Zur gruppentheoretischen Beschreibung n-stelliger Strukturen

Von JÜRGEN TIMM (Hamburg)

Auf eine Anregung Emmi NOETHERS hin verallgemeinerte DÖRNTE [2][1]) den üblichen Gruppenbegriff, indem er statt der binären eine n-stellige Operation zugrunde legte und für diese Operation die eindeutige Lösbarkeit sowie ein n-stelliges Assoziativgesetz (vergl. Def. 2, 3, 5) verlangte. Die so gekennzeichneten Strukturen nannte er *n-Gruppen*, die üblichen Gruppen werden in dieser Theorie als *2*-oder *Bigruppen* bezeichnet. E. L. POST bewies in [4], daß sich jede n-Gruppe derart in eine Bigruppe einbetten läßt, daß das n-stellige Produkt auf der Grundmenge der n-Gruppe mit der n-fachen Ausführung des zweistelligen Produkts übereinstimmt. HOSSZÚ [3] wies nach, daß man auf der Grundmenge der n-Gruppe selbst eine 2-Gruppe so erklären kann, daß man das n-stellige Produkt durch binäres Operieren in dieser 2-Gruppe erhält.

Diese Produktdarstellung läßt sich in 2 Richtungen verallgemeinern: Einmal kann man das Konstruktionsverfahren im Wesentlichen ungeändert auf schwächere binäre Strukturen (als 2-Gruppen) anwenden. D. ZUPNIK [6] konnte hier zeigen, daß sich auch die Halb-n-Gruppen (in denen auf die eindeutige Lösbarkeit verzichtet wird) mit Hilfe einer Produktdarstellung aus binären Halbgruppen erzeugen lassen.

In dieser Note wird ein anderer Weg der Verallgemeinerung des Resultats von HOSSZÚ eingeschlagen und zwar werden wir als Ausgangsstruktur weiter eine Bigruppe wählen, dafür aber die Anforderungen an das Konstruktionsverfahren selbst abschwächen. Es wird also die Frage behandelt, welche n-stelligen Strukturen man mit einer gewissen Verallgemeinerung (vergl. Def. 6) der Produktdarstellung aus Bigruppen konstruieren kann. Besonderes Interesse verdienen dabei die nicht notwendig assoziativen Strukturen. Insbesondere wird eine spezielle Klasse dieser Strukturen, die permutierend assoziativen Quasi-n-Gruppen (vergl. Def. 3) untersucht, weil ihre zweistelligen Modelle bereits 2-Gruppen sind. Es handelt sich also wie bei den n-Gruppen um eine direkte Verallgemeinerung des zweistelligen Gruppenbegriffs. Auch diese Strukturen können sämtlich mit Hilfe der verallgemeinerten Produktdarstellung aus Bigruppen konstruiert werden (vergl. Satz 7).

Schließlich blieb bislang noch die Frage nach dem Zusammenhang der Konstruktionsverfahren von Post und Hosszú offen. Diese Frage wird in Satz 10 beant-

[1]) Die Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis.

wortet. Die Antwort liefert gleichzeitig eine Eindeutigkeitsaussage für die Konstruktion von Hosszú (Vergl. Kor. 3; Post beweist eine analoge Aussage für sein Konstruktionsverfahren bereits in [4]).

Wir beginnen mit der

Definition 1. Eine Menge G mit einer n-stelligen Operation „o" (d. i. eine Abbildung des n-fachen Kartesischen Produkts G^n in G) heißt n-Gruppoid, geschrieben $G(\mathrm{o})$.

Definition 2. Ein n-Gruppoid $G(\mathrm{o})$ heißt Quasi-n-Gruppe, wenn für alle $a_1, \dots, a_n$ und jede Stellung von x die Gleichung $(a_1, \dots, a_i, x, a_{i+i}, \dots, a_{n-1})_0 = a_n$ in G eindeutig nach x auflösbar ist.

Das zweistellige Assoziativgesetz erlaubt eine Reihe nicht gleichwertiger Verallgemeinerungen:

Definition 3. Ein n-Gruppoid $G(\mathrm{o})$ heißt semi-assoziativ, falls $\forall x_1, \dots, x_{2n-1} \in G$: $((x_1, \dots, x_n)_0, x_{n+1}, \dots, x_{2n-1})_0 = (x_1, \dots, x_{n-1}, (x_n, \dots, x_{2n-1})_0)_0$; es heißt permutierend assoziativ, falls es Permutationen $\pi_1, \dots, \pi_n$ der Menge $\{1, 2, \dots, n\}$ gibt, so daß für alle $x_1, \dots, x_{2n-1}$ aus $G((x_1, \dots, x_n)_0, x_{n+1}, \dots, x_{2n-1})_0 = (x_1, \dots, x_{i-1}, (x_{i-1+\pi_i(1)}, \dots, x_{i-1+\pi_i(n)})_0, x_{n+i}, \dots, x_{2n-1})_0$ gilt und $\Pi_1 = \Pi_n = \mathrm{id}$. ist. Schließlich werden wir $G(\mathrm{o})$ als assoziativ bezeichnen, falls hieren sämtliche $\Pi_i = \mathrm{id}$. sind, d. h. falls für alle $x_1, \dots, x_{2n-1}$ aus G und $i = 1, 2, \dots, n$ gilt: $((x_1, \dots, x_n)_0, x_{n+1}, \dots, x_{2n-1})_0 = (x_1, \dots, x_{i-1}, (x_i, \dots, x_{i-1+n})_0, \dots, x_{2n-1})_0$

Definition 4. Ein n-Gruppoid $G(\mathrm{o})$ heißt semiabelsch, falls $\forall x, y, a_1, \dots, a_{n-2} \in G$: $(x, a_1, \dots, a_{n-2}, y)_0 = (y, a_1, \dots, a_{n-2}, x)_0$. $G(\mathrm{o})$ heißt abelsch, falls für jede Permutation π von $\{1, 2, \dots, n\}$ und alle $x_1, \dots, x_n \in G$ gilt: $(x_1, \dots, x_n)_0 = (x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)})_0$.

Definition 5. Unter einer n-Gruppe verstehen wir eine nichtleere, assoziative Quasi-n-Gruppe.

