^i_{jk} $(=\Gamma^i_{kj})$ und eines Systems von kovarianten und kontravarianten Vektorfeldern $\overset{\alpha}{u}_i$, $\underset{\alpha}{v}^i$ $(\alpha=1, \dots N)$, vorausgesetzt, daß $\mathscr{L}_\lambda$ wieder ein Objekt erster Klasse ist, d. h.

$$\bar{\mathscr{L}}_\lambda = \Lambda_\lambda(\mathscr{L}_\mu, B^i_j) \tag{55}$$

gilt. Zu diesem Zweck setzen wir voraus, daß die Funktionen $\Gamma^i_{jk}=\Gamma^i_{jk}(x)$ bzw. $\overset{\alpha}{u}_i=\overset{\alpha}{u}_i(x)$, $\underset{\alpha}{v}=\underset{\alpha}{v}^i(x)$ über $G(\subseteqq X_n)$ stetige partielle Ableitungen erster bzw. zweiter Ordnung haben.

Im folgenden sind die aus

$$\bar{\Gamma}^i_{jk} = \bar{B}^i_p B^q_j B^r_k \Gamma^p_{qr} + \bar{B}^i_p B^p_{jk} \tag{56}$$

folgenden Relationen

$$\left\{\begin{aligned} \bar{\Gamma}^i_{jk,m} = {} & \bar{B}^i_p B^q_j B^r_k B^s_m \Gamma^p_{qr,s} - \bar{B}^i_p \bar{B}^q_r B^r_{jk} B^p_{qm} + \bar{B}^i_p B^p_{jkm} + \\ & + (\bar{B}^i_p B^q_k B^r_{jm} + \bar{B}^i_p B^q_j B^r_{km} - \bar{B}^i_s \bar{B}^t_p B^q_j B^r_k B^s_{tm}) \Gamma^p_{qr} \end{aligned}\right. \tag{57}$$

nötig.

Wir nehmen zuerst an, daß das Objekt $\mathscr{L}_\lambda$ mit der Transformationsformel (55) eine Differentialkomitante erster Ordnung von Γ^i_{jk} ist:

$$\mathscr{L}_\lambda = \Phi_\lambda(\Gamma^i_{jk}, \Gamma^i_{jk,m}).$$

Die Funktionen Φ_λ genügen folglich in jedem Punkt $x^i_0(\in G)$ dem Funktionalgleichungssystem

$$\Phi_\lambda(\bar{\Gamma}^i_{jk}, \bar{\Gamma}^i_{jk,m}) = \Lambda_\lambda\big(\Phi_\mu(\Gamma^i_{jk}, \Gamma^i_{jk,m});\ B^i_j\big), \tag{58}$$

aus welchem wir durch Einsetzen von

$$B^i_j=\delta^i_j, \quad B^i_{jk}=0, \quad B^i_{jkm} = -\frac{1}{3}(\Gamma^i_{jk,m}+\Gamma^i_{mk,j}+\Gamma^i_{jm,k})$$

(wegen der (26) entsprechenden Eigenschaft von Λ_λ, ferner wegen (56) und (57)) die Identitäten

$$\Phi_\lambda\left(\Gamma^i_{jk}, -\frac{1}{3}(R^i_{kjm}+R^i_{jkm}-\Gamma^p_{km}\Gamma^i_{pj}-\Gamma^p_{jm}\Gamma^i_{pk}+2\Gamma^p_{jk}\Gamma^i_{pm})\right) = \Phi_\lambda(\Gamma^i_{jk}, \Gamma^i_{jk,m}) \tag{59}$$

erhalten, wo

$$R^i_{jkm} \overset{\mathrm{df}}{=} \Gamma^i_{jm,k} - \Gamma^i_{jk,m} + \Gamma^i_{pk}\Gamma^p_{jm} - \Gamma^i_{pm}\Gamma^p_{jk}$$

den Krümmungstensor der affinen Übertragung Γ^i_{jk} bezeichnet. Die Formeln (59) zeigen, daß die Funktionen Φ_λ nur von Γ^i_{jk} und von dem Tensor

$$\overset{*}{R}{}^i_{jkm} \overset{\mathrm{df}}{=} R^i_{jkm} + R^i_{kjm}$$

abhängen. Den Tensor R^i_{jkm} kann man einfach durch $\overset{*}{R}{}^i_{jkm}$ ausdrücken, wenn wir die bekannte Relationen

$$R^i_{j(km)}=0, \quad R^i_{[jkm]}=0$$

(s. z. B. [24], S. 144.) verwenden:

$$R^i_{jkm} = \frac{1}{3}\left(2\overset{*}{R}{}^i_{jkm}+\overset{*}{R}{}^i_{kmj}\right),$$

folglich können wir festlegen, daß Φ_λ die Form

$$\Phi_\lambda = \Phi^1_\lambda(\Gamma^i_{jk}, R^i_{jkm})$$

hat. Setzen wir jetzt diese Gestalt von Φ_λ in (58) ein und wählen wir die Werte B^i_j, B^i_{jk} nach

$$B^i_j=\delta^i_j, \quad B^i_{jk} = -\Gamma^i_{jk},$$

so bekommen wir

$$\Phi^1_\lambda(0, R^i_{jkm})=\Phi^1_\lambda(\Gamma^i_{jk}, R^i_{jkm}),$$

d. h. die Funktion Φ^1_λ hängt allein von dem Krümmungstensor R^i_{jkm} ab.

