Ein neuer Beweis des Linnikschen Nullstellensatzes

Von W. HANEKE (Marburg/Lahn)

1. Es sei $p(k, l)$ die kleinste Primzahl in der arithmetischen Reihe

$$kn+l, \quad (l, k)=1, \quad 0<l<k \geqq 3, \qquad (n=0, 1, 2, \ldots).$$

Man verdankt YU. V. LINNIK (vgl. [2] und [3]) die Abschätzung

$$p(k, l) \ll k^C \tag{1. 1}$$

mit einer von k und l unabhängigen Zahl $C>0$. Zur Herleitung bewies er zwei fundamentale Sätze über die Nullstellenverteilung der Dirichletschen L-Funktionen, einen Dichte- und einen Nullstellensatz. Während der Dichtesatz ein Maß für die Zahl der Nullstellen der L-Funktionen in der Umgebung von $s=1$ angibt (vgl. [5], 331), besagt der Nullstellensatz [5], 349, Satz 3. 1]:

Es gibt positive Konstanten A_1 und A_2 mit folgender Eigenschaft: Es sei $k \geqq 3$ und β_1 die Ausnahmenullstelle einer L-Funktion $L(s, \chi_1)$ zu einem reellen Charakter χ_1 mod k, welche in

$$1-\frac{A_1}{\log k}<\sigma<1, \quad t=0$$

liegen möge: es möge $\delta_1 = 1-\beta_1$ gesetzt werden. Dann liegen im Bereich

$$\sigma>1-\frac{A_2}{\Omega}\log\frac{eA_1}{\delta_1\Omega}, \quad \delta_1\Omega<A_1, \quad \Omega=\log\bigl(k(|t|+1)\bigr) \tag{1. 2}$$

keine Nullstellen $\neq \beta_1$ irgendeiner der mit Charakteren mod k gebildeten L-Funktionen.

In der Literatur gibt es bisher nur zwei wesentlich verschiedene Methoden, den Dichte- und den Nullstellensatz zu beweisen: Die von Linnik entwickelte und später von K. A. RODOSSKII ([6]) vereinfachte und P. Turáns diophantische Abschätzungsmethode [7]. Mit diesem Verfahren bewies TURAN ([8]) den Dichtesatz und S. KNAPOWSKI ([1]) den Nullstellensatz. Beide Autoren verwendeten Linienintegrale der Gestalt

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\sigma_0)} e^{Aw}\left(\frac{e^{Bw}-e^{-Bw}}{2Bw}\right)^r dw \qquad (A, B>0;\ r=1, 2, \ldots)$$

S. Knapowski zog außerdem Linienintegrale anderer Bauart zu Hilfe.

Wir wollen in dieser Arbeit den Nullstellensatz mit der Turánschen Methode aufs neue beweisen. Dazu verwenden wir nur Integrale der Form

$$(1.3)\qquad J_n(x,\varepsilon)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\sigma_0)}\frac{x^s}{\sin^n\frac{\pi s}{\varepsilon}}\,ds\qquad (n=1,2,\dots;\ \varepsilon>0,\ x>0)$$

Gewisse arithmetische Überlegungen, die in den Beweisen von Knapowski und Rodosskii notwendig werden (vgl. [1], 176—177, [6], 347—349, [5], 359—362) können wir mit Hilfe der Funktionen $J_n(x,\varepsilon)$ etwas einfacher durchführen.

Die im folgenden auftretenden Konstanten $c_1, c_2, \dots$ bzw. die 0- und $\ll$-Konstanten sind positiv, absolut und konstruierbar; χ bezeichnet einen beliebigen Charakter $\operatorname{mod} k$, χ_0 den Hauptcharakter, χ_1 einen reellen Ausnahmecharakter, und damit werde

$$L(s,\chi_1)=L(s)$$

gesetzt.