Wir werden nun die verallgemeinerte Produktdarstellung definieren:

Definition 6. Ist $G(\cdot)$ eine Bigruppe, 1 ihr neutrales Element, $d \in G$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ Abbildungen von G in sich, die 1 fest lassen, so heißt die durch $(x_1, \dots, x_n)_0 := x_1 x_2^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_{n-1}}$ in G definierte n-stellige Struktur die $\langle \alpha_i, d \rangle$-Ableitung von $G(\cdot)$.

An Stelle der α^i verwendet Hosszú in [3] die Potenzen α^i eines festen Automorphismus α, der d fest läßt und $\forall x \in G$: $x^{\alpha^n} = d x d^{-1}$ erfüllt. Seine Konstruktion ist also ein Spezialfall der $\langle \alpha_i, d \rangle$-Ableitungen von Bigruppen.

Wir werden nun eine Reihe von Bedingungen angeben, die damit gleichwertig sind, daß die $\langle \alpha_i, d \rangle$-Ableitung einer Bigruppe bestimmte der oben definierten Eigenschaften aufweist. So erhält man etwa

Satz 1. *Die $\langle \alpha_i, d \rangle$-Ableitung, $G(\mathrm{o})$, einer Bigruppe $G(\cdot)$ ist genau dann semiabelsch, wenn $\alpha_{n-1} = id$ und $G(\cdot)$ abelsch ist.*

Beweis. Ist $G(\mathrm{o})$ semi-abelsch, so ist $(x, 1, \dots, 1)_0 = (1, \dots, 1, x)_0$ also $x^{\alpha_{n-1}} = x$. Dann folgt aber aus $(x, 1, \dots, 1, y)_0 = (y, 1, \dots, 1, x)_0$ die Kommutativität in $G(\cdot)$. Die Umkehrung ist trivial.

Satz 2. *Die $\langle \alpha_i, d \rangle$-Ableitung, $G(\circ)$, einer Bigruppe $G(\cdot)$ ist genau dann eine Quasi-n-Gruppe, wenn die Abbildungen $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ bijektiv sind.*

Beweis. Nehmen wir an, daß die α_i sämtlich bijektiv sind, dann ist für $a_1, \ldots, a_n \in G$ $x := [(a_1 a_2^{\alpha_1} \ldots a_i^{\alpha_{i-1}})^{-1} a_n d^{-1} (a_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \ldots a_{n-1}^{\alpha_{n-1}})^{-1}]^{\alpha_i^{-1}}$ die einzige Lösung von $(a_1, \ldots, a_i, x, a_{i+1}, \ldots, a_{n-1})_0 = a_n$, wenn man $(x_1, \ldots, x_n)_0 := x_1 x_2^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_{n-1}}$ definiert. Also ist die $\langle \alpha_i, d \rangle$-Ableitung von $G(\cdot)$ eine Quasi-n-Gruppe. Setzen wir das umgekehrt voraus, so ist speziell $(1, \ldots, 1, x, 1, \ldots, 1)_0 = yd$ lösbar (x stehe an $i+1$ ter Stelle im Produkt, 1 sei neutral in $G(\cdot)$). Also existiert x mit $x^{\alpha_i} = y$ zu jedem y aus G, d. h. α_i ist surjektiv. Weiter ist dieses x eindeutig bestimmt, also α_i auch injektiv.

Satz 3. *Die $\langle \alpha_i, d \rangle$-Ableitung, $G(\circ)$, einer Bigruppe $G(\cdot)$ ist genau dann eine semiassoziative Quasi-n-Gruppe, wenn $\alpha_1, \ldots, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-2}$ bijektiv und $\alpha_{n-1} = d^*$* [2]) *ist.*

Beweis. Sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-2}$ bijektiv und $x^{\alpha_{n-1}} = dxd^{-1}$, so gilt für $x_1, \ldots, x_{2n-1} \in G$:

$$((x_1, \ldots, x_n)_0, x_{n+1}, \ldots, x_{2n-1})_0 = x_1 x_2^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_{n-1}} d x_{n+1}^{\alpha_1} \ldots x_{2n-1}^{\alpha_{n-1}} d =$$

$$= x_1 \ldots x_{n-1}^{\alpha_{n-2}} d(x_n x_{n+1}^{\alpha_1} \ldots x_{2n-1}^{\alpha_{n-1}} d) d^{-1} d = x_1 \cdot x_2^{\alpha_1} \ldots x_{n-1}^{\alpha_{n-2}} (x_n \ldots x_{2n-1}^{\alpha_{n-1}} d)^{\alpha_{n-1}} d =$$

$$= (x_1, \ldots, x_{n-1}, (x_n, \ldots, x_{2n-1})_0)_0 .$$

Setzen wir umgekehrt voraus, daß $G(\circ)$ eine semiassoziative Quasi-n-Gruppe ist, so folgt $((1, \ldots, 1, d^{-1})_0, 1, \ldots, 1)_0 = (1, \ldots, 1, (d^{-1}, 1, \ldots, 1)_0)_0 = d$. Also ist $(d^{-1})^{\alpha_{n-1}} = d^{-1}$. Weiter ist $((1, \ldots, 1)_0, x, 1, \ldots, 1, d^{-1})_0 = (1, \ldots, 1, (1, x, 1, \ldots, 1, d^{-1})_0)_0$, woraus $dx = x^{\alpha_{n-1}} d$ oder $\alpha_{n-1} = d^*$ folgt.

Während die Schlüsse bisher sehr einfach und naheliegend waren, macht die Behandlung der permutierend assoziativen Quasi-n-Gruppen mehr Schwierigkeiten. Wir leiten in diesem Falle zunächst den folgenden allgemeinen Kennzeichnungssatz ab, der sich dann im abelschen wie auch im nicht-abelschen Fall wesentlich vereinfacht:

Satz 4. *Die $\langle \alpha_i, d \rangle$-Ableitung $G(o)$ einer Bigruppe $G(\cdot)$ ist genau dann eine permutierend assoziative Quasi-n-Gruppe, wenn es Permutationen Π_i von $\{1, 2, \ldots, n\}$ $(\Pi_0 = \Pi_n = id)$ gibt, so daß für $i = 1, \ldots, n$ gilt:*

F1: *$\alpha_{\Pi_i^{-1}(1)-1}$ ist eine Bijektion und $\varepsilon_i := (\alpha_{\Pi_i^{-1}(1)-1})^{-1} \alpha_{i-1}$ ist ein Automorphismus oder Antiautomorphismus von $G(.)$,*

F2: $\forall x \in G$: $(xd)^{\alpha_{i-1}} = x^{\varepsilon_i} d$,

F3: für $\nu = 1, \ldots, n-i+1$ gilt $\alpha_{\Pi_i^{-1}(\nu)-1} \varepsilon_i = \alpha_{i-2+\nu}$,

für $\nu = n-i+2, \ldots, n$ gilt $\alpha_{\Pi_i^{-1}(\nu)-1} \varepsilon_i = \alpha_{\nu-n+i-1} d^*$.

