

## **Das verallgemeinerte freie Produkt in primitiven Klassen universeller Algebren II**

Herrn Professor Dr. Otto-Heinrich Keller anlässlich seines 65. Geburtstages

Von RENATE LANCKAU (Halle)

### **Einleitung**

In der Arbeit „Das verallgemeinerte freie Produkt in primitiven Klassen universeller Algebren I“ (erschien in dieser Zeitschrift Band 16 (1969)) wurde das verallgemeinerte freie Produkt beliebiger Amalgame in beliebigen primitiven Klassen universeller Algebren definiert, und einige Existenzuntersuchungen wurden vorgenommen. Wie bereits in dieser Arbeit angedeutet wurde, sollen in diesem Teil II Existenzuntersuchungen für das verallgemeinerte freie Produkt spezieller Amalgame in speziellen primitiven Klassen vorgenommen werden. Zunächst werden Amalgame mit nur einer amalgamierten Unteralgebra untersucht, und dann werden solche speziellen primitiven Klassen betrachtet, in denen auf Grund der vorangegangenen Untersuchungen allgemeine Aussagen über die Existenz des verallgemeinerten freien Produktes möglich sind. Insbesondere kann gezeigt werden, daß die primitive Klasse der  $n$ -Quasigruppen und die primitive Klasse der Multioperatorloops zu jedem beliebigen Amalgam auch dessen verallgemeinertes freies Produkt besitzen und daß die primitive Klasse der Multioperatorgruppen die Amalgamationseigenschaft hat.

Hinsichtlich der hier verwendeten Begriffe und ihrer Bezeichnungen sowie der angegebenen Literaturstellen wird auf die Arbeit „Das verallgemeinerte freie Produkt in primitiven Klassen universeller Algebren I“ verwiesen, die im Folgenden kurz als Teil I bezeichnet werden soll.

### **IV. Existenzuntersuchungen des verallgemeinerten freien Produktes spezieller Amalgame in primitiven Klassen und beliebiger Amalgame in speziellen primitiven Klassen**

#### **§ 5. Amalgame mit nur einer amalgamierten Unteralgebra**

$\mathfrak{K} = (\Omega, J)$  bezeichne eine primitive Klasse von  $\Omega$ -Algebren. Wir wollen jetzt nur Amalgame mit einer amalgamierten Unteralgebra betrachten, also Amalgame der Form

$$\mathfrak{A}: \{A_i\}_{i \in I}, \{U_i\}_{i \in I}, \{\varphi_{ij}\}, \quad (i, j) \in I \times I.$$

Sind in  $\mathfrak{A}$  die  $U_i$  sämtlich die minimalen Unteralgebren in den entsprechenden  $A_i$ , so liefert die in Teil I § 2 gegebene Definition des verallgemeinerten freien Produktes von  $\mathfrak{A}$  in der primitiven Klasse  $\mathfrak{K}$  offenbar die von COHN in [4]<sup>1)</sup> angegebene Definition des freien Produktes der  $\mathfrak{K}$ -Algebren  $A_i$  in der primitiven Klasse  $\mathfrak{K}$ . (Ebenso ergibt sich die von SIKORSKI in [17] gegebene Definition.) Es handelt sich somit bei der in Teil I § 2 ausgesprochenen Definition tatsächlich um eine Verallgemeinerung des freien Produktes von Algebren einer primitiven Klasse  $\mathfrak{K}$ .

Betrachten wir insbesondere in einer primitiven Klasse  $\mathfrak{K}_0 = (\Omega, \mathcal{J})$  mit 0 ein Amalgam  $\mathfrak{A}$ , in dem die  $U_i$  sämtlich minimale Unteralgebren, d.h. in diesem Falle die aus der 0 bestehenden Unteralgebren in den entsprechenden  $A_i$  sein mögen, so folgt aus Satz 3. 5 (Teil I), daß zu  $\mathfrak{A}$  in  $\mathfrak{K}_0$  stets das verallgemeinerte freie Produkt existiert. D.h., man erhält die in [4], [17] und in [1] bewiesene Aussage, daß das freie Produkt der  $\{A_i\}_{i \in I}$  in  $\mathfrak{K}_0$  existiert, auch aus der in Teil I angegebenen Theorie. Übrigens findet man über die „Konstruktion“ des verallgemeinerten freien Produktes mit Hilfe der exakten  $\mathfrak{K}$ -Hülle auch den Zusammenhang zu der von BARANOWIČ in [1] gegebenen Definition des „ $\mathfrak{K}$ -freien Produktes“ von Algebren einer primitiven Klasse  $\mathfrak{K}$ .

Auch für Amalgame mit nur einer amalgamierten Unteralgebra in beliebigen primitiven Klassen wird man kaum allgemeine Aussagen über die Existenz des verallgemeinerten freien Produktes erwarten können. Es soll hier für diese speziellen Amalgame noch eine hinreichende (aber nicht notwendige) Bedingung angegeben werden, die für solche Amalgame eine etwas allgemeinere Aussage als die von Satz 3. 5 (Teil I) darstellt.

**Satz 4. 1.**  $\mathfrak{K}$  sei eine primitive Klasse von  $\Omega$ -Algebren,

$$\mathfrak{A}: \{A_i\}_{i \in I}, \{U_i\}_{i \in I}, \{\varphi_{ij}\}, \quad (i, j) \in I \times I$$

sei ein Amalgam von  $\mathfrak{K}$ . Existiert zu jedem  $i \in I$  eine Projektion  $\varepsilon_i$  von  $A_i$  auf  $U_i$ , so existiert in  $\mathfrak{K}$  das verallgemeinerte freie Produkt von  $\mathfrak{A}$ .

