Über den Vergleich von Mittelwerten die mit Gewichtsfunktionen gebildet sind

Von L. LOSONCZI (Debrecen)

1. Einleitung

Es sei I ein offenes Intervall und $I^n = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) | x_i \in I;\ i = 1, \dots, n\}$ die Menge aller n-tupel von reellen Zahlen aus I. Es bezeichne Ω die Menge der in I stetigen und streng monotonen reelwertigen Funktionen, Q die Menge der in I definierten positiven Funktionen. Die Größe

$$\mathfrak{M}_\varphi(\mathbf{x})_f = \varphi^{-1}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\varphi(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)}\right) \tag{1}$$

wird der *mit der Gewichtsfunktion f gebildete Mittelwert von $\mathbf{x} \in I^n$ bezüglich der Abbildungsfunktion φ genannt* ($\varphi \in \Omega, f \in Q$, φ^{-1} ist die inverse Funktion von φ). In [5] hat Z. DARÓCZY das folgende Problem gestellt: welche sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Funktionen φ, $\psi \in \Omega$, f, $g \in Q$, damit die Ungleichung

$$\mathfrak{M}_\varphi(\mathbf{x})_f \leqq \mathfrak{M}_\psi(\mathbf{x})_g \tag{2}$$

für alle $\mathbf{x} \in I^n$; $n = 2, 3, \dots$ erfüllt ist. In den Spezialfällen $f = g$ und $\varphi = \psi$ hat Z. Daróczy dieses Problem vollständig gelöst. In [3] hat M. BAJRAKTAREVIC hinreichende Bedingungen für (2) gegeben. Ebenda wurde bewiesen, daß die Ungleichung

$$\frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)} + 2\frac{f'(t)}{f(t)} \leqq \frac{\psi''(t)}{\psi'(t)} + 2\frac{g'(t)}{g(t)} \quad (t \in I) \tag{3}$$

(unter gewissen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen) notwendig dafür ist, daß (2) für alle $\mathbf{x} \in I^n$ ($n \geqq 2$ fixierte natürliche Zahl) gilt. Die Eigenschaften der Mittelwerte vom Typ (1) wurden in [1], [2], [4] untersucht.

In dieser Arbeit werden wir uns mit der Ungleichung (2) beschäftigen. Wir zeigen, daß (2) auf den Fall $\varphi(t) = t$, $f(t) = 1$ reduziert werden kann (dh. $\mathfrak{M}_\varphi(\mathbf{x})_f$ arithmetisches Mittel ist). Im Fall der sog. Potenzmittelwerte, wo $I = (0, \infty)$, $\varphi(t) = t^a$, $f(t) = t^p$, $\psi(t) = t^b$, $g(t) = t^q$, $ab \neq 0$ sind, werden wir das Problem (2) fast vollständig erledigen.

2. Reduktion des Problems

Satz 1. *Es seien* $\varphi, \psi \in \Omega$, $f, g \in Q$. *Die Ungleichung*

$$\mathfrak{M}_\varphi(\mathbf{x})_f \leqq \mathfrak{M}_\psi(\mathbf{x})_g \quad (\mathbf{x} \in I^n;\ n=2, 3, \ldots) \tag{2}$$

gilt dann und nur dann, falls im Falle einer wachsenden Funktion φ

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} u_i \leqq \mathfrak{M}_\chi(\mathbf{u})_h \quad (\mathbf{u} \in J^m;\ m=2, 3, \ldots) \tag{4}$$

erfüllt ist, bzw. falls im Falle einer abnehmenden Funktion φ

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} u_i \geqq \mathfrak{M}_\chi(\mathbf{u})_h \quad (\mathbf{u} \in J^m;\ m=2, 3, \ldots) \tag{5}$$

gilt, wobei

$$J = \varphi(I) = \{\varphi(t) \mid t \in I\}, \tag{6}$$

$$\chi(t) = \psi\big(\varphi^{-1}(t)\big), \quad h(t) = \frac{g\big(\varphi^{-1}(t)\big)}{f\big(\varphi^{-1}(t)\big)} \quad (t \in J) \tag{7}$$

sind.