F4: $\left(\prod_{\nu=1}^{n} x_{i-1+\nu}^{(\alpha_{\Pi_i^{-1}(\nu)-1})\varepsilon_i} \right) = \left(\prod_{\nu=1}^{n} x_{i-1+\Pi_i(\nu)}^{\alpha_{\nu-1}} \right)^{\varepsilon_i}$ gilt in $G(\cdot)$.

---

[2]) d^* bezeichnet in dieser Note stets den d zugeordneten inneren Automorphismus von $G(\cdot)$.

Beweis. Ist Π_i eine Permutation von $\{1, 2, \ldots, n\}$, so ist die Gültigkeit von $((x_1, \ldots, x_n)_0, x_{n+1}, \ldots, x_{2n-1})_0 = (x_1, \ldots, x_{i-1}, (x_{i-1+\Pi_i(1)}, \ldots, x_{i-1+\Pi_i(n)})_0, \ldots, x_{2n-1})_0$ in $G(o)$ offensichtlich damit gleichbedeutend, daß die Gleichung

$$\text{(Ii)} \qquad \left(\prod_{v=1}^{n-i+1} x_{i-1+v}^{\alpha_{i-2+v}}\right) d \left(\prod_{v=n-i+2}^{n} x_{i-1+v}^{\alpha_{v-n+i-1}}\right) = \left[\left(\prod_{v=1}^{n} x_{i-1+\Pi_i(v)}^{\alpha_{v-1}}\right) d\right]^{\alpha_{i-1}}$$

in $G(\cdot)$ gilt.

Ist nun $G(o)$ eine permutierend assoziative Quasi-n-Gruppe, so sind die α_i nach Satz 3 Bijektionen und $\alpha_{n-1} = d^*$. Weiter existieren Permutationen Π_i von $\{1, \ldots, n\}$, für die jeweils eine Gleichung (Ii) gilt. Ist ein Element x aus G vorgegeben, so erhält man aus (Ii) (indem man $x_i := x^{(\alpha_{\Pi_i^{-1}(1)-1})^{-1}}$ und $x_k := 1$ für $k \neq i$ setzt) die Gleichung $x^{\varepsilon_i} d = (xd)^{\alpha_{i-1}}$. Wendet man dies auf (Ii) an, so folgt

$$\text{(IIi)} \qquad \left(\prod_{v=1}^{n-i+1} x_{i-1+v}^{\alpha_{i-2+v}}\right) \left(\prod_{v=n-i+2}^{n} x_{i-1+v}^{(\alpha_{v-n+i-1})d^*}\right) d = \left(\prod_{v=1}^{n} x_{i-1+\Pi_i^{-1}(v)}^{\alpha_{v-1}}\right)^{\varepsilon_i} d.$$

Hieraus ergeben sich die Gleichungen F3, wenn man bis auf einen Faktor alle $x_k := 1$ setzt. Mit F3 folgt aus (IIi) gerade F4. Sind schließlich x, y Elemente aus G und setzt man in (IIi) $x_i := x^{(\alpha_{\Pi_i^{-1}(1)-1})^{-1}}$, $x_{i+1} := y^{(\alpha_{\Pi_i^{-1}(2)-1})^{-1}}$ und $x_k := 1$ für $k \neq i$, $i+1$, so ergibt

$$\text{sich} \quad x^{\varepsilon_i} y^{\varepsilon_i} = \begin{cases} (xy)^{\varepsilon_i}, & \text{falls} \quad \Pi_i^{-1}(1) < \Pi_i^{-1}(2) \\ (yx)^{\varepsilon_i} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Also ist ε_i ein Automorphismus oder ein Antiautomorphismus von $G(\cdot)$. Sind umgekehrt die Forderungen **F1**—**F4** erfüllt, so folgt aus **F3** für $i := n$

$$\varepsilon_n = \alpha_0^{-1} \alpha_{n-1} = (\alpha_{v-1})^{-1} \alpha_{v-1} d^* \quad (v = 2, \ldots, n)$$

und damit $\alpha_{n-1} = d^*$. Weiter sind alle α_i (als Produkt der Bijektion $\alpha_{\Pi_{i+1}^{-1}(1)-1}$ und des Automorphismus bzw Antiautomorphismus ε_{i+1}) bijektiv. Nach Satz 2 ist G(o) also eine Quasi-n-Gruppe und man erhält:

$$\begin{aligned}
\left(\prod_{v=1}^{n-i+1} x_{i-1+v}^{\alpha_{i-2+v}}\right) d \left(\prod_{v=n-i+2}^{n} x_{i-1+v}^{\alpha_{v-n+i+1}}\right) &= \left(\prod_{v=1}^{n-i+1} x_{i-1+v}^{\alpha_{i-2+v}}\right) \left(\prod_{v=n-i+2}^{n} x_{i-1+v}^{(\alpha_{v-n+i+1})d^*}\right) d \\
&= \left(\prod_{v=1}^{n} x_{i-1+v}^{(\alpha_{\Pi_i^{-1}(v)-1})\varepsilon_i}\right) d \quad (\text{nach } \mathbf{F3}) \\
&= \left(\prod_{v=1}^{n} x_{i-1+\Pi_i(v)}^{\alpha_{v-1}}\right)^{\varepsilon_i} d \quad (\text{nach } \mathbf{F4}) \\
&= \left(\prod_{v=1}^{n} x_{i-1+\Pi_i(v)}^{\alpha_{v-1}} d\right)^{\alpha_{i-1}} \quad (\text{nach } \mathbf{F2}),
\end{aligned}$$

was mit der permutierenden Assoziativität von $G(o)$ gleichbedeutend ist.

