Über den Vergleich von Mittelwerten

Von Z. DARÓCZY und L. LOSONCZI (Debrecen)

1. Einleitung

Es sei I ein offenes Intervall und

$$I^n = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in I, \quad i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Es bezeichne R die Menge der reellen Zahlen und R_+ die Menge der positiven reellen Zahlen. Wir führen die folgenden Funktionenklassen ein:

$$\Omega(I) = \{\varphi \mid \varphi : I \to R,\ \varphi \text{ stetig und streng monoton}\},$$

$$Q(I) = \{f \mid f : I \to R_+,\ f \text{ stetig}\}.$$

Die Größe

$$\mathfrak{M}_\varphi[\mathbf{x}]_f = \varphi^{-1}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\varphi(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)}\right] \qquad (\mathbf{x} \in I^n; \quad n = 2, 3, \dots) \tag{1.1}$$

wird der mit Gewichtsfunktion gebildete Mittelwert von $\mathbf{x}$ genannt, wobei $\varphi \in \Omega(I)$, $f \in Q(I)$ sind. Dabei ist φ^{-1} die inverse Funktion von φ.

Im Falle $f(t) = c$ ($t \in I$, $c > 0$ ein konstanter Wert) geht (1. 1) in die bekannte Größe

$$\mathfrak{M}_\varphi[\mathbf{x}] = \varphi^{-1}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\right] \qquad (\mathbf{x} \in I^n; \quad n = 2, 3, \dots) \tag{1.2}$$

über. Die ausführliche Theorie der symmetrischen quasilinearen Mittelwerte (1. 2) wird in [6] aufgebaut. Bezüglich der Mittelwerte vom Typ (1. 1) kann man einige allgemeine Ergebnisse in den Arbeiten [1], [2], [5] und [7] finden.

In [5] wurde *das Problem der Vergleichbarkeit der Mittelwerte* (1. 1) aufgestellt. Es seien $\varphi, \psi \in \Omega(I)$, $f, g \in Q(I)$, und wir betrachten die Ungleichung

$$\mathfrak{M}_\varphi[\mathbf{x}]_f \leqq \mathfrak{M}_\psi[\mathbf{x}]_g \tag{1.3}$$

für alle $\mathbf{x} \in I^n$ ($n = 2, 3, \dots$). Das Problem ist das folgende: Wir suchen notwendige und hinreichende Bedingungen für die Funktionen φ, ψ, f und g, damit die Ungleichung (1. 3) für alle $\mathbf{x} \in I^n$ ($n = 2, 3, \dots$) erfüllt wird. In der Arbeit [5] wurde dieses

Problem im Spezialfalle $f=g$ bzw. $\varphi=\psi$ vollständig gelöst. Bezüglich des allgemeinen Problems wurde in [7] der folgende Satz bewiesen:

Satz 1. *Es seien $\varphi, \psi \in \Omega(I)$, $f, g \in Q(I)$ und es sei φ eine wachsende Funktion. Für beliebiges $\mathbf{x} \in I^n$ $(n=2, 3, \dots)$ gilt die Ungleichung* (1. 3) *dann und nur dann, falls*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \leqq \mathfrak{M}_\chi[\mathbf{y}]_H \tag{1. 4}$$

für alle $\mathbf{y}=(y_1, \dots, y_n) \in K^n$ $(n=2, 3, \dots)$ erfüllt ist, wobei $K=\varphi(I)=\{\varphi(t) \mid t \in I\}$ und

$$\chi(t) = \psi[\varphi^{-1}(t)], \quad H(t) = \frac{g[\varphi^{-1}(t)]}{f[\varphi^{-1}(t)]} \qquad (t \in K) \tag{1. 5}$$

sind.

In unseren Untersuchungen wird dieser Satz eine grundlegende Rolle spielen.

Unter den Mittelwerten (1. 1) haben bekanntlich die *homogenen Mittel* die größte Bedeutung. Es sei jetzt $I=R_+$ und

$$t\mathbf{x}=(tx_1, \dots, tx_n) \in R_+^n,$$

wobei $t \in R_+$, $\mathbf{x}=(x_1, \dots, x_n) \in R_+^n$ sind. Der Mittelwert $\mathfrak{M}_\varphi[\mathbf{x}]_f$ $(\varphi \in \Omega(R_+), f \in Q(R_+))$ wird *homogener Mittelwert* genannt, falls die Gleichung