Beweis. Wir werden zeigen, daß die Ungleichung

$$\varphi^{-1}\left(\frac{\sum_{i=1}^{m} p_i f(y_i)\varphi(y_i)}{\sum_{i=1}^{m} p_i f(y_i)}\right) \leqq \psi^{-1}\left(\frac{\sum_{i=1}^{m} p_i g(y_i)\psi(y_i)}{\sum_{i=1}^{m} p_i g(y_i)}\right) \quad (y \in I^m, \mathbf{p} \in R_+^m;\ m=2, 3, \ldots) \tag{8}$$

aus (2) folgt, wobei $R_+ = (0, \infty)$ ist. Mit Hilfe dieser Behauptung ergibt sich leich unseren Satz (mit einer entsprechenden Wahl von p_i).

Um (8) zu zeigen, setzen wir in (2) $n = k_1 + \ldots + k_m$, $x_1 = \ldots = x_{k_1} = y_1$, $x_{k_1+1} = \ldots = x_{k_1+k_2} = y_2, \ldots,\ x_{k_1+\ldots+k_{m-1}+1} = \ldots = x_{k_1+\ldots+k_m} = y_m$, wo $k_1, \ldots, k_m$ beliebige natürliche Zahlen sind. Dann ist

$$\varphi^{-1}\left(\frac{\sum_{i=1}^{m} \frac{k_i}{l} f(y_i)\varphi(y_i)}{\sum_{i=1}^{m} \frac{k_i}{l} f(y_i)}\right) \leqq \psi^{-1}\left(\frac{\sum_{i=1}^{m} \frac{k_i}{l} g(y_i)\psi(y_i)}{\sum_{i=1}^{m} \frac{k_i}{l} g(y_i)}\right)$$

1

für beliebige natürliche Zahlen l. Dies bedeutet, für jede positive rationale Zah p_i gilt die Ungleichung (8). Weil φ^{-1}, ψ^{-1} stetige Funktionen sind, wird (8) für beliebiges $p_i \in R_+ (i=1, \ldots, m)$ richtig, w. z. b. w.

Bemerkung. Ist ψ eine wachsende Funktion, $\chi(t)>0$ für $t\in J$, so ist (2) mit der symmetrischen Ungleichung

$$\frac{k\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}u_i\right)}{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}k(u_i)} \leqq \frac{h\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}u_i\right)}{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}h(u_i)} \quad (\mathbf{u}\in J^m;\ m=2,3,\ldots) \tag{9}$$

äquivalent, wo $k(t)=h(t)\chi(t)$ ist. Dies ergibt sich aus der (mit (2) äquivalenten) Ungleichung

$$\varphi^{-1}\left(\frac{\sum_{i=1}^{m}u_i}{m}\right) \leqq \psi^{-1}\left(\frac{\sum_{i=1}^{m}h(u_i)\chi(u_i)}{\sum_{i=1}^{m}h(u_i)}\right).$$

3. Potenzmittelwerte

Es seien $a\neq 0$, $b\neq 0$, p, q beliebige reelle Zahlen, $I=R_+=(0,\infty)$. Auf Grund der Bemerkung des Satzes 1 genügt es statt der Ungleichung

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{a+p}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^{p}}\right)^{\frac{1}{a}} \leqq \left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{b+q}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^{q}}\right)^{\frac{1}{b}} \quad (\mathbf{x}\in R_+^n;\ n=2,3,\ldots) \tag{10}$$

im Falle $b>0$ die (9) entsprechende Ungleichung

$$\frac{\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}u_i\right)^{\alpha}}{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}u_i^{\alpha}} \leqq \frac{\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}u_i\right)^{\beta}}{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}u_i^{\beta}} \quad (\mathbf{u}\in R_+^m;\ m=2,3,\ldots) \tag{11}$$

zu untersuchen, wobei $\alpha=\dfrac{q-p+b}{a}$, $\beta=\dfrac{q-p}{a}$ sind. Mit den Bezeichnungen $\tilde{u}=\sum_{i=1}^{m}\dfrac{u_i}{m}$, $z_i=\dfrac{u_i}{\tilde{u}}$ erhalten wir aus (11) die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{m}z_i^{\alpha} \geqq \sum_{i=1}^{m}z_i^{\beta} \quad \text{für} \quad z_i>0,\ \sum_{i=1}^{m}z_i=m,\ m=2,3,\ldots\,. \tag{12}$$