Im abelschen Fall vereinfacht sich Satz 4 zu der folgenden Aussage

KOROLLAR 1. Die $\langle\alpha_i, d\rangle$-Ableitung $G(\mathrm{o})$ einer abelschen Bigruppe $G(\cdot)$ ist genau dann eine permutierend assoziative Quasi-n-Gruppe, wenn es Permutationen Π_i von $\{1, \dots, n\}$ $(\Pi_0 = \Pi_n = id)$ gibt, so daß für $i = 1, \dots, n$ gilt:

F1': $\alpha_{\Pi_i^{-1}(1)-1}$ ist eine Bijektion und $\varepsilon_i := (\alpha_{\Pi_i^{-1}(1)-1})^{-1}\alpha_{i-1}$ ist ein Automorphismus von $G(\cdot)$,

F2': $\forall x \in G: (xd)^{\alpha_{i-1}} = x^{\varepsilon_i} d$,

F3': Für $\nu = 1, \dots, n-i+1$ gilt $\alpha_{\pi_i^{-1}(\nu)-1}\varepsilon_i = \alpha_{i-2+\nu}$,

Für $\nu = n-i+2, \dots, n$ gilt $\alpha_{\pi_i^{-1}(\nu)-1}\varepsilon_i = \alpha_{i-n+i-1}$.

(**F4** folgt in diesem Fall aus der Kommutativität in $G(\cdot)$ und **F1'**, **F3'**.)
Im nicht-abelschen Fall erhält man eine etwas stärkere Aussage:

Satz 5. *Die $\langle\alpha_i, d\rangle$-Ableitung $G(o)$ einer nicht-abelschen Bigruppe $G(\cdot)$ ist genau dann eine permutierend assoziative Quasi-n-Gruppe, wenn eine der folgenden Bedingungen I bzw II erfüllt ist:*

BEDINGUNG I (HOSSZÚ — BEDINGUNG):

α_1 ist ein Automorphismus von $G(\cdot)$, $\alpha_k = (\alpha_1)^k$ $(k = 1, \dots, n-1)$, $\alpha_{n-1} = d^*$ und $d^{\alpha_1} = d$.

BEDINGUNG II (ALTERNATIVBEDINGUNG):

α_1 ist ein Antiautomorphismus, α_2 ein Automorphismus von $G(\cdot)$, $\alpha_1\alpha_2^\nu = \alpha_2^\nu\alpha_1^{-1}$ (für jede ganze Zahl ν),

$$d^{\alpha_1} = d^{\alpha_2} = d, \quad \alpha_{n-1} = d^* \quad \text{und} \quad \alpha_k = \begin{cases} \alpha_1\alpha_2^{\frac{1}{2}(k-1)} & \text{für ungerade } k, \\ \alpha_2^{\frac{k}{2}} & \text{für gerade } k. \end{cases}$$

BEWEIS. Herr Hosszú zeigte, daß aus der Bedingung I sogar die Assoziativität von $G(o)$ folgt. Nehmen wir an, daß die Alternativbedingung II zutrifft. Π_i sei die Identität, falls i ungerade und $\pi_i(k) = n-k+1$, falls i gerade ist. Für ungerade i erhalten wir $\varepsilon_i = \alpha_{i-1} = \alpha_2^{\frac{1}{2}(i-1)}$ ist ein Automorphismus. Für gerade i ist $\varepsilon_i = d^{*-1}\alpha_{i-1} = d^{*-1}\alpha_1\alpha_2^{\frac{1}{2}(i-2)}$ ein Antiautomorphismus von $G(\cdot)$.

F2 folgt für ungerades i aus der Homomorphiegleichung für α_{i-1}, da $d^{\alpha_{i-1}} = d$. Für gerades i ist $\varepsilon_i = d^{*-1}\alpha_{i-1}$ und α_{i-1} ein Antiautomorphismus, der mit d auch d^{-1} fest läßt. Dann ist aber $x^{\varepsilon_1}d = (d^{-1}xd)^{\alpha_{i-1}}d = (dx^{\alpha_{i-1}}) = (xd)^{\alpha_{i-1}}$. Bevor wir **F3** beweisen ziehen wir noch 2 Folgerungen aus der Bedingung II: Einmal muß $n-1$ gerade sein, denn sonst wäre α_{n-1} ein Antiautomorphismus und nicht d^*. Weiter erhält man aus $\alpha_1\alpha_2^\nu = \alpha_2^{-\nu}\alpha_1^{-1}$ für $\nu = 0$ $\alpha_1^2 = id$. α_1 ist also sogar ein involutorischer Antiautomorphismus. — Ist nun i ungerade, so gilt

$$\alpha_{\Pi_i^{-1}(v)-1}\varepsilon_i = \alpha_{v-1}\alpha_{i-1} = \begin{cases} \left(\alpha_1\alpha_2^{\frac{v-2}{2}}\right)\left(\alpha_2^{\frac{i-1}{2}}\right) = \alpha_1\alpha_2^{\frac{1}{2}[(i+v-2)-1]} & \text{für gerade } v \\ \alpha_2^{\frac{v-1}{2}}\alpha_2^{\frac{i-1}{2}} = \alpha_2^{\frac{1}{2}(i+v-2)} & \text{für ungerade } v \end{cases}$$

Ist dagegen i gerade, so folgt (da $n-1$ gerade und α_1 involutorisch ist):

$$\alpha_{\Pi_i^{-1}(v)-1}\varepsilon_i = \alpha_{n-v}d^{*-1}\alpha_{i-1} = \alpha_{n-v}(\alpha_{n-1})^{-1}\alpha_{i-1}$$

$$= \begin{cases} \alpha_1\alpha_2^{\frac{1}{2}(n-v-1)}\alpha_2^{\frac{1}{2}(1-n)}\alpha_1\alpha_2^{\frac{1}{2}(i-2)} = \alpha_1\alpha_2^{-\frac{v}{2}}\alpha_1\alpha_2^{\frac{1}{2}(i-2)} = \alpha_2^{\frac{1}{2}(i+v-2)} & \text{für gerade } v \\ \alpha_2^{\frac{1}{2}(n-v)}\alpha^{\frac{1}{2}(1-n)}\alpha_1\alpha_2^{\frac{1}{2}(i-2)} = \alpha_2^{\frac{1}{2}(1-v)}\alpha_1\alpha_2^{\frac{1}{2}(i-2)} = \alpha_1\alpha_2^{\frac{1}{2}[(i+v-2)-1]} & \text{für ungerade } v. \end{cases}$$

