Beiträge zur Radikaltheorie der Ringe

Von F. SZÁSZ (Budapest)

Unter einem Ring verstehen wir in dieser Note stets einem assoziativen Ring. Bezüglich der nötigen Grundbegriffe verweisen wir auf die Bücher DIVINSKY [4], JACOBSON [7], KERTÉSZ [8], KUROSCH [9], LAMBEK [10] und RÉDEI [13], insbesondere bezüglich der Radikale auf ANDRUNAKIEWITSCH [1], [2] und DIVINSKY [4].

Das Ziel dieser Note ist dreifach.

Einerseits wünschen wir ein wörtlich — in einer persönlichen Diskussion — aufgeworfenes Problem von R. WIEGANDT bezüglich der Existenz eines solchen erblichen Radikals lösen, für das jeder halbeinfache Ring auch streng halbeinfach ist. Wir zeigen nämlich die Existenz solcher speziellen, also supernilpotenten Radikale, und zwar solcher Radikale R_n für jede natürliche Zahl n, für die jeder R_n-halbeinfache Ring auch kommutativ ist, und aus der Isomorphie $A_m \cong A_n$ für die R_m-halbeinfache Ringe A_m bzw. R_n-halbeinfache Ringe A_n auch stets $m=n$ folgt. Die Radikale R_n sind größer, als das Brown—McCoysche Radikal. Das Radikal R_n darf *verallgemeinertes antiboolesches Radikal* gennant werden.

Andererseits werden wir eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür bestätigen, damit ein beliebiger Ring antieinfach ist. Ein Ring ist bekanntlich dann antieinfach, wenn er auf keinen von Null verschiedenen subdirekt irreduziblen Ring mit idempotentem Herz homomorph abgebildet werden kann.[1]) Die antieinfachen Ringe wurden ausführlich von Andrunakiewitsch ([1]) untersucht.

Drittens wollen wir einige Eigenschaften einfacher Jacobsonscher Radikalringe bestätigen. Dafür benützen wir die s.g. quasiinneren Automorphismen der Ringe. Bekanntlich ist die Existenz der (nichtnilpotenten) einfachen Jacobsonschen Radikalringe von SĄSIADA ([15]) bzw. COHN—SĄSIADA ([3]) gezeigt.

Es gilt für die Lösung des erwähnten Problems von R. Wiegandt in einer schärferen Form der folgende

[1]) Hiernach ist freilich jedes homomorphe Bild eines antieinfachen Ringes eine subdirekte Summe von subdirekt irreduziblen Ringen mit nilpotentem Herzen. Insbesondere ist jeder transfinit nilpotente Ring auch antieinfach. Das maximale antieinfache Ideal eines Ringes ist ein Amitsur-Kurosch-sches Radikal. Das wird das antieinfache Radikal genannt. Dieses isr ebenfalls ein spezielles Radikal, und es ist mit dem Jacobsonschen Radikal nach Beispielkonstruktionen [15], [16] im allgemeinen unvergleichbar. Die Konstruktion [15] ist auch deshalb außerordentlich wichtig. In einem Sasiadaschen Ring A ist nämlich das antieinfache Radikal 0, und das Jacobsonsche Radikal stimmt mit A selbst überein. Dagegen ist in [16] ein solcher primitive, subdirekt reduzible Ring betrachtet, dessen jedes homomorphe Bild nilpotent ist. Daher ist im letzteren Ring das antieinfache Radikal echt kleiner, als das Jacobsonsche Radikal.

Satz 1. *Es gibt zu jeder natürlichen Zahl n ein erbliches sogar ein spezielles Radikal R_n derart, daß R_n folgende Eigenschaften besitzt:*

1) *jeder R_n-halbeinfache Ring ist streng R_n-halbeinfach;*

2) *jeder R_n-halbeinfache Ring ist kommutativ;*

3) *ist A_i ein R_i-halbeinfacher Ring, so ergibt sich aus der Isomorphie $A_m \cong A_n$ stets $m = n$.*