$$\mathfrak{M}_\varphi[t\mathbf{x}]_f = t\mathfrak{M}_\varphi[\mathbf{x}]_f \qquad (\mathbf{x} \in R_+^n; \quad n=2, 3, \dots) \tag{1. 6}$$

für alle $t \in R_+$ erfüllt ist. Die Arbeit [1] enthält den folgenden

Satz 2. *Es seien $\varphi \in \Omega(R_+)$, $f \in Q(R_+)$. Der Mittelwert $\mathfrak{M}_\varphi[\mathbf{x}]_f$ ist dann und nur dann homogen, wenn $\mathfrak{M}_\varphi[\mathbf{x}]_f$ eine der Gestalten*

$$M_a[\mathbf{x}]_p = \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{a+p}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^p}\right]^{\frac{1}{a}} \qquad (a \neq 0) \tag{1. 7}$$

$$M_0[\mathbf{x}]_p = \lim_{a\to 0} M_a[\mathbf{x}]_p = \exp\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^p \log x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^p}\right] \tag{1. 8}$$

hat, wobei a und p beliebige Konstanten sind.

Der Mittelwert (1. 7) wurde im Falle $a=1$ (p beliebig) in [3] eingehend untersucht (vgl. [4]). Bezüglich der homogenen Mittelwerte werden weitere Ergebnisse in den Arbeiten [1], [5], [7] dargestellt.

In der vorliegenden Arbeit untersuchen wir zwei Probleme. Einerseits geben wir eine notwendige und hinreichende Bedingung für (1. 4), anderseits — auf Grund unserer allgemeinen Ergebnissen — lösen wir das Problem der Vergleichbarkeit von homogenen Mittelwerten vollständig.

2. Allgemeine Untersuchungen

Es sei K ein offenes Intervall, $\chi \in \Omega(K)$, $H \in Q(K)$. Wir wollen notwendige und hinreichende Bedingungen für die Funktionen χ und H geben, damit die Ungleichung

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \leqq \mathfrak{M}_\chi[\mathbf{y}]_H \qquad (\mathbf{y}\in K^n; \quad n=2,3,\ldots) \tag{2. 1}$$

erfüllt wird.

Satz 3. *Es sei $\chi \in \Omega(K)$ eine wachsende Funktion und $H \in Q(K)$. Die Ungleichung* (2. 1) *gilt dann und nur dann, falls die Ungleichung*

$$\frac{H(x)}{H(t)}[\chi(x)-\chi(t)] \geqq (x-t)\chi'(t) \tag{2. 2}$$

für alle $x \in K$, $t \in K - K_0$ erfüllt ist, wobei K_0 die Menge derjenigen Punkte $t \in K$ ist, in denen $\chi(t)$ nicht differenzierbar ist.

Beweis. (i) Erstens zeigen wir, dass (2. 2) notwendig ist. Wegen der Monotonie von χ und der Positivität von H erhalten wir aus (2. 1)

$$\sum_{i=1}^{n} H(y_i)\left[\chi(y_i)-\chi\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k\right)\right] \geqq 0 \tag{2. 3}$$

für alle $\mathbf{y}\in K^n$ $(n=2,3,\ldots)$. Es seien jetzt $x\in K$, $t\in K-K_0$ beliebig. Wegen der Relation $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{nt-x}{n-1}=t$ liegt $\frac{nt-x}{n-1}$ in K für $n>n_0$. Setzen wir (bei $n>n_0$) on (2. 3)

$$y_1 = x, \quad y_2 = y_3 = \ldots = y_n = \frac{nt-x}{n-1}.$$

Dann erhalten wir für $n>n_0$

$$H(x)[\chi(x)-\chi(t)]+(n-1)H\left(\frac{nt-x}{n-1}\right)\left[\chi\left(\frac{nt-x}{n-1}\right)-\chi(t)\right] \geqq 0. \tag{2. 4}$$

Auf Grund der Gleichung

$$\lim_{n\to\infty}(n-1)H\left(\frac{nt-x}{n-1}\right)\left[\chi\left(\frac{nt-x}{n-1}\right)-\chi(t)\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}(t-x)H\left(\frac{nt-x}{n-1}\right)\frac{\chi\left(\frac{nt-x}{n-1}\right)-\chi(t)}{\frac{nt-x}{n-1}-t} = (t-x)H(t)\chi'(t),$$

bekommen wir aus (2. 4) mit $n\to\infty$ $(n>n_0)$

$$H(x)[\chi(x)-\chi(t)]-(t-x)\chi'(t)H(t) \geqq 0,$$

woraus (2. 2) folgt.