BEWEIS: Der Beweis verläuft analog zu dem von Satz 3. 5 (Teil I), er soll nur skizziert werden. Man denke sich wieder die  $\mathfrak{K}$ -Algebra  $P$  gebildet, und es wird gezeigt, daß die Homomorphismen  $\eta_i$  von  $A_i$  in  $P$  sämtlich Monomorphismen sind.  $k$  sei wieder ein beliebiger aber festgehaltener Index von  $I$ . Die Homomorphismen  $\psi_{ik}$  von  $A_i$  ( $i \in I$ ) in  $A_k$  definieren wir analog:

$$\psi_{ik} \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon_i \varphi_{ik}$$

(insbesondere ist  $\psi_{kk} = 1_{A_k}$ ). Die Abbildung  $\varphi^{(k)}$  des Erzeugendensystems von  $P$  in  $A_k$  erklären wir durch

$$(e_i \eta_i) \varphi^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} e_i \psi_{ik} \quad \text{für } e_i \in E_i \quad (i \in I).$$

$\varphi^{(k)}$  läßt sich dann zu einem Homomorphismus von  $P$  in  $A_k$  fortsetzen, denn man kann zeigen, daß die definierenden Relationen von  $P$  bei  $\varphi^{(k)}$  in gültige Relationen

<sup>1)</sup> Das entsprechende Literaturverzeichnis befindet sich in Teil I.

in  $A_k$  übergehen. Dazu betrachten wir nur die identifizierenden Relationen von  $P$  — für die Relationen aus  $\bigcup_{i \in I} R_i$  gelten die gleichen Schlüsse wie im Beweis zu Satz 3.5 —

$$u_{iv}\eta_i = u_{jv}\eta_j$$

mit  $u_{iv} \in U_i$  und  $u_{jv} \in U_j$ . Dann ist

$$u_{iv}\eta_i\varphi^{(k)} = u_{iv}\psi_{ik} = u_{kv}$$

und

$$u_{jv}\eta_j\varphi^{(k)} = u_{jv}\psi_{jk} = u_{kv},$$

also gilt

$$u_{iv}\eta_i\varphi^{(k)} = u_{jv}\eta_j\varphi^{(k)}.$$

Nun schließt man ebenso wie früher, daß dann die  $\eta_i$  Monomorphismen von  $A_i$  ( $i \in I$ ) in  $P$  sind, für die

$$(\eta_i|U_i)(\eta_j|U_j)^{-1} = \varphi_{ij}$$

gilt. Daß in  $P$  auch die Durchschnittsbeziehung

$$A_i\eta_i \cap A_j\eta_j = U_i\eta_i = U_j\eta_j$$

erfüllt ist, folgt analog wie im Beweis zu Satz 3.5.  $P$  bettet somit das Amalgam  $\mathfrak{A}$  ein, also existiert zu  $\mathfrak{A}$  das verallgemeinerte freie Produkt in  $\mathfrak{R}$ . Daß diese Bedingung nicht notwendig ist, ist durch ein Beispiel — etwa aus der primitiven Klasse der Gruppen — leicht zu belegen.

Für die primitiven Klassen mit Amalgamationseigenschaft wollen wir für Amalgame mit nur einer amalgamierten Unteralgebra noch eine einfache Folgerung aus Satz 3.9 (Teil I) angeben, die für sich betrachtet interessant sein dürfte und daher hier ausdrücklich formuliert wird.

**Folgerung 4.2. aus Satz 3.9:** *Besitzt die primitive Klasse  $\mathfrak{R}$  die Amalgamationseigenschaft und ist sie durchschnittstreu in der primitiven Klasse  $\mathfrak{R}'$  enthalten, so existiert in  $\mathfrak{R}'$  das verallgemeinerte freie Produkt des  $\mathfrak{R}'$ -Amalgams*

$$\mathfrak{A}: \{A_i\}_{i \in I}, \{U_i\}_{i \in I}, \{\varphi_{ij}\}, \quad (i, j) \in I \times I,$$

in dem die  $A_i$ ,  $i \in I$ , sogar  $\mathfrak{R}$ -Algebren sind, dann und nur dann, wenn  $\mathfrak{A}$  ein  $\mathfrak{R}$ -Amalgam ist.

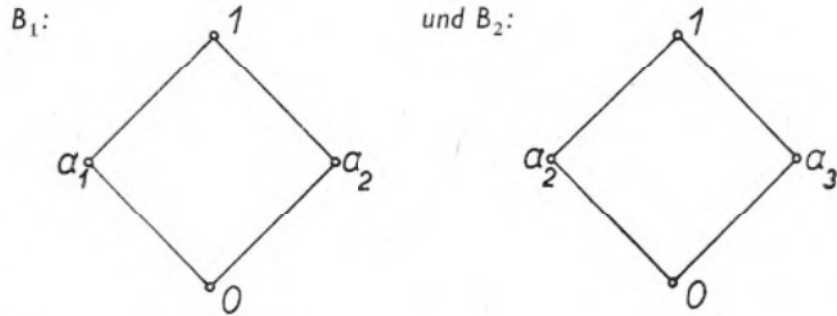
Daß diese Bedingung notwendig ist, besagt Satz 3.9 (Teil I). Ist andererseits  $\mathfrak{A}$  ein  $\mathfrak{R}$ -Amalgam, so existiert auf Grund der Amalgamationseigenschaft von  $\mathfrak{R}$  das verallgemeinerte freie Produkt  $P$  von  $\mathfrak{A}$  in  $\mathfrak{R}$ , und nach Folgerung 3.1 (Teil I) ergibt sich die Richtigkeit obiger Aussage.

Ist  $\mathfrak{R}$  die primitive Klasse der Gruppen und  $\mathfrak{R}'$  die primitive Klasse der Halbgruppen, so sind die in der Folgerung angegebenen Voraussetzungen erfüllt, und man erhält die Aussage von HOWIE in [8]. Beachtet man weiter, daß die primitive Klasse der Booleschen Algebren die Amalgamationseigenschaft besitzt, (man vergleiche dazu [6]), so hat man folgende Aussage: In der primitiven Klasse  $\mathfrak{R}'$  der distributiven Verbände mit 0 und 1 existiert zu dem Amalgam  $\mathfrak{A}$  dieser primitiven Klasse

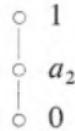
$$\mathfrak{A}: \{B_i\}_{i \in I}, \{V_i\}_{i \in I}, \{\varphi_{ij}\}, \quad (i, j) \in I \times I,$$

wobei die  $B_i$  ( $i \in I$ ) sogar Boolesche Algebren sind, das verallgemeinerte freie Produkt dann und nur dann, wenn alle  $V_i$  in den  $B_i$  Boolesche Unteralgebren sind.