In jedem Falle erhält man für $v = 1, 2, \dots, n-i+1$ $\alpha_{\Pi_i^{-1}(v)-1}\varepsilon_i = \alpha_{i-2+v}$ und für

$$v = n-i+2, \dots, n \text{ folgt } \alpha_2^{\frac{1}{2}(i+v-2)} = \alpha_2^{\frac{1}{2}(i+v-2)}\alpha_2^{\frac{1}{2}(1-n)}d^* = \alpha_{v-n+i-1}d^* \text{ bzw.}$$

$\alpha_1\alpha_2^{\frac{1}{2}(i+v-3)} = \alpha_1\alpha_2^{\frac{1}{2}(i+v-3)}\alpha_2^{\frac{1}{2}(1-n)}d^* = \alpha_1\alpha_2^{\frac{1}{2}[(v-n+i-1)-1]}d^* = \alpha_{v-n+i-1}d^*$. Damit sind die Gleichungen aus **F3** bewiesen.

Für ungerade i folgt schließlich **F4** aus der Homomorphiegleichung von α_{i-1}. Für gerade i gilt:

$$\prod_{v=1}^{n} x_{i-1+v}^{(\alpha_{\Pi_i^{-1}(v)-1})\varepsilon_i} = \prod_{v=1}^{n} x_{i-1+v}^{\alpha_{n-v}\varepsilon_i} = \left(\prod_{v=1}^{n} x_{i+n-v}^{d_{v-1}}\right)^{\varepsilon_i} = \left(\prod_{v=1}^{n} x_{i-1+\Pi_i^{-1}(v)}^{\alpha_{v-1}}\right)^{\varepsilon_i}.$$

Aus der Bedingung II folgt also, daß $G(o)$ eine permutierend assoziative Quasi-n-Gruppe ist.

Setzen wir dies umgekehrt voraus, so gelten nach Satz 4 die Forderungen **F1**—**F4**. In diesem Fall gilt: Ist ε_i ein Automorphismus, so ist Π_i die Identität: Da $G(\cdot)$ nicht abelsch ist, existieren $c, d \in G$ mit $cd \neq dc$. Gäbe es nun $j, k \in \{1, \dots, n\}$ mit $\Pi_i^{-1}(j) < \Pi_i^{-1}(k)$ sowie $k < j$, so erhielte man aus **F4** zunächst $\prod_{v=1}^{n} x_{i-1+v}^{(\alpha_{\Pi_i^{-1}(v)-1})\varepsilon_i} = \prod_{v=1}^{n} x_{i-1+\Pi_i(v)}^{\alpha_{v-1}\varepsilon_i}$ und (durch Einsetzen von $x_{i-1+j} := c^{\alpha_{k-1}^{-1}}$, $x_{i-1+k} := d^{\alpha_{j-1}^{-1}}$ und $x_{i-1+s} = x_{i-1+s} := 1$ für $s \neq j, k$) gerade $cd = dc$.

Mit einem analogen Schluß findet man, daß $\Pi_i(k) = n-k+1$ sein muß, falls ε_i ein Antiautomorphismus von $G(\cdot)$ ist.

Nehmen wir nun an, daß ε_2 ein Automorphismus und Π_2 die Identität ist, so folgt aus **F3** $\varepsilon_2 = \alpha_1$ und für $v = 1, \dots, n-1$ $\alpha_{v-1}\alpha_1 = \alpha_v$, d. h. $\alpha_v = \alpha_1^v$. **F2** liefert $d^{\alpha_1} = d$ und für $v = n$ ergibt sich aus **F3** $\alpha_{n-1}\alpha_1 = \alpha_1^n = \alpha_1 d^*$ woraus $\alpha_{n-1} = d^*$ fogt. In diesem Fall gilt also die Bedingung I.

Jetzt sei ε_2 ein Antiautomorphismus (und $\Pi_2(k) = n-k+1$). Nach Satz 3 ist $\alpha_{n-1} = d^*$. Wäre nun ε_3 ebenfalls ein Antiautomorphismus, so hätte man $\varepsilon_3 = d^{*-1}\alpha_2$, d. h. α_2 wäre ein Antiautomorphismus. Das ist aber ein Widerspruch zu **F3**, denn für $i = 3$, $v = n-1$ folgt aus **F3** $\alpha_1 d^* \alpha_2 = \alpha_1$ (links stünde ein Automorphismus, rechts ein Antiautomorphismus). Also ist ε_3 ein Automorphismus und $\Pi_3 = id$. **F3** liefert also die Gleichungen:

$$\alpha_{\nu-1}\alpha_2 = \alpha_{\nu+1} (\nu = 1, 2, \ldots, n-2) \quad \text{oder} \quad \alpha_k = \begin{cases} \alpha_1 \alpha_2^{\frac{1}{2}(k-1)} & \text{für ungerade } k \\ \alpha_2^{\frac{k}{2}} & \text{für gerade } k. \end{cases}$$

Aus **F2** folgt wieder, daß d sowohl von α_1 als auch von α_2 festgelassen wird. Dann wird aber auch d^{-1} festgelassen und es gilt $d^*\alpha_1 = \alpha_1 d^{*-1} (\ast)$. Aus **F3** folgt noch (für $i=2$ und $\nu = n-1$) $\alpha_1\alpha_{n-1}^{-1} = \alpha_{n-1}\alpha_1^1$ oder $\alpha_1 d^{*-1} = d^*\alpha_1^{-1}$. Mit $(\ast)$ erhält man hieraus $d^*\alpha_1 = d^*\alpha_1^{-1}$, d. h. α_1 ist involutorisch. Für $i=2$ und $\nu=3$ ergibt sich schließlich aus **F3**: $\alpha_2^{-1}\alpha_1 = \alpha_1\alpha_2$. Da α_1 involutorisch ist, folgt daraus $\alpha_2^{-\nu}\alpha_1^{-1} = \alpha_1\alpha_2^{\nu}$ für alle ganzen Zahlen ν.