2. Hilfssatz 1. *Es sei* $\varepsilon<1$, $g=[1/\varepsilon]$, $g\varepsilon<\sigma_0<(g+1)\varepsilon$, $f(s)$ *auf der Geraden* (σ_0) *integrierbar und dort*

$$f(s)\ll Me^{|t|}\quad (M>0).$$

Dann gilt

$$(2.1)\qquad \frac{1}{a\pi i}\int\limits_{\substack{(\sigma_0)\\ |t|>r}}\frac{f(s)}{\sin^n\frac{\pi s}{\varepsilon}}\,ds\ll\frac{M\varepsilon}{\sin^n\frac{\pi\sigma_0}{\varepsilon}}\,e^{-\max\left(\frac{r}{\varepsilon}-1,0\right)n}$$

für alle $r\geqq 0$ *mit* $r\ll\varepsilon$

und insbesondere

$$(2.2)\qquad J_n(x,\varepsilon)\ll\frac{x^{\sigma_0}\varepsilon}{\left|\sin^n\frac{\pi\sigma_0}{\varepsilon}\right|}\quad \text{für alle } x>0.$$

Ferner gilt

$$(2.3)\qquad J_1(x,\varepsilon)=(-1)^g\frac{\varepsilon}{\pi}\frac{x^{g\varepsilon}}{1+x^{-\varepsilon}}\quad \text{für alle } x>0.$$

Beweis. Wegen

$$\operatorname{Re}(\sin s)=(\sin\sigma)\cos it,\ \cos it=\frac{e^t+e^{-t}}{2}\geqq\omega(t),$$

$$\omega(t):=\max\left(1,\frac{e^{|t|}}{2}\right)$$

ist das Integral auf der linken Seite von (2.1)

$$\ll\frac{M}{\left|\sin^n\frac{\pi\sigma_0}{\varepsilon}\right|}J'\ \text{mit}\ J'=\int\limits_r^\infty e^t\omega^{-n}\left(\frac{\pi t}{\varepsilon}\right)dt.$$

Wegen $\varepsilon \leqq 1$ ist

$$J' \ll \varepsilon \int_{r/\varepsilon}^{\infty} e^{t/\pi}{}_{\omega}{}^{-n}(t)\, dt.$$

Im Falle $r' := \frac{r}{\varepsilon} - 1 \geqq 0$ schätzen wir dies durch

$$O\left(\varepsilon 2^n \int_{r'+1}^{\infty} e^{(1/\pi - n)t}\, dt\right)$$

und im Falle $r' < 0$ durch

$$O\left(\varepsilon \left[\int_0^1 dt + 2^n \int_1^{\infty} e^{(1/\pi - n)t}\, dt\right]\right) ab$$

und erhalten so unmittelbar (2. 1).

(2. 2) folgt daraus nach (1. 3) sofort mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes. Im Falle $n=1$, $x>1$ liefert der Residuensatz

$$J_1(x, \varepsilon) = \sum_{\nu=-\infty}^{g} \operatorname*{Res}_{s=\nu\varepsilon} \frac{x^s}{\sin \frac{\pi s}{\varepsilon}} = \sum_{\nu=-\infty}^{g} (-1)^{\nu} \frac{\varepsilon}{\pi} x^{\nu\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\pi} (-1)^g x^{g\varepsilon} \frac{1}{1-(-x^{-\varepsilon})}.$$

Das ist aber (2. 3) im Falle $x>1$. Der Fall $0<x\leqq 1$ ergibt sich daraus mit dem Prinzip der analytischen Fortsetzung.

Wir bemerken an dieser Stelle, daß man ohne Mühe

$$(-1)^{n[1/\varepsilon]} J_n(x, \varepsilon) \geqq 0 \text{ für alle } x>0$$

zeigen kann. Mit dieser Ungleichung könnte man den nachstehenden Beweis erheblich vereinfachen, wenn man (1. 2) nur mit $L(1, \chi_1)$ an Stelle von δ_1 beweisen wollte.