Beweis. Es seien K_n bzw. L_n für jede feste natürliche Zahl n die Klasse derjenigen kommutativen Körper A_n, bzw. derjenigen Ringe B_n, für die $a^n = a$ für jedes Element $a \in A_n$ bzw. $a \in B_n$ bestehen. Nach dem wohlbekannten Satz von Jacobson ([7], Theorem 10. 1. 1) ist jeder Ring A_n aus K_n und jeder Ring B_n aus L_n kommutativ. Da jeder Ring B_n aus L_n auch halbeinfach im Jacobsonschen Sinne ist, ist B_n eine subdirekte Summe von primitiven Ringen, die jetzt nach Theorem 1. 4. 1 von Jacobson [7] Körper sind. Also ist jeder Ring B_n aus L_n eine subdirekte Summe von Körpern A_n aus der Klasse K_n. Umgekehrt ist jede subdirekte Summe der Ringe B_n aus L_n ebenfalls ein Ring B_n^* aus L_n, denn die Bedingung $a^n = a$ für jedes Element erbt jeder Unterring, bzw. jedes homomorphe Bild und auch die komplette direkte Summe der Ringe B_n aus L_n.

Wir zeigen, daß die Klasse K_n eine spezielle Ringklasse ist ([4]), d.h. folgende Bedingungen erfüllt sind:

1) jeder Ring aus K_n ist ein Primring;

2) jedes Ideal eines Ringes aus K_n liegt ebenfalls in K_n;

3) liegt ein Ideal I eines Ringes A in K_n, und ist I^* der zweiseitige Annihilator von I in A, so gilt auch $A/I^* \in K_n$. Die Bedingungen 1) und 2) sind trivial erfüllt. Da jeder Ring aus K_n zweiseitiges Einselement besitzt, ist das Ideal I des Ringes A beim Beweis der Gültigkeit der Bedingung 3) ein direkter Summand von A, und somit gilt $A = I \oplus J$. Da I ein Primring ist, ergibt sich $I^* = J$ für den Annihilator I^*, und daher gilt $A/I^* \cong I \in K_n$. Also ist K_n wirklich eine spezielle Ringklasse.

Es ist zu bemerken, daß L_n im allgemeinen keine spezielle Ringklasse ist, denn L_n enthält nicht nur Primringe. Dagegen gilt 2) trivial für die Klasse L_n. Man kann auch 3) für L_n folgendermaßen beweisen. Es gilt $i^n = i$ für jedes $i \in I$ und somit $(ai)^n = ai$ und $(ia)^n = ia$, denn I ist ein Ideal im Ring A. Wegen der Kommutativität des Ideals I von A läßt sich $(ai)^k = a^k i^k$ bzw. $(ia)^k = i^k a^k$ mit vollständiger Induktion nach k beweisen, woraus man

$$(ai) = (ai)^n = a^n i^n = a^n i, \quad (a^n - a) i = 0$$

und ähnlich $i(a^n - a) = 0$ erhält. Es gilt also $a^n - a \in I^*$ für jedes $a \in A$ und somit $A/I^* \in L_n$.

Die Klasse L_n ist also schwach speziell ([14]), aber nicht speziell. Dagegen läßt sich ein Ring A nach dem vorigen dann und nur dann auf einen von Null verschiedenen Ring aus L_n homomorph abbilden, wenn A auch auf einen von Null verschiedenen Ring aus K_n homomorph abgebildet werden kann.

Die im Satz erwähnte Radikaleigenschaft R_n sei jetzt folgendermaßen definiert: Ein Ring A ist genau dann ein R_n-Ring, wenn A auf keinen von Null verschiedenen Ring aus der Klasse K_n homomorph abgebildet werden kann.

Da K_n eine spezielle Ringklasse darstellt, ist R_n wirklich eine Radikaleigenschaft im Amitsur-Kurosch-schen Sinne, sogar ist R_n ein spezielles Radikal nach

Divinsky [4]. Die Klasse S_n aller R_n-halbeinfachen Ringe ist freilich größer, als K_n, denn S_n stimmt nach Divinsky [4], Lemma 80, genau mit der Klasse L_n überein.