Um diese Aussage zu illustrieren, betrachten wir folgendes Beispiel:  $B_1$  und  $B_2$  seien die Booleschen Algebren:



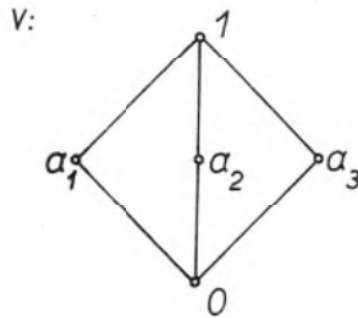
Beide besitzen den Unterverband  $V_1 = V_2$ :



Dieser Unterverband ist distributiv, aber nicht boolesch. Daher existiert nach obiger Folgerung zu dem Amalgam  $\mathfrak{A}$  von  $\mathfrak{K}$

$$\mathfrak{A}: \{B_1, B_2\}, \{V_1, V_2\}, \{1_{V_1}, 1_{V_2}\}$$

in  $\mathfrak{K}$  das verallgemeinerte freie Produkt nicht. Wohl gibt es einen Verband  $V$ , der  $B_1$  und  $B_2$  monomorph enthält und in dem  $B_1 \cap B_2 = V_1 = V_2$  gilt, nämlich



aber dieser Verband ist nicht distributiv.

Wir wollen nun Amalgame in verschiedenen speziellen primitiven Klassen betrachten, und es soll untersucht werden, ob die entsprechenden verallgemeinerten freien Produkte dort existieren.

### § 6. Die primitive Klasse $\mathfrak{R} = (\Omega, \theta)$ ; die primitive Klasse der $n$ -Quasigruppen

In  $\mathfrak{R} = (\Omega, \theta)$  bezeichne  $\Omega$  eine beliebige nichtleere Menge von Operatoren (endlicher Länge). In dieser primitiven Klasse existiert zu jedem Amalgam  $\mathfrak{A}$  stets das verallgemeinerte freie Produkt  $P$ , denn es existiert zu der in Teil I § 3 konstruierten  $\Omega$ -partiellen Algebra  $\bar{B}_0$  stets die exakte  $\mathfrak{R}$ -Hülle  $B$ , und es ist  $B \cong P$  (Satz 2. 4 Teil I). Die exakte  $\mathfrak{R}$ -Hülle  $(\bar{B}_0)_{\mathfrak{R}} = B$  kann folgendermaßen gebildet werden:  $\bar{B}_0$  ist bezüglich der  $\theta$ -ären Operatoren aus  $\Omega$  abgeschlossen. Man bilde eine aufsteigende Kette von  $\Omega$ -partiellen Algebren

$$\bar{B}_0 = H_0 \subseteq H_1 \subseteq H_2 \subseteq \dots \subseteq H_i \subseteq \dots$$

wobei

$$H_{i+1} = H_i \cup \bigcup_{\substack{\omega \in \Omega_n \subseteq \Omega, h_1, h_2, \dots, h_n \in H_i, \\ h_1 h_2 \dots h_n \omega \notin H_i}} h_1 h_2 \dots h_n \omega$$

für  $i=0, 1, 2, \dots$  sei. Dann ist  $H = \bigcup_{i=0}^{\infty} H_i$  eine  $\Omega$ -Algebra, also eine  $\mathfrak{R}$ -Algebra, die  $H_0 = \bar{B}_0$  enthält und, wie man unmittelbar einsieht, deren exakte  $\mathfrak{R}$ -Hülle ist.

Diese Klasse ist insbesondere eine primitive Klasse mit Amalgamationseigenschaft.

Als spezieller Fall sei die primitive Klasse der Gruppoide erwähnt; in diesem Falle besteht  $\Omega$  nur aus einem binären Operator. Aus obigem folgt dann die bekannte Aussage<sup>1)</sup>: Zu einem Amalgam von Gruppoiden existiert stets ein Gruppoid, das das verallgemeinerte freie Produkt dieses Amalgams ist.

Analog zu dem Begriff der  $n$ -Gruppen (polyadische Gruppen) kann man die  $n$ -Quasigruppen definieren. Es soll jetzt die primitive Klasse dieser  $n$ -Quasigruppen betrachtet werden. Diese primitive Klasse  $\mathfrak{R} = (\Omega, J)$  wird beschrieben durch einen Operatorenbereich  $\Omega$ , der aus  $(n+1)$   $n$ -ären Operatoren

$$\Omega = \Omega_n = \{\omega, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$$

besteht, und durch die Menge der identischen Relationen

$$J = \{x_1 \dots x_{i-1} (x_1 \dots x_{i-1} y x_{i+1} \dots x_n \omega_i) x_{i+1} \dots x_n \omega = y, \\ x_1 \dots x_{i-1} (x_1 \dots x_n \omega) x_{i+1} \dots x_n \omega_i = x_i\} \quad i=1, 2, \dots, n.$$

In Zukunft wollen wir für  $x_1 \dots x_{i-1} y x_{i+1} \dots x_n \omega_i$  einfach  $x_1 \dots y \dots x_n \omega_i$  schreiben, wobei  $y$  dann immer an der  $i$ -ten Stelle zu stehen hat.  $n=2$  liefert die primitive Klasse der Quasigruppen<sup>1)</sup>.