Nach der Taylorschen Formel

$$z_i^{\alpha}-z_i^{\beta}=(\alpha-\beta)(z_i-1)+\frac{1}{2}\left[\alpha(\alpha-1)\xi_i^{\alpha-2}-\beta(\beta-1)\xi_i^{\beta-2}\right](z_i-1)^2,$$

wobei ξ_i zwischen 1 und z_i liegt. Damit erhalten wir aus (12) ($m=2$, $x_i\to 1$) daß

$$\alpha(\alpha-1) \geqq \beta(\beta-1) \tag{13}$$

ist. Also ist *die Bedingung* (13) *notwendig für die Gültigkeit von* (11). Führen wir die folgenden Bezeichnungen ein:

$$D_0=\{(\alpha,\beta)|\alpha(\alpha-1)\geqq\beta(\beta-1)\},$$

$$D_1=\{(\alpha,\beta)|\alpha\geqq 1,\ 0\leqq\beta\leqq 1\},\quad D_5=\{(\alpha,\beta)|\alpha>1,\ 1-\alpha\leqq\beta<0\},$$

$$D_2=\{(\alpha,\beta)|\alpha\leqq 0,\ 0\leqq\beta\leqq 1\},\quad D_6=\{(\alpha,\beta)|\alpha<0,\ 1<\beta\leqq 1-\alpha\},$$

$$D_3=\{(\alpha,\beta)|\alpha>1,\ 1<\beta\leqq\alpha\},\quad D_7=\{(\alpha,\beta)|\tfrac{1}{2}\leqq\alpha<1,\ 1-\alpha\leqq\beta\leqq\alpha\},$$

$$D_4=\{(\alpha,\beta)|\alpha<0,\ \alpha\leqq\beta<0\},\quad D_8=\{(\alpha,\beta)|0<\alpha<\tfrac{1}{2},\ \alpha\leqq\beta\leqq 1-\alpha\}.$$

Es ist klar, daß $D_0=\bigcup_{i=1}^{8} D_i$, $D_k\cap D_l=\emptyset$ für $k\neq l$, $k, l=1, 2, \dots, 8$.

Liegt (α,β) in D_5, so gilt (11) nicht für alle $\mathbf{u}\in R_+^m$. Diese Behauptung kann auf Grund der Limesrelationen $\lim_{x\to 0+0} x^\alpha=0$, $\lim_{x\to 0+0} x^\beta=+\infty$ bewiesen werden. Mit Beispielen kann man zeigen, daß die Mengen D_6, D_7, D_8 innere Punkte haben, in denen (11) nicht für alle $\mathbf{u}\in R_+^m$ $m=2, 3, \dots$ gilt. Für die anderen Mengen D_i ($i=1, 2, 3, 4$) ist der folgende Satz richtig.

Satz 2. *Gilt die Ungleichung* (11), *dann liegt* (α,β) *in* D_0. *Liegt* (α,β) *in* $\bigcup_{i=1}^{4} D_i$, *dann gilt die Ungleichung* (11).

Beweis. Die Richtigkeit der ersten Behauptung haben wir schon gezeigt.

Ist $(\alpha,\beta)\in D_1\cup D_2$, dann ist t^α konvex, t^β konkav und darüber hinaus gilt (11).

Ist $(\alpha,\beta)\in D_3$, dann haben wir wegen $\alpha>1$, $1<\beta\leqq\alpha$

$$1=\frac{\sum_{i=1}^m z_i}{m}\leqq\left(\frac{\sum_{i=1}^m z_i^\beta}{m}\right)^{\frac{1}{\beta}}\leqq\left(\frac{\sum_{i=1}^m z_i^\alpha}{m}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \tag{14}$$

weil die Funktion $M_t(\mathbf{z})=\left(\frac{\sum_{i=1}^m z_i^t}{m}\right)^{\frac{1}{t}}$ in t wachsend ist (S. [6]). Aus (14) folgt (wegen $\alpha\beta>0$, bzw. $\beta>1$)