Da aber jedes homomorphe Bild eines Ringes aus L_n ebenfalls in L_n liegt, ist jeder R_n-halbeinfache Ring auch streng R_n-halbeinfach. Dabei ist R_n auch ein erbliches Radikal, denn R_n ist speziell. Die im Satz 1 erwähnten Eigenschaften 2) und 3) des verallgemeinerten antibooleschen Radikals R_n lassen sich trivial bestätigen, w. z. b. w.

Bemerkung. Mit der Hilfe der obigen Klassen L_n kann man solche Ringklassen angeben, die die halbeinfachen Klassen für ein Radikal, und die Radikalklassen für ein anderes Radikal sind.

Um ein Kriterium für die Antieinfachkeit eines Ringes anzugeben, gilt der folgende

Satz 2. *Für einen Ring A sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1) *A ist antieinfach;*

2) *es gilt $(a) = (a+b)$ für jedes Hauptideal (a) von A und für jedes Element b des Quadrates $(a)^2$ von (a).*

Beweis. Aus 1) folgt 2). Nehmen wir an, daß 1) gilt, aber 2) nicht gilt. Dann gibt es ein Hauptideal (a) von A und ein Element $b\in(a)^2$ mit der Bedingung $(a)\neq\neq(a+b)$. Dann ergibt sich $a\notin(a+b)$. Nach dem Lemma von Zorn existiert ein solches maximales Ideal M von A, für das $a\notin M$ und $M\supseteqq(a+b)$ bestehen. Dann ist der Faktorring A/M subdirekt irreduzibel, denn jedes von Null verschiedene Ideal von A/M enthält $a+M$. Wegen $a+b\in M$ ergibt sich $b+M=a+M$, und somit

$$(*)\qquad (a)+M = (a)^2+M$$

Das ist aber unmöglich, denn nach 1) ist mit A auch A/M antieinfach, und gleichzeitig ist das Herz $(a)+M/M$ von A/M nach (*) idempotent. Also folgt 2) wirklich aus 1).

Aus 2) folgt 1). Nehmen wir an, daß 2) gilt, aber 1) nicht gilt. Dann ist die Bedingung 2) in jedem homomorphen Bild von A erfüllt, und A läßt sich auf einen subdirekt irreduziblen Ring S mit idempotentem Herzen H nach der Voraussetzung homomorph abbilden. Es gibt also ein Ideal I von A mit $A/I\cong S$. Da H in S minimal ist, erhält man $H=(h)$ für jedes von Null verschiedene Element $h\in H$. Wegen $H^2=H$ ergibt sich auch $h\in H^2$. Es sei nun $a\in A$ ein solches Element des Ringes A, das bei der Isomorphie $A/I\cong S$ auf h abgebildet wird. Dann erhält man wegen $h\in H^2$ gewiß $(a)+I = (a)^2+I$. Es gibt also ein $b\in(a)^2$ und ein $i\in I$ mit

$$a = b+i,$$

woraus $(a-b) = (i) \subseteqq I$ folgt. Wegen

$$(a-b)+I = I \quad \text{und} \quad (a)+I\neq I \quad \text{gilt} \quad (a)\neq(a-b),$$

was der Bedingung 2) widerspricht. Also folgt 1) aus 2), womit Satz 2 bewiesen ist.[2])

[2]) Wir bemerken, daß der Beweis der Behauptung „aus 1) folgt 2)" des Satzes 2 in gewissem Mass ähnlich der Konstruktion von E. Sąsiada ([15]) ist, wodurch er einen einfachen Jacobsonschen Radikalring explizit angegeben hat. Ein exakter Beweis von einem Lemma, das im wesentlichen die Ungültigkeit von 2) in einem konkreten, von E. Sąsiada betrachteten, Jacobsonschen Radikalring bestätigt, kann in der gemeinsamen Arbeit von P. M. Cohn—E. Sąsiada ([3] gefunden werden. Auch eine dem ersten Beweisteil ähnliche Methode wurde von Verfasser (17) für ein anderes Ziel benützt.