Analog zu dem Begriff der partiellen Quasigruppe soll jetzt angegeben werden, was unter einer partiellen  $n$ -Quasigruppe zu verstehen ist:

Eine partielle  $n$ -Quasigruppe ist eine  $\Omega$ -partielle Algebra  $Q$ , für die  $\Omega$  aus  $(n+1)$   $n$ -ären Operatoren besteht

$$\Omega = \{\omega, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$$

und in der gilt:

<sup>1)</sup> Man vergleiche dazu: BRUCK, R. H., A survey of binary systems, Berlin, 1958.

1) Ist das  $\omega$ -Produkt  $b_1 b_2 \dots b_n \omega$  in  $Q$  definiert, so mögen in  $Q$  auch die Beziehungen

$$b_1 \dots (b_1 b_2 \dots b_n \omega) \dots b_n \omega_i = b_i$$

für alle  $i=1, 2, \dots, n$  erklärt und erfüllt sein.

2)<sub>i</sub> Ist das  $\omega_i$ -Produkt  $b_1 \dots b \dots b_n \omega_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) in  $Q$  definiert, so mögen in  $Q$  auch die folgenden Gleichungen erklärt und erfüllt sein:

$$b_1 \dots b_{i-1} (b_1 \dots b \dots b_n \omega_i) b_{i+1} \dots b_n \omega = b \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

$$b_1 \dots b_{i-1} (b_1 \dots b \dots b_n \omega_i) b_{i+1} \dots b_{k-1} b b_{k+1} \dots b_n \omega_k = b_k,$$

falls  $1 \leq i < k \leq n$  ist, und

$$b_1 \dots b_{k-1} b b_{k+1} \dots b_{i-1} (b_1 \dots b \dots b_n \omega_i) b_{i+1} \dots b_n \omega_k = b_k,$$

falls  $1 \leq k < i \leq n$  ist.

(Ist  $n=2$ , so erhält man eine partielle Quasigruppe.) Nach diesen Vorbereitungen soll nun gezeigt werden, daß es zu jeder partiellen  $n$ -Quasigruppe in der primitiven Klasse  $\mathfrak{K}$  der  $n$ -Quasigruppen eine exakte  $\mathfrak{K}$ -Hülle gibt. Damit und mit Satz 2.4 (Teil I) werden wir dann beweisen können, daß zu jedem Amalgam von  $n$ -Quasigruppen das verallgemeinerte freie Produkt existiert.

**Hilfssatz 4.3.** *Zu jeder partiellen  $n$ -Quasigruppe  $B_0$  gibt es in der primitiven Klasse  $\mathfrak{K}$  der  $n$ -Quasigruppen eine exakte  $\mathfrak{K}$ -Hülle.*

**BEWEIS.** Nach bekannter Methode werden wir eine  $n$ -Quasigruppe  $B$  konstruieren, die  $B_0$  enthalten wird, und von der wir dann zeigen werden, daß sie die exakte  $\mathfrak{K}$ -Hülle zu  $B_0$  ist.

$B_0$  werde als  $\{\omega\}$ -partielle Algebra aufgefaßt. Dann gibt es in der primitiven Klasse  $\mathfrak{K}^\omega = (\omega, \emptyset)$  nach den unmittelbar vorangegangenen Überlegungen zu  $B_0$  die exakte  $\mathfrak{K}^\omega$ -Hülle,  $B_1^\omega = (B_0)_{\mathfrak{K}^\omega}$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wollen wir annehmen, daß  $B_1^\omega$  die  $\{\omega\}$ -partielle Algebra  $B_0$  enthält (nicht nur als isomorphes Bild enthält). Auf dieser  $\{\omega\}$ -Algebra  $B_1^\omega$  sollen jetzt die  $n$ -ären Operationen  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  so erklärt werden, daß  $B_1^\omega$  dadurch eine partielle  $n$ -Quasigruppe wird: Die  $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ -partielle Struktur von  $B_0$  wird für  $B_1^\omega$  übernommen (d.h., in  $B_1^\omega$  werden für alle die Tupel aus  $B_0$  die Operationen  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  so erklärt, wie sie bereits in  $B_0$  definiert waren; die Relationen 1) und 2)<sub>i</sub> sind erfüllt, denn  $B_0$  ist nach Voraussetzung eine partielle  $n$ -Quasigruppe.). Die Operationen  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  definieren wir ferner in  $B_1^\omega$  für alle Tupel der Form

$$b_1, \dots, b_{i-1}, (b_1 \dots b_n \omega), b_{i+1}, \dots, b_n$$

mit  $1 \leq i \leq n$  und  $b_1, b_2, \dots, b_n \in B_1^\omega$  wie folgt

$$(6) \quad b_1 \dots b_{i-1} (b_1 \dots b_n \omega) b_{i+1} \dots b_n \omega_i \stackrel{\text{def}}{=} b_i, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Diese Definition sichert offenbar die Gültigkeit der Relationen 1). Aber auch die Gleichungen 2)<sub>i</sub> sind, falls sie überhaupt erklärt sind, erfüllt. Sei nämlich  $b_1 \dots b_n \omega = b$ , so ist in  $B_1^\omega$  nach (6)  $b_1 \dots b_{i-1} b b_{i+1} \dots b_n \omega_i$  definiert, und es gilt

$$b_1 \dots b_{i-1} (b_1 \dots b \dots b_n \omega_i) b_{i+1} \dots b_n \omega = b_1 \dots b_{i-1} b_i b_{i+1} \dots b_n \omega = b,$$



und für  $1 \leq i < k \leq n$  ist

$$\begin{aligned} b_1 \dots b_{i-1} (b_1 \dots b \dots b_n \omega_i) b_{i+1} \dots b_{k-1} b b_{k+1} \dots b_n \omega_k &= \\ = b_1 \dots b_{i-1} b_i b_{i+1} \dots b_{k-1} b b_{k+1} \dots b_n \omega_k &= b_k. \end{aligned}$$

Die entsprechende Beziehung gilt für  $1 \leq k < i \leq n$ . Die  $\{\omega\}$ -Algebra  $B_1^\omega$  ist also mit der durch (6) angegebenen  $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ -partiellen Struktur eine partielle  $n$ -Quasigruppe, die mit  $B_1$  bezeichnet werden soll. Dabei ist  $B_0 \subseteq B_1$ .