Wir haben also den folgenden Satz bewiesen:

Satz 16. *Alle Differentialkomitanten erster Ordnung einer affinen Übertragung Γ^i_{jk}, die Objekte erster Klasse sind, sind die algebraischen Komitanten allein des zu den Γ^i_{jk} gehörigen Krümmungstensors.*

Satz 17. *Es gibt keine algebraische Komitante der symmetrischen Übertragung Γ^i_{jk} über G, die ein Objekt erster Klasse ist und welche ausschließlich von den Übertragungsparametern Γ^i_{jk} abhängt.*

Wir können die folgenden, zu den Sätzen 13, 14, 15 analoge Sätze mit ähnlichem Verfahren, die zu den Ergebnissen der Sätze 13, 14, 15 geführt haben, beweisen:

Satz 18. *Wenn das Objekt $\mathscr{L}_\lambda$ erster Klasse eine Differentialkomitante zweiter Ordnung der Felder $\overset{\alpha}{u}_i$, $\underset{\alpha}{v}{}^i$ $(\alpha=1, \dots, N)$ und gleichzeitig eine Differentialkomitante erster Ordnung der symmetrischen Übertragung Γ^i_{jk} über G ist, d. h.*

$$\mathscr{L}_\lambda=\Phi_\lambda\left(\overset{\alpha}{u}_i, \overset{\alpha}{u}_{i,j}, \overset{\alpha}{u}_{i,jk}, \underset{\alpha}{v}{}^i, \underset{\alpha}{v}{}^i_{,j}, \underset{\alpha}{v}{}^i_{,jk}, \Gamma^i_{jk}, \Gamma^i_{jk,m}\right),$$

so muß $\mathscr{L}_\lambda$ eine algebraische Komitante der Tensoren

$$\overset{\alpha}{u}_i, \overset{\alpha}{u}_{i;j}\left(\overset{\mathrm{df}}{=}\overset{\alpha}{u}_{i,j}-\Gamma^p_{ij}\overset{\alpha}{u}_p\right), \overset{\alpha}{u}_{i;jk},$$

$$\underset{\alpha}{v}{}^i, \underset{\alpha}{v}{}^i_{;j}\left(\overset{\mathrm{df}}{=}\underset{\alpha}{v}{}^i_{,j}+\Gamma^i_{pj}\underset{\alpha}{v}{}^p\right), \underset{\alpha}{v}{}^i_{;jk}$$

und R^i_{jkm} sein.

Satz 19. *Ist $\mathscr{L}_\lambda$ ein Objekt erster Klasse und gleichzeitig eine Differentialkomitante erster Ordnung der Vektorfelder $\overset{\alpha}{u}_i$, $\underset{\alpha}{v}{}^j$ $(\alpha=1, \dots, N)$, bzw. algebraische Komitante der symmetrischen Übertragung Γ^i_{jk}, d. h.*

$$\mathscr{L}_\lambda=\Phi_\lambda\left(\overset{\alpha}{u}_i, \overset{\alpha}{u}_{i,j}, \underset{\alpha}{v}{}^i, \underset{\alpha}{v}{}^i_{,j}, \Gamma^i_{jk}\right),$$

dann ist $\mathscr{L}_\lambda$ eine algebraische Komitante der Größen

$$\overset{\alpha}{u}_i,\ \overset{\alpha}{u}_{i;j},\ \underset{\alpha}{v}^i,\ \underset{\alpha}{v}^i_{;j}.$$

Satz 20. *$\mathscr{L}_\lambda$ sei ein Objekt erster Klasse mit der Transformationsformel*

$$\bar{\mathscr{L}}_\lambda = \Lambda_\lambda(\mathscr{L}_\mu;\ B^i_j) \tag{60}$$

und wir setzen voraus, daß $\mathscr{L}_\lambda$ eine Differentialkomitante zweiter Ordnung der in jedem Punkt von G linear-unabhängigen kovarianten Vektorfelder $\overset{\alpha}{u}_i$ $(\alpha=1, \ldots, n)$ und eine Differentialkomitante erster Ordnung der symmetrischen Übertragung Γ^i_{jk} ist:

$$\mathscr{L}_\lambda = \Phi_\lambda\big(\overset{\alpha}{u}_i,\ \overset{\alpha}{u}_{i,j},\ \overset{\alpha}{u}_{i,jk},\ \Gamma^i_{jk},\ \Gamma^i_{jk,m}\big).$$