Schließlich kennzeichnen wir auch noch die n-Gruppen unter den $\langle\alpha_i, d\rangle$-Ableitungen:

Satz 6. *Die $\langle\alpha_i, d\rangle$-Ableitung $G(o)$ einer Bigruppe $G(\cdot)$ ist genau dann eine n-Gruppe, wenn die Abbildungen α_i die* Hosszú-*Bedingung (vergl. Satz 5) erfüllen.*

Beweis. Für die eine Richtung sei auf Hosszú ([3]) verwiesen. Nehmen wir an, daß $G(o)$ eine n-Gruppe ist. Dann sind die α_i nach Satz 2 Bijektionen und nach Satz 3 ist $\alpha_{n-1} = d^*$. Aus Satz 4 (**F1**) folgt, daß sie sogar Automorphismen oder Antiautomorphismen von $G(\cdot)$ sind. Im abelschen Fall folgt aus Kor. 1, im nichtabelschen Fall aus dem Beweis von Satz 5, daß es sich um Automorphismen handeln muß. Nach Satz 4 (**F3** $i=2$) ist $\alpha_\nu = \alpha_1^\nu$ und aus $((1, \ldots, 1)_0, 1, \ldots, 1)_0 = (1, (1, \ldots, 1)_0, 1, \ldots, 1)_0$ folgt $d^{\alpha_1} = d$.

Die Sätze 5 und 6 setzen uns in die Lage, die Frage nach der Existenz echter permutierend assoziativer Quasi-n-Gruppen positiv zu beantworten:

Corollary. 2. *(Existenzsatz für permutierend assoziative Quasi-n-Gruppen) Neben den n-Gruppen existieren echte permutierend assoziative Quasi-n-Gruppe.*

Beweis. $Q = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ sei die Quaternionengruppe, α_1 sei der i und $-i$ vertauschende Antiautomorphismus. α_2 sei der innere Automorphismus j^*. Nach Satz 6 kann die $\langle\alpha_1, \alpha_2, j\rangle$-Ableitung von $Q(\cdot)$ keine n-Gruppe sein. Es ist aber $j^{\alpha_1} = j^{\alpha_2} = j$, woraus $j^*\alpha_1 = \alpha_1 j^{*-1}$ und $\alpha_\nu^2\alpha_1 = \alpha_1^{-1}\alpha_2^\nu$ für alle ganzen Zahlen ν folgt. Die Alternativbedingung II ist also erfüllt und es liegt eine echte permutierend assoziative Quasi-n-Gruppe vor. Wir können nun die folgende Verallgemeinerung des Satzes von Hosszú beweisen.

Satz 7. *Jede permutierend assoziative Quasi-n-Gruppe läßt sich als $\langle\alpha_i, d\rangle$-Ableitung einer geeigneten Bigruppe darstellen.*

Beweis. $G(o)$ sei eine permutierend assoziative Quasi-n-Gruppe, Π_i die zugehörigen Permutationen und a ein festes Element von G. Definiert man in G eine binäre Operation „·" durch die Forderung $x\cdot y := (x, a, \ldots, a, y)_0$, so gilt das Assoziativgesetz: $(xy)z = ((x, a, \ldots, a, y)_0, a, \ldots, a, z)_0 = (y, a, \ldots, a, (y, a, \ldots, a, z)_0)_0 = x(yz) \cdot G(\cdot)$ ist trivialerweise eine Quasi-2-Gruppe, also ist $G(\cdot)$ sogar 2-Gruppe. Weiter definiert die Forderung $x^{\beta_i} := (a, \ldots, a, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Stelle } \pi_i^{-1}(n-1)}}{x}, a, \ldots, a)$ für $i = 1, \ldots, n-2$ Abbildungen von G in G, die definitionsgemäß Bijektionen sind. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
(x_1, \dots, x_n)_0 &= (x_1, x_2^{\beta_1^{-1}\beta_1}, \dots, x_{n-1}^{\beta_{n-2}^{-1}\beta_{n-2}}, x_n)_0 \\
&= (x_1, (a, \dots, a, \underset{\text{Stelle } \Pi_1^{-1}(n-1)}{x_2^{\beta_1^{-1}}}, a, \dots, a)_0, (a, \dots, a, x_3^{\beta_2^{-1}}, a, \dots, a)_0, \dots)_0 \\
&= (\underbrace{(x_1, a, \dots, a, x_2^{\beta_1^{-1}})_0}_{x_1 \cdot x_2}, a, (a, \dots, a, \underset{\text{Stelle } \Pi_2^{-1}(n-2)}{x_3^{\beta_2^{-1}}}, a, \dots, a)_0, \dots)_0 \\
&= ((x_1 x_2^{\beta_1^{-1}}, a, \dots, a, x_3^{\beta_2^{-1}})_0, a, a, (a, \dots, a, \underset{\text{Stelle } \Pi_3^{-1}(n-3)}{x_4^{\beta_3^{-1}}}, a, \dots, a)_0, \dots) \\
&= \dots = x_1 x_2^{\beta_1^{-1}} \dots x_{n-1}^{\beta_{n-2}^{-1}} x_n. \text{ Jetzt sei } b_i := 1^{\beta_i^{-1}} \quad (i = 1, \dots, n-2), \text{ wo}
\end{aligned}
$$

1 das neutrale Element von $G(\cdot)$ sei, und $d := b_1 b_2 \dots b_{n-2}$. Definiert man mit diesen Elementen Abbildungen α_i von G in sich, indem man $x^{\alpha_i} := b_1 \dots b_{i-1} x^{\beta_i^{-1}} (b_1 \dots b_i)^{-1}$ $(i = 2, \dots, n-2)$ sowie $x^{\alpha_1} := x^{\beta_1^{-1}} b_1^{-1}$ und $x^{\alpha_{n-1}} := dxd^{-1}$ verlangt, so erhält man Bijektionen, für die

$$(x_1, \dots, x_n)_0 = x_1 x_2^{\alpha_1} b_1 b_1 x_3^{\alpha_2} (b_1 b_2)(b_1 b_2)^{-1} x_4^{\alpha_3} \dots d^{-1} x_n^{\alpha_{n-1}} d = x_1 x_2^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_{n-1}} d$$

gilt.[3]) Schließlich ist auch $1^{\alpha_i} = 1$ für $i = 1, \dots, n-1$, denn $1^{\alpha_1} = 1^{\beta_1^{-1}} b_1^{-1} = 1$, $1^{\alpha_i} = (b_1 \dots b_{i-1})\, 1^{\beta_i^{-1}} (b_1 \dots b_i)^{-1} = 1$ für $i = 2, \dots, n-2$ und $1^{\alpha_{n-1}} = 1^{d^*} = 1$. Also ist $G(o)$ eine $\langle \alpha_i, d \rangle$-Ableitung von $G(\cdot)$.