Nun fasse man  $B_1$  als  $\{\omega_1\}$ -partielle Algebra auf. In der primitiven Klasse  $\mathfrak{R}^{\omega_1} = (\omega_1, \theta)$  gibt es dann zu  $B_1$  die exakte  $\mathfrak{R}^{\omega_1}$ -Hülle  $B_2^{\omega_1}$ . Die Operationen  $\omega, \omega_2, \dots, \omega_n$  können, wie gleich gezeigt werden wird, so auf  $B_2^{\omega_1}$  erklärt werden, daß  $B_2^{\omega_1}$  eine partielle  $n$ -Quasigruppe  $B_2$  wird. Dann fasse man  $B_2$  als  $\{\omega_2\}$ -partielle Algebra auf, betrachte die primitive Klasse  $\mathfrak{R}^{\omega_2} = (\omega_2, \theta)$  und fahre so wie oben angegeben fort.

Es soll noch gezeigt werden, wie die  $\{\omega_i\}$ -Algebra  $B_{i+1}^{\omega_i}$  ( $i$  fest,  $1 \leq i \leq n$ ) zu einer partiellen  $n$ -Quasigruppe durch geeignete Definition der  $\omega, \omega_k, k=1, 2, \dots, n, k \neq i$ , erklärt werden kann. Die  $\{\omega, \omega_k, k=1, 2, \dots, n, k \neq i\}$ -partielle Struktur von  $B_i$  wird für  $B_{i+1}^{\omega_i}$  übernommen;  $\omega$  werde für alle Tupel der Form

$$b_1, \dots, b_{i-1}, (b_1 \dots b \dots b_n \omega_i), b_{i+1}, \dots, b_n$$

mit  $b, b_1, \dots, b_i, \dots, b_n \in B_{i+1}^{\omega_i}$  definiert:

$$b_1 \dots b_{i-1} (b_1 \dots b \dots b_n \omega_i) b_{i+1} \dots b_n \omega \stackrel{\text{def}}{=} b.$$

Die  $\omega_k$  mit  $1 \leq i < k \leq n$  sollen für alle Tupel der Form  $b_1, \dots, b_{i-1}, (b_1 \dots b \dots b_n \omega_i), b_{i+1}, \dots, b_{k-1}, b, b_{k+1}, \dots, b_n$  definiert werden:

$$b_1 \dots b_{i-1} (b_1 \dots b \dots b_n \omega_i) b_{i+1} \dots b_{k-1} b b_{k+1} \dots b_n \omega_k \stackrel{\text{def}}{=} b_k$$

Entsprechend wird  $\omega_k$  mit  $1 \leq k < i \leq n$  für entsprechende Tupel definiert. Mit dieser  $\{\omega, \omega_k, k=1, 2, \dots, n, k \neq i\}$ -partiellen Struktur ist die  $\{\omega_i\}$ -Algebra  $B_{i+1}^{\omega_i}$  offenbar eine partielle  $n$ -Quasigruppe:  $B_{i+1}$ .

Führt man diese Überlegungen zyklisch mit  $\omega, \omega_1, \dots, \omega_n$  fort, so erhält man eine aufsteigende Folge partieller  $n$ -Quasigruppen

$$B_0 \subseteq B_1 \subseteq B_2 \subseteq \dots$$

derart, daß  $B_{(n+1)j+1}^\omega$  die exakte  $\mathfrak{R}^\omega$ -Hülle der partiellen  $n$ -Quasigruppe  $B_{(n+1)j}$  ist und  $B_{(n+1)j+i+1}^{\omega_i}$  die exakte  $\mathfrak{R}^{\omega_i}$ -Hülle der partiellen  $n$ -Quasigruppe  $B_{(n+1)j+i}$  ist, mit  $i=1, 2, \dots, n$  und  $j=0, 1, 2, \dots$ . Bildet man

$$B = \bigcup_{v=0}^{\infty} B_v,$$

so ist  $B$  eine  $n$ -Quasigruppe, die von  $B_0$  erzeugt wird.

Kann man nun noch zeigen, daß jeder Homomorphismus  $\varphi$  von  $B_0$  in eine  $n$ -Quasigruppe  $Q$  zu einem Homomorphismus von  $B$  in  $Q$  fortgesetzt werden kann, so ist  $B$  die exakte  $\mathfrak{R}$ -Hülle von  $B_0$  in der primitiven Klasse der  $n$ -Quasigruppen. Zunächst kann der Homomorphismus  $\varphi$  von  $B_0$  in  $Q$  zu einem  $(\omega -)$  Homomorphismus  $\varphi_1$  von  $B_1^\omega$  in  $Q$  fortgesetzt werden (auf Grund der Hülleneigenschaft von

$B_1^\omega$ ).  $\varphi_1$  wird dann weiter auf natürliche Weise auf die  $\omega_i$ -Produkte, die partiell in  $B_1^\omega$  erklärt sind, übertragen. Die Relationen, die in der partiellen  $n$ -Quasigruppe  $B_1$  gelten, werden dabei von  $\varphi_1$  in gültige Relationen in  $Q$  übertragen. Also kann  $\varphi$  zu einem Homomorphismus  $\varphi_1$  von  $B_1$  in  $Q$  fortgesetzt werden und zwar so, daß  $\varphi_1|_{B_0} = \varphi$  ist. Auf diese Weise kann man Homomorphismen  $\varphi_i$  von  $B_i$  in  $Q$  angeben, für die

$$\varphi_i|_{B_{i-1}} = \varphi_{i-1}$$

( $i = 2, 3, \dots$ ) ist. Daher läßt sich  $\varphi$  auch zu einem Homomorphismus von  $B$  in  $Q$  fortsetzen.