Für die Betrachtung einiger Eigenschaften der einfachen Jacobsonschen Radikalringe, benötigen wir eine Vorbereitung. In jedem Jacobsonschen Radikalring A ist die Abbildung

$$\varphi_a\colon\ x \to (1-a)x(1-a)^{-1}$$

für jedes feste Element $a \in A$ ein Ringautomorphismus, der *quasiinner* genannt werden kann. Hierbei ist 1 freilich ein Operator, und $(1-a)^{-1}$ existiert bekanntlich für jedes $a \in A$ und stimmt mit $1-b$ überein, wobei $a+b-ab = a \circ b = 0$ ist. Weiterhin bezeichne $\hat{x}$ die Menge aller quasiinneren automorphen Bilder $x\varphi_a$ von x für jedes Element a des Ringes.[3])

Es gilt der

Satz 3. *Es sei A ein einfacher Jacobsonscher Radikalring, der eine der folgenden Bedingungen erfüllt:*

(i) *A hat kein von Null verschiedenes Element, das gleichzeitig ein Linksnullteiler und Rechtsnullteiler in A ist;*

(ii) *A hat kein von Null verschiedenes nilpotentes Element;*

(iii) *A ist nullteilerfrei;*

(iv) *A ist anordnungsfähig.*

Dann ist die Menge $\hat{x}$ für jedes von Null verschiedene Element $x \in A$ unendlich.

Beweis. Offenbar folgt aus (iv) auch (iii) und aus (iii) ergibt sich (ii), weiterhin hat (ii) trivial (i) zur Folge. Deshalb genügt es zu zeigen, daß die Menge $\hat{x}$ in jedem einfachen Jacobsonschen Radikalring mit der Bedingung (i) nur für $x=0$ endlich ist.

Nehmen wir an, daß A ein einfacher Jacobsonscher Radikalring ist, der die Bedingung (i) erfüllt, und ein Element x besitzt, für das $\hat{x}$ eine endliche Menge ist. Dann sei das Element y durch

$$y = \prod_{z \in \hat{x}} z = \prod_{a \in B \subseteqq A} x\varphi_a \quad (B \text{ ist eine Teilmenge von } A)$$

definiert. Wir werden $y=0$ zeigen, was der Bedingung (i) widersprechen wird. Wegen der Symmetrie von y erhält man nämlich $y\varphi_a = y$ für jedes φ_a, und daher ist das Rechtsideal $R = yA$ invariant bezüglich aller quasiinversen Automorphismen φ_a. Dann ergibt sich wegen $(1-a)R(1-a)^{-1} \subseteqq R$ offenbar $(1-a)R \subseteqq R(1-a) \subseteqq R$ und somit gilt $aR \subseteqq R$ für jedes $a \in A$, also $AR \subseteqq R$. Hiernach ist R ein zweiseitiges Ideal im einfachen Ring A, woraus entweder $yA = A$ oder $yA = 0$ folgt. Im ersten Falle gibt es Elemente $u \in A$, $v \in A$ mit $yu = y$ und $u+v-uv = 0$, was

$$y = y(1-u)(1-v) = (y-yu)(1-v) = 0$$

---

[3]) Ist der Jacobsonsche Radikalring kommutativ oder endlich (im letzteren Fall ist er auch nilpotent), so ist $\hat{x}$ fürd jedes $x \in A$ eine endliche Menge. Deshalb bedeutet die Klasse derjenigen Jacobsonschen Radikalringe A, für die $\hat{x}$ für jedes Element $x \in A$ eine endliche Menge ist, eine solche gleichzeitige Verallgemeinerung der kommutativen, Jacobsonschen Radikalringe und der endlichen Jacobsonschen Radikalringe, wie die Klasse der vom Verfasser [18] betrachteten „nicht Ω-Ringe" eine gleichzeitige Verallgemeinerung der Artinschen Ringe und der kommutativen Ringe. Ähnlich ist die Klasse der von B. H. Neumann ([11]) von und J. Erdős ([5]) betrachteten FC-Gruppen eine simultane Verallgemeinerung der endlichen Gruppen und der kommutativen Gruppen.

zur Folge hat. Ebenfalls folgt $y=0$ im Falle $yA=0$ aus der Linksannihilatorfreiheit von A. In beiden Fällen erhält man also $y=0$, folglich

$$\prod_{i=1}^{k}(1-a_i)x(1-a_i)^{-1}=0$$

Daraus ergibt sich auch $x(\prod_{i=2}^{k-1} x\varphi_{a_i})x=0$, was im Falle $x\neq 0$ wirklich der Bedingung (i) widerspricht, wenn k möglichst klein gewählt ist. Es gilt also $x=0$, w. z. b. w.[4])

Satz 4. *Es gilt mit den obigen Bezeichnungen* $A=\sum_{z\in\hat{x}} zA$ *für jeden einfachen Jacobsonschen Radikalring* A *und für jedes von Null verschiedene Element* $x\in A$.