Hilfssatz 2. *$z_1, \ldots, z_N$ seien beliebige komplexe Zahlen mit*

$$\max_{1\leqq j \leqq N} |z_j| \geqq 1.$$

Dann gilt für alle natürlichen m

$$\max_{\substack{m \leqq \nu \leqq m+N \\ \nu \text{ ganz}}} |z_1^{\nu} + \ldots + z_N^{\nu}| > \left(\frac{N}{22(m+N)}\right)^N.$$

Beweis. Vgl. [9], S. 311, (1. 7).

Hilfssatz 3. *Die Anzahl der Nullstellen von $L(s, \chi)$ in*

$$\{s: |s-(1+i\gamma)| \leqq r\} \qquad (\gamma, r \text{ reell})$$

ist

$$< c_1 r \log\bigl(k(|\gamma|+2+r)\bigr), \textit{ falls } r \geqq \frac{1}{\log\bigl(k(|\gamma|+2)\bigr)}$$

Beweis. Vgl. [5], S. 331, 332 und Satz 3. 3 (S. 220).

Hilfssatz 4. *Für jeden Charakter χ und alle reellen γ gilt*

$$\frac{L'}{L}(s+i\gamma,\chi) = \sum_{\varrho^*\in B_r}{}' \frac{1}{s-\varrho^*} + O(\Omega), \text{ falls } \frac{1}{\Omega} \leqq r \leqq \frac{1}{2}, \ s\in B_{r/2}.$$

Dabei ist

$$B_r = \{s: |1-\sigma| \leqq r, |t| \leqq r\}, \ \Omega = \log\left(k(|\gamma|+2)\right),$$

und $\sum'$ bedeutet die Summation über alle Nullstellen $\varrho^* = \beta^*+i\gamma^*$ von $L(s+i\gamma,\chi)$ mit $0\leqq\beta^*<1$.

Beweis. Nach [5], S. 225, (4. 1) und Satz 4. 1 gilt wegen $r\ll 1$ für $s\in B_{r/2}$

$$\frac{L'}{L}(s+i\gamma,\chi) = \sum_{\substack{\varrho^* \\ |\gamma^*-t|\leqq 1}}{}' \frac{1}{s-\varrho^*} + O(\Omega).$$

Für $s\in B_{r/2}$, $\varrho^*\in B_r$ ist $|\gamma^*-t| \leqq \frac{3}{2}r < 1$, also folgt

$$\frac{L'}{L}(s+i\gamma,\chi) = \sum_{\varrho^*\in B_r}{}' \frac{1}{s-\varrho^*} + R_O(s) + O(\Omega) \text{ für } s\in B_{r/2} \tag{2. 4}$$

mit

$$R_O(s) = \sum_{\substack{\varrho^*\notin B_r \\ |\gamma^*-t|\leqq 1}}{}' \frac{1}{s-\varrho^*}.$$

Für $s\in B_{r/2}$, $\varrho^*\notin B_r$ hat man

$$|1-\varrho^*|\geqq r, \left|\frac{1-\varrho^*}{s-\varrho^*}\right| \leqq \left|1+\frac{1-s}{s-\varrho^*}\right| \leqq 1+\frac{r/2+r/2}{r/2} \ll 1.$$

Damit ergibt sich für $s\in B_{r/2}$, $r\geqq 1/\Omega$ nach Hilfssatz 3

$$|R_0(s)-R_0(1)| \ll \sum_{\substack{\varrho^* \\ |1-\varrho^*|\geqq r}}{}' \frac{|1-s|}{|1-\varrho^*|^2} \ll r\sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{2^\nu r\leqq|1-\varrho^*|<2^{\nu+1}r}{}' \frac{1}{|1-\varrho^*|^2} \ll$$

$$\ll r\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{2^{\nu+1}r(\Omega+\nu)}{(2^\nu r)^2} \ll \Omega,$$

und insbesondere

$$|R_O(s)| \ll \Omega + |R_O(1+r/2)| \quad \text{für} \quad s\in B_{r/2}. \tag{2. 5}$$

Andererseits gilt nach (2. 4) und Hilfssatz 3 für $\sigma = 1+r/2$, $r\geqq 1/\Omega$

$$R_O(\sigma) \ll \left|\frac{L'}{L}(\sigma+i\gamma,\chi)\right| + O\left(\frac{r\Omega}{r}\right) + O(\Omega) \ll \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)n^{-\sigma} + O(\Omega) \ll \frac{1}{\sigma-1} + O(\Omega) \ll \Omega.$$

Mit (2. 5) folgt daraus die Behauptung.