Dann gibt es ein Funktionensystem Φ^*_λ der Skalarfelder

$$\overset{\alpha}{\sigma}_{ij}\big(\overset{\mathrm{df}}{=} \underset{i}{v}^p \underset{j}{v}^q \overset{\alpha}{u}_{p;q}\big),\quad \overset{\alpha}{\sigma}_{ijk}\big(\overset{\mathrm{df}}{=} \underset{i}{v}^p \underset{j}{v}^q \underset{k}{v}^r \overset{\alpha}{u}_{p;qr}\big).$$

$$\varrho^i_{jkm}\big(\overset{\mathrm{df}}{=} \overset{i}{u}_p \underset{j}{v}^q \underset{k}{v}^r \underset{m}{v}^s R^p_{qrs}\big),$$

mit welchem man das Objekt $\mathscr{L}_\lambda$ in der Form

$$\mathscr{L}_\lambda = \Lambda_\lambda\big(\Phi^*_\mu(\overset{\alpha}{\sigma}_{ij},\ \overset{\alpha}{\sigma}_{ijk},\ \varrho^i_{jkm});\ \overset{i}{u}_j\big) \tag{61}$$

darstellen kann ($\underset{\alpha}{v}^i$ bezeichnet das zu $\overset{\alpha}{u}_i$ adjungierte n-Bein). Umgekehrt, es seien die Funktionen Φ^*_λ in (61) *beliebig gewählt, so erweist sich das nach* (61) *erklärte Funktionensystem $\mathscr{L}_\lambda = \mathscr{L}_\lambda(x)$ über G als ein Objekt erster Klasse mit der Transformationsformel* (60).

Bemerkungen

1. Die Behauptung des Satzes 16 gibt ein noch von E. B. Christoffel und G. Ricci herrührendes Ergebnis, den „ersten Reduktionssatz" für Differentialkomitanten erster Ordnung von Γ^i_{jk} wieder (s. [24], S. 164.), während die Sätze 18, 19, 20 in ihren Spezialfällen eine Verallgemeinerung des „zweiten Reduktionssatzes" von E. Noether ([18], s. auch [24], S. 165.) angeben.

2. Man folgert einfach, daß auch die folgenden Verallgemeinerungen des Satzes 18, bzw. 19 bestehen:

Es sei über G außer den Vektorfeldern $\overset{\alpha}{u}_i$, $\underset{\alpha}{v}^j$ und dem Übertragungsparameter Γ^i_{jk} auch ein Tensorfeld t_{ij} erklärt, dann ist jede Differentialkomitante $\mathscr{L}_\lambda$ erster Klasse von der Gestalt

$$\mathscr{L}_\lambda = \Phi_\lambda\big(t_{ij},\ \overset{\alpha}{u}_i,\ \overset{\alpha}{u}_{i,j},\ \overset{\alpha}{u}_{i,jk},\ \underset{\alpha}{v}^i,\ \underset{\alpha}{v}^i_{,jk},\ \Gamma^i_{jk},\ \Gamma^i_{jk,m}\big)$$

bzw.

$$\mathscr{L}_\lambda = \Phi_\lambda\big(t_{ij},\ \overset{\alpha}{u}_i,\ \overset{\alpha}{u}_{i,j},\ \underset{\alpha}{v}^i,\ \underset{\alpha}{v}^i_{,j},\ \Gamma^i_{jk}\big)$$

eine algebraische Komitante der Größen

$$t_{ij},\ \overset{\alpha}{u}_i,\ \overset{\alpha}{u}_{i;j},\ \dots\ \underset{\alpha}{v}^i_{;jk},\ R^i_{jkm}$$

bzw.

$$t_{ij},\ \overset{\alpha}{u}_i,\ \overset{\alpha}{u}_{i;j},\ \underset{\alpha}{v}^i,\ \underset{\alpha}{v}^i_{;j}.$$

Im Spezialfall, wobei die Lagrange-Funktionen von der Gestalt

$$L = L_1(t_{ij}, \Gamma^i_{jk}, \Gamma^i_{jk,m})$$

bzw.

$$L = L_2(t_{ij}, u_i, u_{i,j}, \Gamma^i_{jk}, \Gamma^i_{jk,m})$$

(s. [23]) sind, ist L_1 bzw. L_2 eine algebraische Komitante der Felder

$$t_{jk}, R^i_{jkm} \text{ bzw. } g_{ij}, u_i, u_{i;j}, R^i_{jkm}.$$

3. Man kann sich von der Unabhängigkeit von x^i einer Lagrange-Funktion von der Gestalt

$$L = L\big(x^i, g_{ij}, \overset{\alpha}{u}_i, \overset{\alpha}{u}_{i,j}, \overset{\alpha}{u}_{i,jk}, \underset{\alpha}{v}^i, \underset{\alpha}{v}^i_{,j}, \underset{\alpha}{v}^i_{,jk}, \Gamma^i_{jk}, \Gamma^i_{jk,m}\big)$$

wieder leicht überzeugen.

