Eine Verallgemeinerung des Satzes von Schmidt-Ore

Von E. T. SCHMIDT (Budapest)

1. Für modulare Verbände von endlicher Länge sind die folgenden wichtigen Sätze bekannt, die sich mit zwei verschiedenen Zerlegungen beschäftigen.

Der Satz von Schmidt-Ore[1]). Sind in einem modularen Verband von endlicher Länge zwei Zerlegungen des Einselementes $1 = a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n = b_1 \times b_2 \times \ldots \times b_m$ in direkte Vereinigung unzerlegbarer Elemente gegeben, so ist $n = m$ und jedes a_i ist gegen einem passenden b_j austauschbar, so daß $1 = a_1 \times \ldots \times a_{i-1} \times b_j \times \times a_{i+1} \times \ldots \times a_n$ gilt.

Der Satz von Kuroš-Ore. In einem modularen Verband seien $1 = a_1 \cup a_2 \cup \ldots \cup a_n$ und $1 = b_1 \cup b_2 \cup \ldots \cup b_m$ zwei unverkürzbare, irreduzible Vereinigungsdarstellungen des Einselelementes, so gilt $n = m$ und jedes a_i ist gegen einem passenden b_j austauschbar, so daß $1 = a_1 \cup \ldots \cup a_{i-1} \cup b_j \cup a_{i+1} \cup \ldots \cup a_n$ wieder eine unverkürzbare Vereinigungsdarstellung ist.

Die Ähnlichkeit zwischen den beiden Sätzen ist im ersten Augenblick auffälend. Wir wollen in dieser Note zeigen, daß diese Sätze eine gemeinsame Verallgemeinerung besitzen. Das Hauptergebnis formulieren zu können, müssen wir einige Begriffe einführen.

Im folgenden soll L stets einen modularen Verband von endlicher Länge bezeichnen. Gegeben sei weiter ein Ideal I des Verbandes L. Es wird vorausgesetzt, daß I der Kern eines Homomorphismus ist.

Eine endliche Teilmenge $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ von L wollen wir *I-unabhängig* nennen, falls für jedes i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ die folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

(i) a_i und $a_1 \cup \ldots \cup a_{i-1} \cup a_{i+1} \cup \ldots \cup a_n$ sind unvergleichbar;

(ii) $a_i \cap (a_1 \cup \ldots \cup a_{i-1} \cup a_{i+1} \cup \ldots \cup a_n) \in I.$

Das Element $a \in L$ bezeichnen wir als die *I-direkte Vereinigung* der Elemente $a_1, a_2, \ldots, a_n$ und schreiben dafür $a = a_1 \dot{\times} a_2 \dot{\times} \ldots \dot{\times} a_n$, wenn $a = a_1 \cup a_2 \cup \ldots \cup a_n$ gilt und $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ eine I-unabhängige Teilmenge von L ist. Ein von O verschiedenes Element a, das sich nicht als I-direkte Vereinigung zweier von a verschiedenen Elemente darstellen läßt, wird *I-unzerlegbar* genannt.

Wir sind nur in der Lage, unseren Satz formulieren zu können.

---

[1]) In der Literatur wird auch der Satz von Krull-Ore genannt.

Satz. *Es sei L ein modularer Verband von endlicher Länge und I der Kern eines Homomorphismus von L. Sind zwei Zerlegungen des Einselementes*

$$1 = a_1 \dot{\times} a_2 \dot{\times} \dots \dot{\times} a_n,$$

und

$$1 = b_1 \dot{\times} b_2 \dot{\times} \dots \dot{\times} b_m$$

in I-direkte Vereinigung I-unzerlegbarer Elemente gegeben, so ist $n=m$ und jedes a_i ist gegen einem passenden b_j austauschbar, so daß $1 = a_1 \dot{\times} \dots \dot{\times} a_{i-1} \dot{\times} b_j \dot{\times} \dot{\times} a_{i+1} \dot{\times} \dots \dot{\times} a_n$ gilt.

Das Nullideal $I_0=(0]$ ist offensichtlich der Kern eines Homomorphismus. Die I_0-Unabhängigkeit bedeutet die gewöhnliche Unabhängigkeit und so erhalten wir damit den Satz von Schmidt-Ore. Für $I=L$ ergibt sich der Satz von Kuroš-Ore.

Den Beweis des Satzes erbringen wir im § 3. Im § 2 beweisen wir einige einfache Hilfssätze.