3. Beweis *des Nullstellensatzes.* Für einen Charakter χ und reelle β, γ sei

$$L(\beta+i\gamma,\chi)=0,\quad \frac{1}{2}<\beta<1, \tag{3. 1}$$

und es existiere ein $\beta_1\in(1/2,1)$ mit

$$L(\beta_1)=0,\quad \beta_1\neq\beta, \tag{3. 2}$$

$$\delta_1:=1-\beta_1<\frac{C_3}{\Omega},\quad \Omega:=\log\big(k(|\gamma|+2)\big). \tag{3. 3}$$

Die Konstante c_3 denken wir uns im folgenden immer genügend klein gewählt. Nach [5], S. 130, Satz 6. 9 a) folgt zunächst

$$f(s):=\prod_{l=0,1}L(s+i\gamma,\chi\chi_l)\neq 0 \text{ in } 1-\frac{C_3}{\Omega}\leqq\sigma\leqq 1,\ |t|\leqq 1,\ s\neq\beta_1-i\gamma, \tag{3. 4}$$

und

$$\delta:=1-\beta\geqq 2\delta_1. \tag{3. 5}$$

Für ein natürliches g sei

$$\varepsilon=\left(\frac{1}{2}+g\right)^{-1},\quad \text{also}\quad g\varepsilon=1-\frac{\varepsilon}{2}. \tag{3. 6}$$

Für ein $y>1$ und eine natürliche Zahl ν setzen wir nun

$$S_\nu=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\sigma_0)}\frac{f'}{f}(s)\left(\frac{y}{\sin\frac{\pi s}{\varepsilon}}\right)^{\nu}ds\quad (1<\sigma_0<(g+1)\varepsilon) \tag{3. 7}$$

und zur Abkürzung

$$x=y^\nu. \tag{3. 8}$$

Mit Hilfssatz 1 (2. 2) und (1. 3) erhält man die obere Abschätzung

$$\begin{aligned}|S_\nu|&\ll\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)\big(1+\chi_1(n)\big)\Lambda(n)}{n^{i\gamma}}J_\nu\left(\frac{x}{n},\varepsilon\right)\right|\ll\sum_p(1+\chi_1(p))(\log p)\left|J_\nu\left(\frac{x}{p},\varepsilon\right)\right|+\\&\quad+2\sum_{m=2}^{\infty}\sum_p(\log p)\left|J_\nu\left(\frac{x}{p^m},\varepsilon\right)\right|\ll\varepsilon\sum_{p\leqq\sqrt{x}}c_4^\nu\left(\frac{x}{p}\right)^{1-\varepsilon/4}\log p+\\&\quad+\varepsilon(\log x)\sum_{\sqrt{x}<p\leqq x^2}\big(1+\chi_1(p)\big)\frac{x}{p}+\varepsilon\sum_{p>x^2}c_4^\nu\left(\frac{x}{p}\right)^{1+\varepsilon/4}\log p+\\&\quad+\varepsilon\sum_{m=2}^{\infty}c_4^\nu\sum_p(\log p)\left(\frac{x}{p^m}\right)^{1-\varepsilon/4}.\end{aligned} \tag{3. 9}$$