Literaturverzeichnis

[1] J. Aczél—St. Gołab, Funktionalgleichungen der Theorie der geometrischen Objekte, *Warszawa*, 1960.

[2] H. A. Buchdahl, The hamiltonian derivatives of a class of fundamental invariants, *Quart. J. Math. Oxford. Ser.* **19** (1948), 150—159.

[3] H. A. Buchdahl, Über die Variationsableitung von Fundamentalinvarianten beliebig hoher Ordnung, *Acta Math.*, **85** (1950), 63—72.

[4] H. A. Buchdahl, On the hamiltonian derivatives arising from a class of gauge-invariant action principles in a W_n, *J. London Math. Soc.*, **26** (1951), 139—149.

[5] H. A. Buchdahl, An identity between the hamiltonian derivatives of certain fundamental invariants in a W_4, *J. London Math. Soc.*, **26** (1951), 150—152.

[6] A. S. Eddington, Relativitätstheorie in mathematischer Behandlung, *Berlin*, 1925.

[7] L. P. Eisenhart, Riemannian geometry, *Princeton*, 1926.

[8] G. Knapecz, General relativistic theory of lagrangeian functions, Part I. (Fields in the space X_1) *(in Vorbereitung)*.

[9] M. Kucharzewski, Über die Vektorkomitanten der Vektorfelder, *Ann. Polon. Math.*, **9** (1961), 299—309.

[10] M. Kucharzewski, Die kovarianten Vektorkomitanten, die aus kontravarianten Vektoren gebildet sind, *Tensor*, N. S., **12** (1962), 140—150.

[11] M. Kucharzewski, Die skalaren Komitanten, welche aus kovarianten und kontravarianten Vektoren gebildet sind, *Tensor*, N. S., **12** (1962), 158—166.

[12] I. Makai, Über geometrische Objekte, die aus adjungierten n-Beinen gebildet sind, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **13** (1962), 219—222.

[13] I. Makai, (*Briefwechsel* mit Herr G. KNAPECZ), 1966.

[14] I. Makai, Über Differentialkomitanten erster Ordnung von kovarianten Vektorfeldern, *Ann. Polon. Math.*, **18** (1970), *(im Druck)*.

[15] M. A. McKiernan—H. Richards, Characterization of some concomitants of the metric tensor and vector fields under restricted groups of transformation, *Ann. Polon. Math.*, **18** (1970), *(im Druck)*.

[16] A. Moór, Über die aus g_{ik} bestimmte kovariante Ableitung, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **11** (1960), 175—186.
[17] A. Nijenhuis, Theory of geometric object, *Amsterdam*, 1952.
[18] E. Noether, Invarianten beliebiger Differentialausdrücke, *Göttinger Nachr.*, (1918), 37—44.
[19] J. C. du Plessis, Tensorial concomitants and conservation laws, *Tensor*, N. S., **20** (1969), 347—360.
[20] J. C. du Plessis, Conformal concomitants and continuity equations, *Tensor*, N. S., **21** (1970), 1—14.
[21] H. Rund, Variational problems in wich the unknown functions are tensor components, 2^{nd} *Colloquium on the Calculus of Variations*, Univ. of South Africa (1964), 129—174.
[22] H. Rund, Variational problems involving combined tensor fields, *Abh. Math. Sem. Hamburg*, **29** (1966), 243—263.
[23] H. Rund, Invariant theory of variational problems for geometric objects, *Tensor*, N. S., **18** (1967), 239—258.
[24] J. A. Schouten, Ricci—Calculus, *Berlin—Göttingen—Heidelberg*, 1954.
[25] E. Schrödinger, Space—time structure, *Cambridge*, 1954.
[26] H. Weyl, Raum, Zeit, Materie, *Berlin*, 1921.
[27] R. Weitzenböck, Invariantentheorie, *Noordhoff*, *Groningen*, 1923.
[28] A. Zajtz, Komitanten der Tensoren zweiter Ordnung, *Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Jagiellonskiego*, **74**., *Prace Matematyczne*, *Zeszyt* 8., Kraków, 1964.
[29] M. Lorens, Remarks on differential concomitants of the covariant tensor, *Prace Matematyczne* **1**, 1969 (Katowice), 71—77.

(Eingegangen am 25. Juni 1968.)