BEWEIS. Das Rechtsideal $R=\sum_{z\in\hat{x}} zA$ ist von Null verschieden und invariant bezüglich aller quasiinversen Automorphismen und somit ist R, ähnlich dem Beweis des Satzes 3, ein zweiseitiges Ideal, woraus $R=A$ folgt.

Problem 1. Gibt es einen anordnungsfähigen einfachen Jacobsonschen Radikalring?

Problem 2. Wie kann die Bedingung (i) im Satz 3 für einfache Jacobsonsche Radikalringe möglichst weit abgeschwächt werden, daß $\hat{x}$ für jedes von Null verschiedene Ringelement x eine unendliche Menge sei?

[4]) Für anordnungsfähige einfache Jacobsonsche Radikalringe darf im Beweis des Satzes 3 statt des Elementes $y=\Pi z(z\in\hat{x})$ auch das Element $y_1=\Sigma z^2(z\in\hat{x})$ betrachtet werden, denn A ist dann formal reell. Ein formal reeller einfacher Jacobsonscher Radiakalring ist aber gewiß kein Nilring, denn die Potenzen positiver Elemente sind auch positiv.

Literaturverzeichnis

[1] W. A. ANDRUNAKIEWITSCH, Antieinfache und streng idempotente Ringe, *Isv. Akad. Nauk SSSR* **21** (1957), 125—144 (Russisch)

[2] W. A. ANDRUNAKIEWITSCH, Radikale von assoziativen Ringen, *Mat. Sbor.* **44** (86) (1958), 179—212 (Russisch).

[3] P. M. COHN—E. SĄSIADA, An example of a simple radical ring, *Jour. Algebra* **4** (1967) 373—377.

[4] N. DIVINSKY, Rings and Radicals, *London* (1965).

[5] J. ERDŐS, The theory of groups with finite classes of conjugate elements, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **5** (1954), 45—58.

[6] N. JACOBSON, The Theory of Rings, *New York* (1943).

[7] N. JACOBSON, Structure of Rings, *Providence* (1964).

[8] A. KERTÉSZ, Vorlesungen über Artinsche Ringe, *Budapest* (1968).

[9] A. G. KUROSCH, Gruppentheorie (Russisch) (1967).

[10] J. LAMBEK, Lectures on rings and modules, *Massachusetts—Toronto—London* (1966).

[11] B. H. NEUMANN, Groups with finite classes of conjugate elements, *Proc. London Math. Soc.* **1** (1951), 178—187.

[12] E. C. POSNER, Left valution rings and simple radical rings, *Trans. Amer. Math. Soc.* **107** (1963), 458—465.

[13] L. RÉDEI, Algebra, I. *Leipzig* (1959).

[14] JU. M. RJABUHIN, Supernilpotente und spezielle Radikale, *Isledov. Algebre i Matem. Anal. A. N. Moldav. SSR* (1965), 65—72 (Russisch)

[15] E. SĄSIADA, Solution of the problem of existence of simple radical ring. *Bull. Acad. Polon. Sci.* **9** (1961), 257.

[16] E. SĄSIADA—A. SULINSKI, A note on Jacobson radical, *Bull. Acad. Polon. Sci.* **10** (1962), 421—423.

[17] F. SZÁSZ, Bemerkungen über Rechtssockel und Nilringe, *Monatshefte f. Math.* **67** (1963), 359—362.

[18] F. SZÁSZ, Lösung eines Problems bezüglich einer Charakterisierung des Jacobsonschen Radikals, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **18** (1967), 261—272.

(Eingegangen am 13. December 1968.)