(ii) Zweitens zeigen wir, daß (2. 2) hinreichend ist. Es sei $\mathbf{y}\in K^n$ beliebig und wir setzen $t=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} y_i$. Es ist bekannt (S. z. B. [8]) daß die Menge K_0 das Maß Null besitzt, folglich ist die Menge $K-K_0$ dicht in K. Wählen wir die Folge $t_m \in K-K_0$ $(m=1, 2, \ldots)$ so, daß $\lim_{m\to\infty} t_m = t$ erfüllt wird. Es sei weiter $y_m^* = nt_m - \sum_{i=1}^{n-1} y_i$, so gilt

$$\lim_{m\to\infty} y_m^* = nt - \sum_{i=1}^{n-1} y_i = y_n.$$

Aus (2. 2) (wegen $y_m^* \in K$ für $m > m_0$, $t_m \in K-K_0$, ergibt sich

$$H(y_i)[\chi(y_i)-\chi(t_m)] \geqq (y_i - t_m)\chi'(t_m)H(t_m) \qquad (i=1, 2, \ldots; n-1)$$

bzw.

$$H(y_m^*)\,[\chi(y_m^*)-\chi(t_m)] \geqq (y_m^* - t_m)\chi'(t_m)H(t_m) \qquad (m > m_0)$$

Addieren wir diese Ungleichungen, so wird

$$\sum_{i=1}^{n-1} H(y_i)\,[\chi(y_i)-\chi(t_m)] + H(y_m^*)\,[\chi(y_m^*)-\chi(t_m)] \geqq 0$$

woraus (2. 1) mit $m\to\infty$ folgt. Damit haben wir den Satz bewiesen.

Bemerkungen 1. Ist die Funktion φ im Satz 1. (oder χ im Satz 3.) eine abnehmende Funktion, dann wird sich die Ungleichung (1. 4) (oder (2. 2)) umkehren.

2. Auf Grund des Satzes 3. können wir das folgende Korollar aussagen: *Es seien* $\varphi, \psi \in \Omega(I)$, $f, g \in Q(I)$ *und wir setzen voraus, daß die Funktionen* φ, ψ *auf* I *differenzierbar sind* $(\varphi'\psi' \neq 0)$. *Die Ungleichung* (1.3) *gilt für alle* $x \in I^n$ $(n=2, 3, \ldots)$ *dann und nur dann, falls die Ungleichung*

$$\frac{\varphi(u)-\varphi(v)}{\varphi'(v)}\frac{f(u)}{f(v)} \leqq \frac{\psi(u)-\psi(v)}{\psi'(v)}\frac{g(u)}{g(v)}$$

für beliebige $u, v \in I$ *erfüllt ist.*

3. Im Falle $H(t)=c$ $(t \in K;\ c>0$ Konstant) folgt aus (2. 2)

$$\chi(x)-\chi(t) \geqq (x-t)\chi'(t) \qquad (x, t \in K), \tag{2. 5}$$

wenn wir voraussetzen, daß χ auf K differenzierbar ist. Es ist bekannt, daß (2. 5) eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, daß eine im Intervall K definierte und dort einmal differenzierbare Funktion φ *konvex* ist. ([6]). In diesem Sinne ist die Ungleichung (2. 2) eine Verallgemeinerung der Konvexitätsungleichung (2. 5). Wir erklären: Eine einmal differenzierbare Funktion $\varphi(t)$ auf K wird *H-konvex* bezüglich der Funktion $H(t)>0$ genannt, wenn sie der Ungleichung (2. 2) genügt. Ist $H(t)=c$ $(c>0$, Konstant), dann ist eine H-konvexe Funktion eine einmal differenzierbare konvexe Funktion im gewöhnlichen Sinne.

3. Homogene Mittelwerte

Es seien (a, p) und (b, q) reelle Zahlenpaaren. Das Problem der Vergleichbarkeit der homogenen Mittelwerte kann man folgendermaßen formulieren: Wir suchen notwendige und hinreichende Bedingungen für die Konstanten a, p, b und q, damit die Ungleichung

$$M_a[\mathbf{x}]_p \leqq M_b[\mathbf{x}]_q \qquad (\mathbf{x} \in R_+^n;\quad n=2, 3, \ldots) \tag{3.1}$$

erfüllt wird.