Hierzu betrachten wir

$$\Sigma(X):=\sum_{n\leqq X}a_n n^{-\beta_1},\quad \Sigma^*(X):=-\pi\sum_{n=1}^{\infty}a_n n^{\delta_1}J_1\left(\frac{X}{n},1\right)\quad (X>0),$$

wo die a_n durch

$$Z(s) := \zeta(s)L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}, \quad \text{also} \quad a_n = \sum_{d/n} \chi_1(d) \geqq 0$$

definiert sind. Nach Hilfssatz 1 (2. 3) gilt

$$X'^{-1}\big(\Sigma^*(X') - R_1(X')\big) \ll \Sigma(X) \ll X^{-1}\Sigma^*(X) \text{ für } 1 \leqq X' \leqq X \tag{3.10}$$

mit

$$R_1(X') = \sum_{n>X} a_n n^{\delta_1} \left| J_1\left(\frac{X'}{n}, 1\right) \right|.$$

Nun ist nach (1. 3)

$$\Sigma^*(X) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\sigma_1)} \frac{\pi}{-\sin \pi s} X^s Z(s-\delta_1) ds \quad (1 < \sigma_1 < 3/2),$$

und der darin auftretende Integrand ist in $1/4 \leqq \sigma \leqq \sigma_1$ wegen (3. 2) bis auf einen Pol erster Ordnung bei $s = 1 + \delta_1$ mit dem Residuum

$$\frac{\pi L(1)}{-\sin \pi(1+\delta_1)} X^{1+\delta_1}$$

holomorph. Wegen

$$Z(s) \ll \big(k(|t|+2)^2\big)^{3/4} \quad \text{für} \quad \sigma = 1/4 \tag{3.11}$$

(vgl. [5], S. 219, Satz 3. 1) folgt daraus mit dem Residuensatz

$$\Sigma^*(X) = X^{1+\delta_1} \frac{L(1)}{\delta_1} \big(1 + O(\delta_1)\big) + O(X^{1/4} k^{3/4}) \text{ für } X \geqq 2, \ \delta_1 \log X \leqq 1. \tag{3.12}$$

Damit hat man bei genügend großem c_5 wegen (3. 3) und (3. 10), $a_1 \geqq 1$

$$1 \leqq \Sigma(c_5 k) \leqq c_6 \frac{L(1)}{\delta_1} + \frac{1}{2},$$

insbesondere also

$$\frac{L(1)}{\delta_1} \gg 1. \tag{3.13}$$

Andererseits folgt wegen $0 \leqq a_n \leqq \theta(n) \ll n^{1/16}$, $\delta_1 < 1/16$ mit Hilfssatz 1 (2. 2) für $1 \leqq X' \leqq X$

$$R_1(X') \ll \sum_{n>X} n^{1/8} \left(\frac{X'}{n}\right)^{3/2} \ll X'^{3/2} X^{1/8-1/2},$$

also wegen (3. 10), (3. 12) und (3. 13)

$$\Sigma(X) \gg X'^{\delta_1} \frac{L(1)}{\delta_1} + O\big((k/X')^{3/4}\big) - X'^{1/2} X^{-3/8} \gg \frac{L(1)}{\delta_1} \gg 1 \text{ für } X' = c_5 k, \ X = c_5 k^2.$$

Damit haben wir wegen (3. 3)

$$\sum_{n \leqq c_5 k^2} \frac{a_n}{n} \gg \frac{L(1)}{\delta_1} \gg 1. \tag{3.14}$$

Auf Grund der Multiplikativität der a_n ist

$$\sum_{m \leqq \sqrt{x}} \frac{a_m}{m} \sum_{\sqrt{x} < p \leqq x^2} \frac{a_p}{p} \leqq \sum_{\sqrt{x} < n \leqq x^3} \frac{a_n}{n}. \tag{3.15}$$