2. Als erste Vorbereitung zeigen wir den

Hilfssatz 1. *Es sei I der Kern eines Homomorphismus von L. Aus $b \cap c \in I$, $x \in I$, folgt $b \cap (c \cup x) \in I$.*

Beweis. Ist Θ_I die kleinste Kongruenz mitdem Kern I, so gilt $x \equiv x \cap (b \cap c)$ (Θ_I) und folglich $x \cup c \equiv [x \cap (b \cap c)] \cup c = c(\Theta_I)$. Daraus ergibt sich aber $b \cap (x \cup c) \equiv \equiv b \cap c\ (\Theta_I)$, dh. mit $b \cap c \in I$ ist auch $b \cap (c \cup x)$ in I enthalten.

Eine endliche Teilmenge A von L wollen wir unverkürzbar nennen, wenn für jedes $a \in A$

$$\bigvee_{\substack{h \in A \\ h \neq a}} h \neq \bigvee_{h \in A} h$$

gilt. Ist A' unverkürzbar, $A' \subseteqq A$ und $\bigvee_{h \in A'} h = \bigvee_{k \in A} k$, so sagen wir, daß A' eine minimale Teilmenge von A ist.

Hilfssatz 2. *Es sei $A=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ eine unverzkürzbare Teilmenge von L und bezeichne I den Kern eines Homomorphismus. A ist dann und nur dann I-unabhängig, wenn für jedes i $(1<i \leqq n)$*

$$a_i \cap (a_1 \cup a_2 \cup \dots \cup a_{i-1}) \in I \tag{1}$$

gilt.

Beweis. Falls A I-unabhängig ist, ist (1) trivialerweise erfüllt. Für den Beweis, daß aus (1) die I-Unabhängigkeit von A folgt, werden wir durch Induktion nach k zeigen, daß $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ $(1<k \leqq n)$ I-unabhängig ist. Für $k=2$ folgt die Aussage, aus (1), wenn wir einfach $k=i=2$ setzen. Nehmen wir an, daß die Behauptung für $k-1$ schon bewiesen ist. Wir müßen dann zeigen, daß für jedes j $(j \leqq k)$

$$c_j = a_j \cap (a_1 \cup \dots \cup a_{j-1} \cup a_{j+1} \cup \dots \cup a_k) \in I$$

gilt. Für $j=k$ folgt die Behauptung aus (1). Es sei nun $j<k$. Setzen wir $u=a_1 \cup \dots \dots \cup a_{j-1} \cup a_{j+1} \cup \dots \cup a_{k-1}$, so ist $c_j = a_j \cap (u \cup a_k)$. Wegen der Modularität können wir schreiben: $c_j = a_j \cap (u \cup a_k) = (a_j \cap (u \cup a_j)) \cap (u \cup a_k) = a_j \cap [(u \cup a_j) \cap (u \cup a_k)] =$

$=a_j \cap [u \cup ((u \cup a_j) \cap a_k)]$. Aus (1) folgt aber $a_j \cap u \in I$ und $(u \cup a_j) \cap a_k \in I$; wir können also den Hilfssatz 1 anwenden und so ergibt sich $c_j \in I$. (Bei der Anwendung des Hilfssatzes 1 wählen wir $b=a_j$, $c=u$ und $x=(u \cup a_j) \cap a_k$.)

Hilfssatz 3. *Es sei $A=\{a_1, \ldots, a_n\}$ eine Teilmenge von L. Wenn für jedes i $(1<i \leqq n)$, $a_i \cap (a_1 \cup \ldots \cup a_{i-1}) \in I$ gilt, so ist jede minimale Teilmenge von A I-unabhängig.*

BEWEIS. Es sei $B=\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_l}\}$ $(i_r<i_s$, wenn $r<s)$ eine minimale Teilmenge von A. Dann gilt

$$a_{i_r} \cap (a_{i_1} \cup \ldots \cup a_{i_{r-1}}) \leqq a_{i_r} \cap (a_1 \cup \ldots \cup a_{i_r-1}) \in I.$$

Die Voraussetzungen des Hilfssatzes 2 sind also erfüllt und so ist B I-unabhängig.