Erstens untersuchen wir den Fall $a \geqq 0$ und $b \geqq 0$. Dann sind die Funktionen φ aus dem Satz 1 und χ aus dem Satz 3 *wachsend* (sogar differenzierbar), so können wir die Ungleichung (2. 2) (für alle $t, x \in K$) als eine notwendige und hinreichende Bedingung anwenden. In der folgenden Tabelle haben wir mit den Bezeichnungen der Sätze 1. und 3. die möglichen Fälle zusammengefaßt.

	a	b	$\varphi(t)$	$\psi(t)$	$f(t)$	$g(t)$	$\chi(t)$	$H(t)$	$K=\varphi(R_+)$
1	$a>0$	$b>0$	t^a	t^b	t^p	t^q	$t^{\frac{b}{a}}$	$t^{\frac{q-p}{a}}$	$(0, \infty)$
2	$a>0$	$b=0$	t^a	$\log t$	t^p	t^q	$\frac{1}{a}\log t$	$t^{\frac{q-p}{a}}$	$(0, \infty)$
3	$a=0$	$b>0$	$\log t$	t^b	t^p	t^q	e^{bt}	$e^{(q-p)t}$	$(-\infty, \infty)$
4	$a=0$	$b=0$	$\log t$	$\log t$	t^p	t^q	t	$e^{(q-p)t}$	$(-\infty, \infty)$

Auf Grund der Sätze 1. und 3. — zur Gültigkeit der Ungleichung (3. 1) — sind die folgenden Ungleichungen (entsprechend den Fällen der Tabelle) notwendig und hinreichend:

1. $\left(\frac{x}{t}\right)^{\frac{q-p}{a}}\left(x^{\frac{b}{a}}-t^{\frac{b}{a}}\right) \geqq (x-t)\frac{b}{a}t^{\frac{b}{a}-1} \qquad (x, t \in (0, \infty))$

2. $\left(\frac{x}{t}\right)^{\frac{q-p}{a}}\left(\frac{1}{a}\log x-\frac{1}{a}\log t\right) \geqq (x-t)\frac{1}{at} \qquad (x, t \in (0, \infty))$

3. $e^{(q-p)(x-t)}(e^{bx}-e^{bt}) \geqq (x-t)be^{bt} \qquad (x, t \in (-\infty, \infty))$

4. $e^{(q-p)(x-t)}(x-t) \geqq (x-t) \qquad (x, t \in (-\infty, \infty))$.

Setzen wir in den Ungleichungen 1. und 2. $y=\frac{x}{t}$ $(y \in (0, \infty))$ bzw. in den Ungleichchungen 3. und 4. $z=(x-t)$ $(z \in (-\infty, \infty))$, so erhalten wir mit den Bezeichnungen

$$A=\frac{b}{a}, \quad \alpha=\frac{q-p}{a} \qquad (a>0), \quad Q=q-p \tag{3.2}$$

die folgenden zu 1—4. äquivalenten Ungleichungen:

1. $y^{\alpha}(y^A - 1) \geqq A(y-1) \qquad (y>0; \quad A>0)$
2. $y^{\alpha} \log y \geqq y-1 \qquad (y>0)$
3. $e^{Qz}(e^{bz}-1) \geqq bz \qquad (z \in (-\infty, \infty); \quad b>0)$
4. $e^{Qz} z \geqq z \qquad (z \in (-\infty, \infty))$.

Wir beweisen jetzt das folgende

Lemma. *Es sei* $A>0$. *Die Ungleichung*

$$y^{\alpha}(y^A-1) \geqq A(y-1) \tag{3. 3}$$

gilt für alle $y>0$ *dann und nur dann, falls die folgende Bedingungen erfüllt sind:*

($*$) *Ist* $0<A<1$, *so ist* $\alpha \geqq 1-A$,

($**$) *Ist* $A \geqq 1$, *so ist* $\alpha \geqq 0$.

Beweis. Die folgenden Ungleichungen sind bekannt ([6]):

$$y^A - 1 \leqq A(y-1) \qquad (y>0, \ 0<A<1) \tag{3. 4}$$

$$y^A - 1 \geqq A(y-1) \qquad (y>0, \ A \geqq 1). \tag{3. 5}$$

Im Beweis werden diese Ungleichungen angewandt. ($*$) Es sei erstens $0<A<1$, dann erhalten wir aus (3. 3)

$$\alpha \geqq \frac{1}{\log y} \log \frac{A(y-1)}{y^A-1} \to 1-A \qquad (y>1, \quad y\to\infty),$$

dh. die Bedingung $\alpha \geqq 1-A$ ist für (3. 3) *notwendig*. Wir zeigen jetzt, daß diese Bedingung *hinreichend* ist. Auf Grund von (3. 4) ergibt sich

$$(1-A)(y-1) \geqq y^{1-A}-1 \qquad (y>0, 0 < 1-A < 1),$$

woraus

$$y^{1-A}(y^A-1) \geqq A(y-1) \qquad (y>0) \tag{3. 6}$$

folgt.