Benutzt man nun die Definition des verallgemeinerten freien Produktes mit Hilfe der exakten  $\mathfrak{R}$ -Hülle (man vergleiche Teil I § 3), so kann man zeigen:

**Satz 4. 4.** *In der primitiven Klasse der  $n$ -Quasigruppen existiert zu jedem Amalgam dieser primitiven Klasse*

$$\mathfrak{A}: \{A_i\}_{i \in I}, \{U_{ij}\}, \{\varphi_{ij}\}, \quad (i, j) \in I \times I$$

das verallgemeinerte freie Produkt.

BEWEIS. Es muß nur nachgeprüft werden, ob die in Teil I § 3 gebildete  $\Omega$ -partielle Algebra  $\bar{B}_0$  im vorliegenden Falle, in dem der Operatorenbereich  $\Omega = \{\omega, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$  ist, eine partielle  $n$ -Quasigruppe darstellt. In  $\bar{B}_0$  waren die Operationen  $\omega, \omega_1, \dots, \omega_n$  nur für solche Tupel von Klassen von  $B_0$  erklärt worden, die alle mindestens ein Element  $b_k$  aus ein und demselben  $A_i$  enthalten; dabei waren die  $\omega$ - bzw.  $\omega_1, \dots, \omega_n$ -Produkte dieser Tupel die Klassen, in denen jeweils die Elemente  $b_1 b_2 \dots b_n \omega$  bzw.  $b_1 b_2 \dots b_n \omega_1, \dots, b_1 b_2 \dots b_n \omega_n$  (alle aus  $A_i$ ) liegen. Da die  $A_i$  nach Voraussetzung  $n$ -Quasigruppen sind, sind also die Beziehungen 1) und 2)<sub>i</sub> für alle die Tupel von  $\bar{B}_0$  erfüllt, für die die Operationen  $\omega, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  in  $\bar{B}_0$  definiert sind.  $\bar{B}_0$  ist somit eine partielle  $n$ -Quasigruppe, zu der es nach Hilfssatz 4. 3 stets eine exakte Hülle in dieser primitiven Klasse der  $n$ -Quasigruppen gibt. Aus Satz 2. 4 (Teil I) folgt damit die Behauptung.

Es soll noch bemerkt werden, daß die primitive Klasse der  $n$ -Quasigruppen also insbesondere die Amalgamationseigenschaft besitzt. Satz 4. 4 liefert für  $n=2$  die bekannte Aussage für die primitive Klasse der Quasigruppen.

### § 7. Die primitive Klasse der Multioperatorloops

Die Loops bilden eine primitive Klasse mit 0, sie werde mit  $\mathfrak{R}' = (\Omega', J')$  bezeichnet. (Hinsichtlich  $\Omega'$  und  $J'$  vergleiche man [7]). BATES zeigte in [2], daß zu jedem Amalgam  $\mathfrak{R}$  von Loops in dieser primitiven Klasse  $\mathfrak{R}'$  das verallgemeinerte freie Produkt existiert. Insbesondere besitzt also  $\mathfrak{R}'$  auch die Amalgamationseigenschaft.

Wir wollen nun die primitive Klasse der Multioperatorloops betrachten. Ein Loop  $L$  heißt ein Loop mit Multioperatorenbereich, kurz ein Multioperatorloop, wenn in  $L$  außer den Operationen von  $\Omega'$  noch weitere  $n$ -äre ( $n \geq 1$ ) Operationen — wir wollen diesen Operatorenbereich  $\Omega$  nennen — erklärt sind und außer den identischen Relationen  $J'$  noch die Relationen

$$00 \dots 0\omega = 0 \quad \text{für alle } \omega \in \Omega$$



erfüllt sind. Die Multioperatorloops bilden somit eine primitive Klasse  $\mathfrak{K}$  mit  $0: \mathfrak{K} = (\Omega' \cup \Omega, J' \cup \{00\dots 0\omega = 0/\omega \in \Omega\})$ ; dabei gilt offenbar  $\mathfrak{K}' \supseteq \mathfrak{K}$ . Die Operatorenbereiche  $\Omega' \cup \Omega$  und  $\Omega'$  sowie die Mengen von identischen Relationen  $J' \cup \{00\dots 0\omega = 0/\omega \in \Omega\}$  und  $J'$  erfüllen die im Satz 3. 2 (Teil I) angegebenen Voraussetzungen. Diesen Satz 3. 2, die Behauptung 3. 1 (Teil I) und die oben genannte Aussage von BATES anwendend, erhält man die folgende Aussage:

**Satz 4. 5.** *In der primitiven Klasse der Multioperatorloops existiert zu jedem Amalgam dieser primitiven Klasse das verallgemeinerte freie Produkt.*

$\mathfrak{K}$  besitzt also insbesondere auch die Amalgamationseigenschaft.

### § 8. Die primitive Klasse der Multioperatorgruppen

$\mathfrak{K}' = (\Omega', J')$  bezeichne jetzt die primitive Klasse der Gruppen.<sup>2)</sup> H. NEUMANN und B. H. NEUMANN zeigten, (man vergleiche dazu [15], [16] und [14]), daß in dieser primitiven Klasse mit 0 nicht zu jedem Amalgam von Gruppen das verallgemeinerte freie Produkt existiert, wohl aber — und das bewies bereits O. SCHREIER — besitzt diese primitive Klasse die Amalgamationseigenschaft. Gewisse notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz des verallgemeinerten freien Produktes von Gruppen wurden in den genannten Arbeiten angegeben; Satz 3. 5 (Teil I) bzw. die Folgerungen aus diesem Satz liefern weitere hinreichende Bedingungen.