FOLGERUNG 1. Ist $a' = a \dot{\times} a_1 \dot{\times} \ldots \dot{\times} a_n$, $a' = b \dot{\times} c$, so ist einer der folgenden drei Zerlegungen erfüllt:

$$a = b \dot{\times} c \dot{\times} a_1 \dot{\times} \ldots \dot{\times} a_n,$$

oder

$$a = b \dot{\times} a_1 \dot{\times} \ldots \dot{\times} a_n,$$

oder

$$a = c \dot{\times} a_1 \dot{\times} \ldots \dot{\times} a_n.$$

BEWEIS. $A=\{b, c, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ enthält eine minimale Teilmenge. Sie enthält dann offensichtlich jedes a_i $(1 \leqq i \leqq n)$. $A'=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ ist aber noch keine minimale Teilmenge von A, folglich muß jede minimale Teilmenge auch mindestens eines von b und c enthalten. Die minimale Teilmengen können also nur $\{b, A'\}$, $\{c, A'\}$ oder $\{b, c, A'\}=A$ sein.

FOLGERUNG 2. Jedes Element läßt sich in I-direkte Vereinigung I-unzerlegbarer Elemente zerlegen.

BEWEIS. Es sei $l=l(a)$ die Länge von a. Wir werden unsere Behauptung durch Induktion nach l zeigen. Ist $l(a) \leqq 1$, so ist a I-unzerlegbar. Es sei nun $l(a)>1$. Wenn a unzerlegbar ist, so sind wir fertig. Wenn das nicht der Fall ist, so existiert eine Zerlegung $a = b \dot{\times} c$. Wählen wir diese Zerlegung so, daß $l(c)$ minimal ist. Nach Folgerung 1 ist dann c I-unzerlegbar. Nach der Induktionsvoraussetzung läßt sich b in I-direkte Vereinigung I-unzerlegbarer Elemente zerlegen:

$$b = b_1 \dot{\times} b_2 \dot{\times} \ldots \dot{\times} b_k.$$

Für die Menge $\{b_1, b_2, \ldots, b_k, c\}$ ist dann (1) erfüllt, und so aus Hilfssatz 3 folgt unsere Behauptung.

Hilfssatz 4. *Ist $1 = a \dot{\times} a'$ und $a<b \leqq 1$, so gilt $b = a \dot{\times} (b \cap a')$.*

BEWEIS. Wegen der Modularität gilt $a \cup (b \cap a')=b \cap (a \cup a')=b \cap 1=b$. So sind aber a und $b \cap a'$ unvergleichbar. Schließlich aus $a \cap a' \in I$ folgt wegen der Ungleichung $a \cap (b \cap a') \leqq a \cap a'$, daß $a \cap (b \cap a')$ in I enthalten ist, dh. $b=a \dot{\times} (b \cap a')$.

3. BEWEIS DES SATZES. Ist $1 = c_1 \dot{\times} c_2 \dot{\times} \ldots \dot{\times} c_n$, so soll c_i' das Element $c_1 \cup \ldots \cup c_{i-1} \cup c_{i+1} \cup \ldots \cup c_n$ bezeichnen. Wir werden durch Induktion nach der Länge des Verbandes zeigen, daß jedes a_i gegen einem b_j' austauschbar ist. Ohne

Beschränkung der Allgemeinheit genügt, den Fall $i=1$ zu betrachten. Zwei Fälle werden wir diskutieren.

(a) $c=a_1\cup b'_j<1$ *für ein* j, z. B. $j=1$. Das Element $c\cap b_1$ bezeichne b_1^*. Es gilt also $b_1^*<b_1$.

Ist $c=b'_1$, so folgt $a_1\leqq b'_1$; das Element a_1 ist also nach der Induktionsvoraussetzung (wir betrachten den Verband $(b'_1]$) gegen einem b_i austauschbar ($i=2, 3, \ldots, m$). Wir können also im folgenden $c>b'_1$ annehmen. Nach Hilfssatz 4 gilt dann die Beziehung $c = b_1^*\dot{\times} b'_1$. (Der Fall $a_1=c$ ist trivial.) Ist weiter $b_1^* = c_1\dot{\times}c_2\dot{\times}\dot{\times}\ldots\dot{\times}c_r$ eine Zerlegung von b_1^* in I-direkte Vereinigung I-unzerlegbarer Elemente, so gilt nach Folgerung 2 des Hilfssatzes 3 für eine Teilmenge z. B. $\{c_1, c_2, \ldots, c_t\}$ $(t\leqq r)$ von $\{c_1, c_2, \ldots, c_r\}$, daß

$$c = c_1\dot{\times}c_2\dot{\times}\ldots\dot{\times}c_t\dot{\times}b_2\dot{\times}\ldots\dot{\times}b_m.$$

Nach der Induktionsvoraussetzung gilt dann entweder $c = b_i\dot{\times}(c\cap a'_1)$ oder $c = c_j\dot{\times}(c\cap a'_1)$ $(j\leqq t)$. Zuerst betrachten wir den zweiten Fall.