(i) Im Falle $0<y<1$ erhalten wir aus (3. 6)

$$y^{1-A} \leqq \frac{A(y-1)}{y^A-1} \tag{3. 7}$$

und wegen $\alpha \geqq 1-A$

$$y^{\alpha} \leqq y^{1-A}. \tag{3. 8}$$

Aus (3. 7) und (3. 8) folgt

$$y^{\alpha} \leqq \frac{A(y-1)}{y^A-1}$$

darüber hinaus gilt (3. 3) für $0<y<1$.

(ii) Ist $y>1$, so folgt aus (3. 6)

$$y^{1-A} \geqq \frac{A(y-1)}{y^A-1}, \tag{3.9}$$

und wegen $\alpha \geqq 1-A$

$$y^\alpha \geqq y^{1-A}. \tag{3.10}$$

Aus (3. 9) und (3. 10) ergibt sich

$$y^\alpha \geqq \frac{A(y-1)}{y^A-1},$$

darüber hinaus gilt (3. 3) auch für $y>1$. Für $y=1$ ist (3. 3) trivial. Damit haben wir den Fall ($*$) erledigt.

($**$) Es sei jetzt $A \geqq 1$, dann folgt aus (3. 3)

$$\alpha \geqq \frac{1}{\log y} \log \frac{A(y-1)}{y^A-1} \to 0 \qquad (0<y<1, \quad y \to 0)$$

dh. die Bedingung $\alpha \geqq 0$ ist notwendig.

Um die Hinlänglichkeit zu beweisen, betrachten wir die Ungleichung (S. (3. 5))

$$y^A-1 \geqq A(y-1) \qquad (y>0, A \geqq 1). \tag{3.11}$$

(i) Für $0<y<1$ bekommen wir aus (3. 11)

$$1 \leqq \frac{A(y-1)}{y^A-1}, \tag{3.12}$$

andererseits wegen $\alpha \geqq 0$

$$y^\alpha \leqq 1, \tag{3.13}$$

so folgt aus (3. 12), (3. 13)

$$y^\alpha \leqq \frac{A(y-1)}{y^A-1}.$$

Diese Ungleichung zeigt, daß (3. 3) für $0<y<1$ gilt.

(ii) Im Falle $y>1$ schließen wir aus (3. 11)

$$1 \geqq \frac{A(y-1)}{y^A-1} \tag{3.14}$$

und wegen $\alpha \geqq 0$

$$y^\alpha \geqq 1, \tag{3.15}$$

woraus sich (3. 3) auch für $y>1$ ergibt. Damit haben wir das Lemma bewiesen.

Satz 4. *Es seien $a \geqq 0$, $b \geqq 0$. Dann ist zur Gültigkeit der Ungleichung* (3. 1) *notwendig und hinreichend, daß die Bedingung*

$$q-p \geqq \max\{a-b, 0\} \tag{3.16}$$

besteht.

Beweis. Wir führen den Beweis in vier Schritten (entsprechend den Fällen der Tabelle).

1. Jetzt ist die Ungleichung (1.) die notwendige und hinreichende Bedingung (S. die Bezeichnungen (3. 2)). Nach unserem Lemma haben wir die folgenden Möglichkeiten:

($*$) Ist $0<\frac{b}{a}<1$, so muß $\frac{q-p}{a} \geqq 1-\frac{a}{b}$ sein, dh. im Falle $a-b>0$ gilt $q-p \geqq a-b = \max\{a-b, 0\}$.

($**$) Ist $\frac{a}{b} \geqq 1$, dann muß $\frac{q-p}{a} \geqq 0$ bestehen, dh. im Falle $a-b \leqq 0$ gilt $q-p \geqq 0 = \max\{a-b, 0\}$.

2. Jetzt müssen wir die Ungleichung (2.) betrachten. Es ist leicht zu sehen, daß (2.) dann und nur dann gilt, falls $\alpha \geqq 1$, dh. $q-p \geqq a$ $(a>0)$ bzw. $q-p \geqq a = \max\{a-0, 0\} = \max\{a-b, 0\}$ erfüllt ist.