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^m z_i^\beta}{m}\right)^{\alpha}\leqq\left(\frac{\sum_{i=1}^m z_i^\alpha}{m}\right)^{\beta}\quad\text{bzw.}\quad 1=1^\beta\leqq\frac{\sum_{i=1}^m z_i^\beta}{m}, \tag{15}$$

so dass

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^m z_i^\beta}{m}\right)^{\beta}\leqq\left(\frac{\sum_{i=1}^m z_i^\beta}{m}\right)^{\alpha}. \tag{16}$$

Vergleichen wir (15) und (16), so erhalten wir wegen $\beta > 0$

$$\sum_{i=1}^{m} z_i^{\alpha} \geqq \sum_{i=1}^{m} z_i^{\beta} \quad \text{für} \quad z_i > 0, \ \sum_{i=1}^{m} z_i = m, \quad m = 2, 3, \ldots$$

und darüber hinaus gilt (11).

Ist $(\alpha, \beta) \in D_4$, d. h. $\alpha < 0$, $\alpha \leqq \beta < 0 < 1$, dann gilt

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{m} z_i^{\alpha}}{m}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leqq \left(\frac{\sum_{i=1}^{m} z_i^{\beta}}{m}\right)^{\frac{1}{\beta}} \leqq \frac{\sum_{i=1}^{m} z_i}{m} = 1, \tag{17}$$

woraus wegen $\alpha\beta > 0$, bzw. $\beta < 0$

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{m} z_i^{\alpha}}{m}\right)^{\beta} \leqq \left(\frac{\sum_{i=1}^{m} z_i^{\beta}}{m}\right)^{\alpha} \quad \text{bzw.} \quad 1 = 1^{\beta} \leqq \frac{\sum_{i=1}^{m} z_i^{\beta}}{m} \tag{18}$$

folgt. Daraus erhalten wir

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{m} z_i^{\beta}}{m}\right)^{\alpha} \leqq \left(\frac{\sum_{i=1}^{m} z_i^{\beta}}{m}\right)^{\beta} \tag{19}$$

das heißt auf Grund (18), (19) und $\beta < 0$ gilt (12), was gleichbedeutend mit (11) ist.

Kehren wir jetzt zurück zur Ungleichung (10). Es sei

$$E_i = \left\{ (a, b, p, q) \;\middle|\; \begin{array}{c} a \neq 0, b > 0, \left(\dfrac{q-p+b}{a}, \dfrac{q-p}{a}\right) \in D_i \\ \text{oder } a \neq 0, b < 0, \left(\dfrac{q-p}{a}, \dfrac{q-p+b}{a}\right) \in D_i \end{array} \right\} \quad (i = 0, 1, \ldots, 8)$$

Aus dem Satz 2 folgt der

Satz 3. *Gilt die Ungleichung*

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{a+p}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{p}}\right)^{\frac{1}{a}} \leqq \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{b+q}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{q}}\right)^{\frac{1}{b}} \quad (\mathbf{x} \in R_+^n;\, n = 2, 3, \ldots) \tag{10}$$

dann ist $(a, b, p, q) \in E_0$. *Liegt* (a, b, p, q) *in* $\bigcup_{i=1}^{4} E_i$, *dann gilt die Ungleichung* (10), *während* (10) *nicht in jedem Punkt* (a, b, p, q) *von* $\bigcup_{i=5}^{8} E_i$ *erfüllt ist.*

Literatur

[1] J. Aczél—Z. Daróczy, Über verallgemeinerte quasilineare Mittelwerte, die mit Gewichtsfunktionen gebildet sind, *Publ. Math. Debrecen* **10** (1963), 171—190.
[2] M. Bajraktarevič, Sur une équation fonctionnelle aux valeurs moyennes, *Glasnik Mat. Fiz. i Astr.* **13** (1958), 243—248.
[3] M. Bajraktarevič, Vergleichbarkeit der mit Gewichtsfunktionen gebildeten Mittelwerte. *Studia Sci. Math. Hungar.* **4** (1969), 3—8.
[4] E. F. Beckenbach, A class of mean value functions, *Amer. Math. Monthly.* **57** (1950), 1—6.
[5] Z. Daróczy, Einige Ungleichungen über die mit Gewichtsfunktionen gebildeten Mittelwerte, *Monatsh. Math.* **68** (1964), 102—112.
[6] G. H. Hardy—J. E. Littlewood—G. Pólya, Inequalities, *Cambridge*, 1952.

(Eingegangen am 10. Oktober 1968.)