Wegen

$$\frac{1}{1+u} - \frac{1}{1+v} = \frac{v-u}{(1+u)(1+v)} \geqq \frac{1}{2} \frac{v}{2(1+v)} \geqq \frac{1}{8} \text{ für } 0 < u \leqq 1 \leqq v,\ 2u \leqq v$$

ist nach Hilfssatz 1 (2. 3) und (1. 3)

$$\sum_{Y < n < X} \frac{a_n}{n} \leqq 8 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+n/X} - \frac{1}{1+n/Y} \right) \frac{a_n}{n}$$

und daher

$$\ll \frac{1}{2\pi i} \int_{(\sigma_1)} \pi \frac{X^{s-1} - Y^{s-1}}{-\sin \pi s} Z(s)\, ds \text{ für } 1 < \sigma_1 < 2,\ X \geqq 2Y \geqq 2.$$

Dies ist aber nach dem Residuensatz und (3. 11) unter der zusätzlichen Voraussetzung $\delta_1 \log X \leqq 1$

$$\ll L(1) \log \frac{X}{Y} + O\left(\left(\frac{k}{Y} \right)^{3/4} \right). \tag{3.16}$$

Wir setzen nun

$$x \geqq (c_5 k^2)^2, \quad Y = \sqrt{x}, \quad X = x^3, \quad \delta_1 \log x \leqq 1/3 \tag{3.17}$$

voraus.

Da nach Page [4]

$$L(1) \gg \frac{1}{\sqrt{k} \log^2 k}$$

ist, folgt mit (3. 14), (3. 15) und (3. 16)

$$\sum_{\sqrt{x} < p \leqq x^2} \frac{a_p}{p} \ll \delta_1 \log x. \tag{3.18}$$

Der Primzahlsatz liefert für $0 < \eta \leqq 1,\ X \geqq 3$

$$\sum_{p \leqq X} p^{\eta - 1} \log p \ll \frac{X^\eta}{\eta}, \qquad \sum_{p > X} p^{-\eta - 1} \log p \ll \frac{X^{-\eta}}{\eta};$$

ferner gilt

$$\sum_{m \geqq 2} \sum_{p} \frac{\log p}{p^{3m/4}} \ll \sum_{p} \frac{\log p}{p^{3/2}} \ll 1.$$

In Verbindung mit (3. 9) und (3. 18) folgt nunmehr

$$S_\nu \ll x\big((\varepsilon \log x)\, \delta_1 \log x + O(c_4^\nu x^{-\varepsilon/8})\big). \tag{3.19}$$

Nun sei bei genügend großem c_7

$$\left\{\begin{aligned} \varepsilon &= c_7\,\delta \\ r &= c_7\,\varepsilon < 1/2 \\ 2c_7\,\Omega \geqq \log x &\geqq c_7\,\Omega. \end{aligned}\right. \tag{3.20}$$

Hilfssatz 1 (2. 1) werde mit $\sigma_0 = 1 + 1/\log x$, $r/2$ an Stelle von r und f'/f an Stelle von f angewendet. Ferner setzen wir die durch Hilfssatz 4 gegebene Darstellung von f'/f in (3. 7) ein und berücksichtigen Hilfssatz 3. Die dazu notwendige Vorausetzung $r \geqq 1/\Omega$ ist mit (3. 4) und (3. 20) erfüllt. Wir bemerken noch

$$1 - i\gamma \in B_r \Leftrightarrow \beta_1 - i\gamma \in B_r \quad (\text{vgl. } (3.\,5))$$

und

$$\frac{f'}{f}(s) \ll \log x \text{ für } \sigma = \sigma_0.$$

Bezeichnet nun $\sum''$ die Summation über alle Nullstellen

$$\varrho^* = \beta^* + i\gamma^* \neq \beta_1 - i\gamma \quad \text{von} \quad f(s) \quad \text{mit} \quad 0 \leqq \beta^* < 1,$$

so ergibt sich wegen (3. 20)

$$|S_\nu| \geqq |S'_\nu| - \sum_{\substack{\varrho^* \in B_r \\ \beta^* < 1 - 2\delta}}'' |\Phi_\nu(\varrho^*)| - \tag{3.21}$$