3. Wir sollen jetzt die Ungleichung (3.) untersuchen. Man sieht leicht, daß (3.) dann und nur dann gilt, falls $Q \geqq 0$, dh. $q-p \geqq 0$. Dies ist aber wegen $a=0$, $b>0$ mit (3. 16) äquivalent.

4. Endlich gilt (4.) dann und nur dann, falls $Q \geqq 0$ dh. $q-p \geqq 0$, woraus (wegen $a=b=0$) (3. 16) folgt. Damit haben wir den Satz 4. vollständig bewiesen.

Auf Grund des Satzes 4. können wir das folgende Hauptergebnis beweisen.

Satz 5. *Es seien (a, p), (b, q) beliebige reelle Zahlenpaaren. Für beliebiges $\mathbf{x} \in R_+^n$ $(n=2, 3, \ldots)$ gilt die Ungleichung*

$$M_a[\mathbf{x}]_p \leqq M_b[\mathbf{x}]_q \tag{3. 1}$$

dann und nur dann, falls

(1°) *im Falle* $\operatorname{sg} a = \operatorname{sg} b$ *die Bedingung* $q-p \geqq \max\{a-b, 0\}$

und

(2°) *im Falle* $\operatorname{sg} a \neq \operatorname{sg} b$ *die Bedingung* $q-p \geqq \max\{a, -b\}$

erfüllt ist.

Beweis. Wir führen die folgende Bezeichnung ein:

$$(a, p) \prec (b, q)$$

gilt dann und nur dann, wenn (3. 1) besteht. Nach dem Satz 4 für $a \geqq 0$, $b \geqq 0$ gilt $(a, p) \prec (b, q)$ dann und nur dann falls $q-p \geqq \max\{a-b, 0\}$ ist. Im folgenden werden wir die Identität

$$M_a[\mathbf{x}]_p = M_{-a}[\mathbf{x}]_{a+p} \qquad (\mathbf{x} \in R_+^n, \quad n=2, 3, \ldots) \tag{3. 17}$$

anwenden.

(I) Ist $a \geqq 0$, $b<0$, dann gilt auf Grund von (3. 17) und des Satzes 4

$$(a, p) \prec (b, q) \Leftrightarrow (a, p) \prec (-b, b+q) \Leftrightarrow b+q-p \geqq$$

$$\geqq \max\{a+b, 0\} \Leftrightarrow q-p \geqq \max\{a, -b\},$$

dh. es besteht (2°).

(II) Ist $a<0$, $b\geqq 0$, dann erhalten wir

$$(a, p) \prec (b, q) \Leftrightarrow (-a, a+p) \prec (b, q) \Leftrightarrow q-p-a \geqq$$
$$\geqq \max\{-a-b, 0\} \Leftrightarrow q-p \geqq \max\{a, -b\},$$

dh. es gilt (2°).

III. Endlich sei $a<0$, $b<0$. In diesem Falle ergibt sich

$$(a, p) \prec (b, q) \Leftrightarrow (-a, a+p) \prec (-b, b+q) \Leftrightarrow b+q-a-p \geqq$$
$$\geqq \max\{-a+b, 0\} \Leftrightarrow q-p \geqq \max\{a-b, 0\},$$

dh. es gilt (1°).

Damit ist der Satz 5 bewiesen.

Literatur

[1] J. Aczél—Z. Daróczy, Über verallgemeinerte quasilineare Mittelwerte, die mit Gewichtsfunktionen gebildet sind, *Publ. Math. Debrecen* **10** (1963), 171—190.
[2] M. Bajraktarević, Sur une équation fonctionnelle aux valeurs moyennes. Glasnik Mat. Fiz. i Astr. **13** (1958), 243—248.
[3] E. F. Beckenbach, A class of mean value functions, *Amer. Math. Monthly* **57** (1950) 1—6.
[4] E. F. Beckenbach—R. Bellman, Inequalities Ergebnisse d. Math. NF 30 *Berlin* 1961.
[5] Z. Daróczy, Einige Ungleichungen über die mit Gewichtsfunktionen gebildeten Mittelwerte. Monatshefte für Math. **68** (1964) 102—112.
[6] G. H. Hardy—J. E. Littlewood—G. Pólya, Inequalities. *Cambridge*, 1952.
[7] L. Losonczi, Über den Vergleich von Mittelwerten die mit Gewichtsfunktionen gebildet sind, *In dieser Zeitschrift*, 203—208.
[8] I. P. Natanson, Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen, *Berlin*, 1954.

(Eingegangen am 23. Január 1969.)