$$c_j\cup a'_1 = c_j\cup(c\cap a'_1)\cup a'_1 = c\cup a'_1 = 1,$$

$$c_j\cap a'_1 = c_j\cap(c\cap a'_1)\in I, \quad \text{d.h.} \quad c_j\dot{\times}a'_1 = 1.$$

Wegen $c_j\leqq b_1^*<b_1$ und Hilfssatz 4 folgt weiter $b_1 = c_j\dot{\times}(a'_1\cap b_1)$. b_1 ist aber I-unzerlegbar und so muß $b_1=c_j$ und damit auch $b_1=b_1^*$ gelten. Das ist aber nach unserer Voraussetzung unmöglich.

Es gilt also $c=b_i\dot{\times}(c\cap a'_1)$ $(i\geqq 2)$ und so $1 = b_i\dot{\times}a'_1$, d.h. a_1 ist gegen b_i austauschbar.

(b) $a_1\cup b'_j=1$ *für jedes* j $(j=1, 2, \ldots, m)$. Wenn $b_j\cup a'_1<1$ für jedes j, so können wir nach (a) b_1 gegen $a_{1'}$, b_2 gegen $a_{2'}$, usw. austauschen. Es gibt also ein j, so daß $j'=1$ ist, folglich muß $b_j\cup a'_1=1$ gelten, was der Voraussetzung widerspricht. Es existiert also ein j z. B. $j=1$, daß $b_j\cup a'_1=b_1\cup a'_1=1$.

Wir haben also

$$a_1\dot{\times}a'_1 = 1, \quad b_1\cup a'_1 = 1, \quad a_1\cup b'_1 = 1.$$

Betrachten wir den Faktorverband L/I. Für ein $a\in L$ soll $\bar{a}$ das Bild von a in L/I bei dem natürlichen Homomorphismus $L\to L/I$ bezeichnen.

$$l(\bar{b}_1)+l(\bar{a}'_1) = l(\overline{b_1\cup a'_1})+l(\bar{b}_1\cap\bar{a}'_1) = l(\bar{1})+l(\bar{b}_1\cap\bar{a}'_1) =$$

$$= l(\bar{a}_1)+l(\bar{a}'_1)+l(\bar{b}_1\cap\bar{a}'_1), \quad \text{d.h.} \quad l(\bar{b}_1)-l(\bar{a}_1) = l(\bar{b}_1\cap\bar{a}'_1)\geqq 0.$$

Genauso, aus $a_1\cup b'_1=1$ erhalten wir auch

$$l(\bar{a}_1)-l(\bar{b}_1) = l(\bar{a}_1\cap\bar{b}'_1)\geqq 0,$$

d.h. $l(\bar{b}_1\cap\bar{a}'_1)=0$. Das bedeutet, daß $b_1\cap a'_1$ zu I gehört; a_1 ist also gegen b_1 austauschbar.

Damit ist die zweite Behauptung des Satzes bewiesen.

Die erste Behauptung ist eine einfache Folgerung der zweiten.

4. Wir zeigen, daß jede Zerlegung $1 = a_1\dot{\times}a_2\dot{\times}\ldots\dot{\times}a_n$ in I-direkte Vereinigung I-unzerlegbarer Elemente in einem distributiven Verband eindeutig ist.

Ist $1 = b_1 \dot{\times} b_2 \dot{\times} \dots \dot{\times} b_m$ eine weitere Zerlegung, wo jedes b_i I-unzerlegbar ist, so gilt $n=m$ und wir können selbstverständlich annehmen, daß a_i gegen b_i austauschbar ist. Es gilt also:

$$1 = a_1 \dot{\times} a_1', \quad 1 = b_1 \times a_1'.$$

Dann sind b_1 und a_1' offensichtlich unvergleichbar und gilt $b_1 < a_1 \cup a_1'$. L ist aber ein distributiver Verband, d.h. $b_1 = c \cup d$, $c \leqq a_1$, $d \leqq a_1'$ für geeignete Elemente $c, d \in L$. Wäre $b_1 \not\leqq a_1$, so würden wir daraus $b_1 = c \dot{\times} d$ erhalten; b_1 ist aber I-unzerlegbar, und so muß $b_1 \leqq a_1$ gelten. Ähnlich läßt sich auch $a_1 \leqq b_1$ zeigen, d.h. $a_1 = b_1$.

Literatur

G. Birkhoff, Lattice Theory, *New York*, 1967.

(Eingegangen am 7. Januar 1969.)