Der Satz von Hosszú folgt damit aus Satz 6 und 7. Man kann an diese Überlegung noch die Frage anschließen, ob man auch diejenigen n-Gruppen kennzeichnen kann, die man mit Hilfe der Produktdarstellung erhält, wenn man speziell alle $\alpha_i = id.$ wählt. Die Antwort liefert.

Satz 8. *Die $\langle \alpha_i, d \rangle$-Ableitung $G(o)$ einer Bigruppe $G(\cdot)$ enthält genau dann ein zentrales Element, wenn sämtliche α_i die Identität auf G sind.*

Definition 7. Ein Element a der $\langle \alpha_i, d \rangle$-Ableitung $G(o)$ von $G(\cdot)$ heißt zentral, falls es im Zentrum von $G(\cdot)$ und $G(o)$ liegt. D. h. es gilt $xa = ax$ und für jedes $i = 2, \dots, n-1$ $(x_1, \dots, x_{i-1}, a, x_i, \dots, x_{n-1})_0 = (a, x_i, \dots, x_{n-1})_0$.

Beweis. Nehmen wir zunächst an, daß $\alpha_i \doteq id$ $(i = 1, \dots, n-1)$, so ist 1 ein zentrales Element von $G(o)$, denn für $i = 2, \dots, n-1$ gilt $(1, x_1, \dots, x_{n-1})_0 = x_1 x_2 \dots x_{n-1} d = (x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_i, \dots, x_{n-1})_0$. Ist umgekehrt a ein zentrales Element, so muß $(1, \dots, 1, a, 1, \dots, 1)_0 = (a, 1, \dots, 1)_0$ sein. Nach Definition der $\langle \alpha_i, d \rangle$-Ableitung folgt daraus für $i = 1, \dots, n-1$ $a^{\alpha_i} = a$. Ist nun x ein beliebiges Element aus G, so folgt ebenso $(a, \dots, a, x, a, \dots, a)_0 = (x, a, \dots, a)_0 \Rightarrow x^{\alpha_i} = x$. Die Abbildungen α_i sind also alle die Identität auf G. Speziell trifft dieser Satz auf alle

---

[3]) Da wir die Abbildungen hier exponentiell schreiben, ist das Abbildungprodukt gemäß $x^{\alpha\beta} = (x^\alpha)^\beta$ erklärt.

kommutativen n-Gruppen zu, deren erzeugende Bigruppen nach Satz 1 ebenfalls kommutativ sind. In ihnen stimmt also das n-stellige Produkt stets mit der n-fachen und mit einem Faktor versehenen Ausführung des binären Produkts der erzeugenden Bigruppe überein.[4])

Wir werden uns nun der Frage nach dem Zusammenhang der Konstruktionen von Post und Hosszú zuwenden. Post ([4]) konstruierte bekanntlich zu jeder n-Gruppe eine assozierte Bigruppe und mit deren Hilfe eine umfassende Bigruppe, die die gegebene n-Gruppe als Restklasse nach der assozierten Bigruppe enthält. Die assozierte Bigruppe bestimmt dabei im Wesentlichen die Struktur der umfassenden Bigruppe. Wir werden die Post-Konstruktion der assoziierten binären Struktur hier wesentlich allgemeiner durchführen und gelangen zu dem Ergebnis:

Satz 9. *Ist $G(o)$ ein semi-assoziatives n-Gruppoid, so führt die Post-Konstruktion der assoziierten binären Struktur bereits auf eine Halbgruppe.*

Beweis. (Abgesehen von der größeren Allgemeinheit, gehen wir hier genauso vor, wie es Post bei der Konstruktion seiner assoziierten Bigruppen tut. Vergl. [4]) In der Menge G^{n-1} der geordneten $(n-1)$-Tupel von Elementen aus G erklären wir durch $\langle a_1, \dots, a_{n-1}\rangle \sim \langle b_1, \dots, b_{n-1}\rangle \Leftrightarrow \forall x \in G$: $(a_1, \dots, a_{n-1}, x) = =(b_1, \dots, b_{n-1}, x)$ eine Äquivalenzrelation. Sei $N := G^{n-1}/\sim$. Die Elemente von N (oder Äquivalenzklassen von G^{n-1}) bezeichnen wir mit $\overline{\langle a_1, \dots, a_{n-1}\rangle}$ und definieren eine binäre Operation in N durch die Forderung. $\overline{\langle a_1, \dots, a_{n-1}\rangle}\overline{\langle b_1, \dots, b_{n-1}\rangle} := =\overline{\langle (a_1, \dots, a_{n-1}, b_1)_0, b_2, \dots, b_{n-1}\rangle}$. Dabei müssen wir beweisen, daß die Definition des Produkts nicht von der Wahl der Repräsentanten der Äquivalenzklassen abhängt. Nehmen wir an, daß etwa

$\overline{\langle a_1, \dots, a_{n-1}\rangle} = \overline{\langle a'_1, \dots, a'_{n-1}\rangle}$ und $\overline{\langle b_1, \dots, b_{n-1}\rangle} = \overline{\langle b'_1, \dots, b'_{n-1}\rangle}$, so gilt für $x \in G$ stets $(b_1, \dots, b_{n-1}, x)_0 = (b'_1, \dots, b'_{n-1}, x)_0$ und deshalb auch

$$((a_1, \dots, a_{n-1}, b_1)_0, b_2, \dots, b_{n-1}, x)_0 = (a_1, \dots, a_{n-1}, (b_1, \dots, b_{n-1}, x)_0)_0$$
$$= (a'_1, \dots, a'_{n-1}, (b'_1, \dots, b'_{n-1}, x)_0)_0 = ((a'_1, \dots, a'_{n-1}, b'_1)_0, b'_2, \dots, b'_{n-1}, x)_0$$