Eine Menge  $G$  heißt eine Gruppe mit Multioperatorenbereich  $\Omega$ , kurz eine  $\Omega$ -Gruppe, wenn auf  $G$  außer den Operationen aus  $\Omega'$  noch weitere  $n$ -äre ( $n \geq 1$ ) Operationen  $\omega \in \Omega$  erklärt sind und außer den identischen Relationen  $J'$  die Relationen

$$00\dots 0\omega = 0 \quad \text{für alle } \omega \in \Omega$$

erfüllt sind. Die Klasse der  $\Omega$ -Gruppen ist eine primitive Klasse mit  $0: \mathfrak{K} = (\Omega' \cup \Omega, J' \cup \{00\dots 0\omega = 0/\omega \in \Omega\})$ , sie ist in der primitiven Klasse der Gruppen enthalten und stellt eine interessante primitive Klasse von universellen Algebren dar, da die Gruppen, die Gruppen mit Operatoren, die Ringe, die linearen Algebren spezielle Typen von  $\Omega$ -Gruppen sind. Diese primitive Klasse soll noch etwas ausführlicher betrachtet werden.

Zunächst stellen wir fest, daß die Operatorenbereiche  $\Omega' \cup \Omega$  und  $\Omega'$  sowie die entsprechenden Mengen von identischen Relationen  $J' \cup \{00\dots 0\omega = 0/\omega \in \Omega\}$  und  $J'$  den im Satz 3. 2 (Teil I) genannten Bedingungen genügen, daher ergibt sich aus diesem Satz, der Behauptung 3. 1 (Teil I) und aus Satz 2. 3 (Teil I) die folgende Aussage:

**Satz 4. 6.** *Das verallgemeinerte freie Produkt eines Amalgams  $\mathfrak{A}$  von  $\Omega$ -Gruppen existiert in der primitiven Klasse der  $\Omega$ -Gruppen dann und nur dann, wenn es eine Gruppe gibt, die das Amalgam  $\mathfrak{A}$  (als Amalgam von Gruppen betrachtet) einbettet.*

Daraus folgt dann unmittelbar: Die primitive Klasse der Multioperatorgruppen besitzt die Amalgamationseigenschaft.

<sup>2)</sup> Man vergleiche dazu: KUROŠ, A. G. „Vorlesungen über allgemeine Algebra“, Leipzig, 1964.

Interessant wären Untersuchungen in speziellen primitiven Klassen von  $\Omega$ -Gruppen (z. B. in der Klasse der Ringe), d.h. Untersuchungen in einer Gesamtheit von  $\Omega$ -Gruppen, in denen außer den identischen Relationen  $J' \cup \{0\omega = 0/\omega \in \Omega\}$  noch weitere identische Relationen  $J^*$  erfüllt sind (nach [7]  $J^*$ - $\Omega$ -Gruppen). Allerdings dürfte es schwierig sein, Existenzkriterien für das verallgemeinerte freie Produkt solcher primitiver Klasse von  $J^*$ - $\Omega$ -Gruppen anzugeben. Wir wollen abschließend noch zwei primitive Klassen von  $\Omega$ -Gruppen betrachten, bei denen man die Existenzfrage nach dem verallgemeinerten freien Produkt ähnlich wie in Satz 4.6 auf die Existenzuntersuchungen des entsprechenden Gruppenamalgams zurückführen kann.

*Die primitive Klasse der  $\Omega A$ -Gruppen:*

Nach KUROŠ [12] wollen wir eine  $\Omega$ -Gruppe mit abelscher additiver Struktur eine  $\Omega A$ -Gruppe nennen. Die primitive Klasse  $\mathfrak{K}_A$  dieser Multioperatorgruppen ist gekennzeichnet durch den Operatorenbereich und die identischen Relationen, wie sie für die primitive Klasse der  $\Omega$ -Gruppen angegeben wurden und durch die weitere identische Relation  $x + y = y + x$ . In [12] wurde von KUROŠ angegeben, wie zu jeder partiellen  $\Omega A$ -Gruppe (gemeint ist eine abelsche Gruppe mit partieller  $\Omega$ -Struktur) die exakte  $\mathfrak{K}_A$ -Hülle gebildet werden kann. Daher gilt der folgende Satz:

**Satz 4.7.** *In der primitiven Klasse der  $\Omega A$ -Gruppen existiert das verallgemeinerte freie Produkt eines Amalgams  $\mathfrak{A}$  von  $\mathfrak{K}_A$  genau dann, wenn es eine abelsche Gruppe gibt, die das Amalgam  $\mathfrak{A}$ , als Amalgam abelscher Gruppen betrachtet, einbettet.*

**BEWEIS:** Gibt es eine abelsche Gruppe, die  $\mathfrak{A}$  einbettet, so gibt es nach Satz 2.3 (Teil I) in der primitiven Klasse der abelschen Gruppen zu  $\mathfrak{A}$  auch das verallgemeinerte freie Produkt  $P$ . Berücksichtigt man, daß  $P$  durch Übertragen der  $\Omega$ -Struktur der  $\Omega A$ -Gruppen von  $\mathfrak{A}$  zu einer partiellen  $\Omega A$ -Gruppe wird, zu der es dann eine exakte  $\mathfrak{K}_A$ -Hülle gibt, so folgt nach Satz 2.3 (Teil I) die Behauptung. Die Umkehrung folgt sofort aus Behauptung 3.1 (Teil I).

Beachtet man, daß die primitive Klasse der abelschen Gruppen die Amalgamationseigenschaft besitzt, so gilt: Die primitive Klasse der  $\Omega A$ -Gruppen besitzt die Amalgamationseigenschaft.