$$- \int_{\beta_1}^{1} \left| \frac{x^{\sigma - i\gamma}}{\sin^\nu \frac{\pi}{\varepsilon}(\sigma - i\gamma)} \left(\log x - \frac{\nu\pi}{\varepsilon} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\varepsilon}(\sigma - i\gamma) \right) \right| d\sigma + O\left(c_4^\nu\, x (\log x) r \left[e^{-r\nu/2\varepsilon} + x^{-2\delta}\right]\right)$$

mit

$$S'_\nu = \sum_{\substack{\varrho^* \\ \beta^* \geqq 1 - 2\delta}}'' \tilde{z}_{\varrho^*}^\nu, \qquad \tilde{z}_{\varrho^*} := \frac{y^{\varrho^*}}{\sin \frac{\pi}{\varepsilon} \varrho^*}, \quad (\text{vgl. } (3.\,8))$$

$$\Phi_\nu(\varrho^*) := \frac{1}{2\pi i} \int_{(\sigma_0)} \frac{x^s}{(s - \varrho^*) \sin^\nu \frac{\pi s}{\varepsilon}}\, ds.$$

Für $\varrho^* \in B_r$, $\beta^* < 1 - 2\delta$ ist offenbar nach Hilfssatz 1 (2. 2) und (3. 20)

$$\Phi_\nu(\varrho^*) = x^{\varrho^*} \int_0^x \xi^{-\varrho^* - 1} J_\nu(\xi, \varepsilon)\, d\xi \ll c_4^\nu \varepsilon x^{\beta^*} \int_0^x \xi^{-\beta^* - 1 + 1 - 3\delta/2}\, d\xi \ll c_4^\nu x^{1 - 3\delta/2},$$

also nach Hilfssatz 3

$$\sum_{\substack{\varrho^* \in B_r \\ \beta^* < 1 - 2\delta}}'' |\Phi(\varrho^*)| \ll c_4^\nu r \Omega x^{1 - 3\delta/2}. \tag{3.22}$$

Schließlich ist $|S'_v|$ bei passendem v nach Hilfssatz 2 abzuschätzen: Nach Hilfs satz 3, (3. 2) und $1-\delta = \beta \in B_r$ gibt es

$$N := [c_8 r\Omega] \geqq 1$$

komplexe Zahlen $z_1, \ldots, z_N$ mit $|z_1|=1$ und

$$|S'_v| = |\tilde{z}^v_\beta| \left| \sum_{l=1}^{N} z_l^v \right|.$$

Daher können wir uns $v \in [N, 2N]$ so gewählt denken, daß

$$|S'_v| \geqq c_9^N |\tilde{z}^v_\beta|$$

also nach (3. 8)

$$|S'_v| \geqq c_{10}^N x^\beta \tag{3.23}$$

wird. Zusammenfassend folgt aus (3. 19) bis (3. 23)

$$x^{-2\delta} \leqq c_{11}^N x^{-\delta} \leqq \delta_1 \Omega$$

und damit (1. 2).

Literatur

[1] S. Knapowski, On Linnik's theorem concerning exceptional zeros, *Publ. Math. Debrecen* **9** 168—178.

[2] Ю. В. Линник, О наименьшем простом числе в арифметической прогрессии, I, *Мат. сб.*, **15** (57) (1944), 139—178.

[3] Ю. В. Линник, ————, II, *Мат. сб.* **15** (57) (1944), 347—368.

[4] A. Page, On the number of primes in an arithmetical progression, *Proc. London Math. Soc.* **39** (1935), 116—141.

[5] K. Prachar, Primzahlverteilung, *Berlin*, 1957.

[6] К. А. Родосский, О наименьшем простом числе в арифметической прогрессии, *Мат. сб.*, **34** (76) (1954), 331—356.

[7] P. Turán, Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen, *Budapest*, *1953*.

[8] P. Turán, On a density theorem of Yu. V. Linnik, *Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci.* **6** (1961), 165—179.

[9] P. Turán, A note on the real zeros of Dirichlet's *L*-Functions, *Acta Arith.* **5** (1959), 309—314.

(Eingegangen am 28. November 1968.)