D. h. $\overline{\langle a_1, \dots, a_{n-1}\rangle}\cdot\overline{\langle b_1, \dots, b_{n-1}\rangle} = \overline{\langle a'_1, \dots, a'_{n-1}\rangle}\cdot\overline{\langle b'_1, \dots, b'_{n-1}\rangle}$. Das Assoziativgesetz folgt so:

$$\overline{\langle a_1, \dots, a_{n-1}\rangle}\cdot(\overline{\langle b_1, \dots, b_{n-1}\rangle}\cdot\overline{\langle c_1, \dots, c_{n-1}\rangle}) =$$
$$= \overline{\langle (a_1, \dots, a_{n-1}, (b_1, \dots, b_{n-1}, c_1)_0)_0, c_2, \dots, c_{n-1}\rangle} =$$
$$= \overline{\langle ((a_1, \dots, a_{n-1}, b_1)_0, b_2, \dots, b_{n-1}, c_1)_0, c_2, \dots, c_{n-1}\rangle} =$$
$$= (\overline{\langle a_1, \dots, a_{n-1}\rangle}\cdot\overline{\langle b_1, \dots, b_{n-1}\rangle})\overline{\langle c_1, \dots, c_{n-1}\rangle}.$$

Also ist $N(\cdot)$ eine Halbgruppe.

---

[4]) Diese Verschärfung des Satzes von Hosszú für abelsche n-Gruppen läßt sich auch sehr einfach direkt beweisen. Ein solcher Beweis findet sich in [5].

E. L. Post zeigte in [4], daß man die assoziierte Bigruppe einer n-Gruppe zu einer Bigruppe erweitern kann, in der die assoziierte Bigruppe ein Normalteiler mit zyklischer Faktorgruppe der Ordnung $n-1$ und die Grundmenge der n-Gruppe selbst eine erzeugende Restklasse ist. Auf dieser Restklasse stimmt die n-fache Ausführung des binären Produkts mit dem n-stelligen Produkt überein. Den Zusammenhang dieser Beschreibungsweise der n-stelligen Gruppen mit der von Hosszú liefert der

Satz 10. *Ist die $\langle \alpha_i, d\rangle$-Ableitung $G(o)$ einer Bigruppe eine semiassoziative Quasi-n-Gruppe, so ist die zugehörige (im Sinne von Post) assoziierte Halbgruppe zu $G(\cdot)$ isomorph.*

Beweis. Die assoziierte Halbgruppe $N(\cdot)$ sei wie im Beweis von Satz 9 aus $G(o)$ konstruiert. Wir definieren die Abbildung $\varphi : \begin{cases} G(\cdot) \to N(\cdot) \\ a \to \langle \overline{a, 1, \ldots, 1, c} \rangle \end{cases}$, wo 1 das neutrale Element von $G(\cdot)$ und $c := (d^{-1})^{\alpha_{n-2}^{-1}}$ sei. Aus $\varphi(a) = \varphi(b)$ folgt $\forall x \in G$: $(a, 1, \ldots, 1, c, x)_0 = (b, 1, \ldots, 1, c, x)_0$ und da $G(o)$ Quasi-n-Gruppe ist impliziert dies $a = b$. Ist $\langle \overline{a_1, \ldots, a_{n-1}} \rangle \in N$ vorgegeben, so gilt für $b := a_1 a_2^{\alpha_1} \ldots a_{n-1}^{\alpha_{n-2}} d$ die Gleichung $\varphi(b) = \langle \overline{a_1, \ldots, a_{n-1}} \rangle$, denn für x aus G ist stets $(a_1, \ldots, a_{n-1}, x)_0 = = a_1 a_2^{\alpha_1} \ldots a_{n-1}^{\alpha_{n-2}} x^{\alpha_{n-1}} d = b d^{-1} x^{\alpha_{n-1}} d = (b, 1, \ldots, 1, c, x)_0$. D. h. φ ist eine Bijektion von G auf N. Schließlich ist

$$\varphi(a)\varphi(b) = \langle \overline{a, 1, \ldots, 1, c} \rangle \langle \overline{b, 1, \ldots, 1, c} \rangle = \langle \overline{(a, 1, \ldots, 1, c, b)_0, 1, \ldots, 1, c} \rangle$$

$$= \langle \overline{(a d^{-1} b^{\alpha_{n-1}} d), 1, \ldots, 1, c} \rangle = \langle \overline{ab, 1, \ldots, 1, c} \rangle \text{ (da nach Satz 3 } \alpha_{n-1} = d^* \text{ ist)}$$

$$= \varphi(ab). \text{ Also ist } \varphi \text{ sogar ein Isomorphismus von } G(\cdot) \text{ auf } N(\cdot).$$

Die Konstruktionsverfahren von Hosszu und Post sind also im Wesentlichen äquivalent. Aus Satz 10 folgt noch

Kor. 3. *Zu jeder n-Gruppe (oder allgemeiner zu jeder permutierend assoziativen Quasi n-Gruppe) existiert bis auf Isomorphie genau eine Bigruppe, aus der sie sich nach dem Verfahren von* Hosszú *konstruieren läßt.*

Literaturverzeichnis

[1] R. H. Bruck, A survey of binary systems, *Berlin—Göttingen—Heidelberg*, 1948.
[2] W. Dörnte, Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegriff, Math. Z. **29** (1928), 1—19.
[3] M. Hosszú, On the explicit form of n-group operations, *Publ. Math. Debrecen* **10** (1963), 88—92.
[4] E. L. Post, Polyadic groups, Trans. Amer. Math. Soc. **48** (1940), 208—350.
[5] J. Timm, Kommutative n-Gruppen, Diss. *Hamburg*, 1967.
[6] D. Zupnik, Polyadic semigroups, *Publ. Math. Debrecen* **14** (1967), 273—279.

(Eingegangen 2. August 1968.)