*Die primitive Klasse der  $\Omega$ -Gruppen mit annullierender Null:*

SMIRNOW führte in [18] den Begriff der „ $\Omega$ -Gruppe mit annullierender Null“ ein: Eine  $\Omega$ -Gruppe  $G$  heißt  $\Omega$ -Gruppe mit annullierender Null, — wir wollen sie kurz  $\Omega^\circ$ -Gruppe nennen —, wenn für jedes  $\omega \in \Omega_n \subseteq \Omega (n \geq 1)$  und jedes Tupel  $x_1, x_2, \dots, x_n \in G$  die Beziehungen  $0x_2 \dots x_n \omega = x_1 0x_3 \dots x_n \omega = \dots = x_1 x_2 \dots x_{n-1} 0\omega = 0$  in  $G$  erfüllt sind. (0 sei dabei das Nullelement von  $G$ .) Die  $\Omega^\circ$ -Gruppen bilden somit eine primitive Klasse von  $\Omega$ -Gruppen, nennen wir sie  $\mathfrak{K}^\circ$ . Besteht insbesondere  $\Omega$  nur aus einer binären Operation, so heißt eine solche  $\Omega^\circ$ -Gruppe  $G$  ein Quasiring. Offenbar ist die primitive Klasse der distributiven  $\Omega$ -Gruppen in der primitiven Klasse der  $\Omega^\circ$ -Gruppen  $\mathfrak{K}^\circ$  echt enthalten.

In [18] wird von Smirnow auch der Begriff der partiellen  $\Omega$ -Gruppe mit annullierender Null wie folgt eingeführt: Eine partielle  $\Omega$ -Gruppe, in der für alle  $\omega \in \Omega_n \subseteq \Omega (n \geq 1)$  und für beliebige Tupel  $x_1, x_2, \dots, x_n \in G$  die Elemente  $0x_2 \dots x_n \omega$ ,

$x_1 0 x_3 \dots x_n \omega, \dots, x_1 x_2 \dots x_{n-1} 0 \omega$  definiert und gleich 0 sind, heißt eine partielle  $\Omega^\circ$ -Gruppe.

Analog zur Konstruktion der exakten Hülle einer partiellen  $\Omega$ -Gruppe läßt sich eine Konstruktion der exakten  $\aleph^\circ$ -Hülle einer partiellen  $\Omega^\circ$ -Gruppe angeben.

**Hilfssatz 4. 8.** *Zu jeder partiellen  $\Omega^\circ$ -Gruppe existiert in der primitiven Klasse der  $\Omega^\circ$ -Gruppen eine exakte Hülle.*

BEWEIS:  $G_0$  sei eine partielle  $\Omega^\circ$ -Gruppe. Wir bilden eine aufsteigende Folge von partiellen  $\Omega^\circ$ -Gruppen

$$G_0 \subseteq G_1 \subseteq G_2 \subseteq \dots,$$

wobei

$$G_{i+1} = G_i \overset{*}{+} \sum_{\omega \in \Omega}^* gp(g_1 g_2 \dots g_n \omega)$$

$$g_k \neq 0, \quad g_k \in G_i, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

$$g_1 g_2 \dots g_n \omega \notin G_i$$

ist ( $\overset{*}{+}$  und  $\Sigma^*$  bezeichne die freie Summenbildung in der primitiven Klasse der Gruppen;  $gp(g_1 g_2 \dots g_n \omega)$  bezeichnet die durch das Element  $g_1 g_2 \dots g_n \omega$  erzeugte freie Gruppe) und ferner für alle  $x_1, x_2, \dots, x_n \in G_{i+1}$  und alle  $\omega \in \Omega_n \subseteq \Omega$  gilt:  $0 x_2 \dots x_n \omega = x_1 0 x_3 \dots x_n \omega = \dots = x_1 x_2 \dots x_{n-1} 0 \omega = 0$ . ( $G_{i+1}$  ist offenbar wieder eine partielle  $\Omega^\circ$ -Gruppe;  $x_1 x_2 \dots x_n \omega$  ist genau dann definiert, wenn entweder  $x_1, x_2, \dots, x_n \in G_i$  oder eines der  $x_i$  gleich 0 ist.) Dann ist

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} G_i = (G_0)_{\aleph^\circ}$$

die exakte  $\aleph^\circ$ -Hülle von  $G_0$ .

Wir benutzen nun wieder die Konstruktion des verallgemeinerten freien Produktes über die exakte  $\aleph$ -Hülle und zeigen:

**Satz 4. 9.** *In der primitiven Klasse  $\aleph^\circ$  der  $\Omega^\circ$ -Gruppen existiert das verallgemeinerte freie Produkt eines Amalgams  $\mathfrak{A}$  von  $\aleph^\circ$  genau dann, wenn es eine Gruppe gibt, die das Amalgam  $\mathfrak{A}$ , als Amalgam von Gruppen betrachtet, einbettet.*

BEWEIS: Man betrachte wieder  $\mathfrak{A}$  als Amalgam von Gruppen. Nach Voraussetzung und Satz 2. 3 (Teil I) existiert dann dessen verallgemeinertes freies Produkt, es sei die Gruppe  $P$ . Nun läßt sich die  $\Omega$ -Struktur der  $\Omega^\circ$ -Gruppen von  $\mathfrak{A}$  auf  $P$  übertragen, und in dieser partiellen  $\Omega$ -Gruppe  $P$  werden dann noch für alle Tupel  $x_1, x_2, \dots, x_n \in P$  und alle  $\omega \in \Omega_n \subseteq \Omega$  die Produkte  $0 x_2 \dots x_n \omega, x_1 0 x_3 \dots x_n \omega, \dots, x_1 x_2 \dots x_{n-1} 0 \omega$  definiert und zwar alle gleich 0 gesetzt. Auf diese Weise wird  $P$  eine partielle  $\Omega^\circ$ -Gruppe, zu der nach Hilfssatz 4. 8 die exakte  $\aleph^\circ$ -Hülle existiert.  $(P)_{\aleph^\circ}$  ist eine  $\Omega^\circ$ -Gruppe, die das Amalgam  $\mathfrak{A}$  von  $\Omega^\circ$ -Gruppen einbettet. Satz 2. 3 (Teil I) liefert somit die Behauptung. Die Umkehrung des Satzes folgt wieder aus der Bemerkung 3. 1 (Teil I).

Insbesondere folgt daraus: Die primitive Klasse der  $\Omega^\circ$ -Gruppen besitzt die Amalgamationseigenschaft.

(Eingegangen am 12. Dezember 1969.)