Нормальные делители силовской p-подгруппы симметрической группы S_{p^n}

К. БУЗАШИ (Дебрецен*)

Центральный ряд и все характеристические подгруппы силовской p-подгруппы G симметрической группы S_{p^n} были описаны Л. А. Калужниным ещё в 1948. году. (см. [7], [8]). Автор этой работы с помощью свойств коммутаторов этой группы ([4]), используя известный метод «линейного продолжения характеров С. Д. Бермана (см. [1]), построил ядра всех неприводимых комплексных представлений для рассматриваемой группы, и нашёл все подгруппы, в которых определены линейные части всех неприводимых комплексных характеров группы ([5]).

Любой нормальный делитель группы G может быть получен в виде пересечения некоторой системы ядер неприводимых комплексных представлений, и любое пересечение таких ядер является нормальным делителем группы G. Для обозрения большого разнообразия нормальных делителей группы G мы прибегаем здесь к одной идее. Оказалось, что если R-ядро некоторого неприводимого комплексного представления группы G, то в ней однозначно выделяется некоторая подгруппа A, что фактор-группа R/A является абелевой группой типа $(p, p, \ldots, p)$. Это обстоятельство позволяет смотреть на R/A как на линейное пространство над простым полем характеристики p. Более того, каждому нормальному делителю группы G, удовлетворяющему условию $A \subseteqq H \subseteqq R$, взаимно однозначно можно сопоставить линейное подпространство пространства R/A, инвариантное относительно некоторого нильпотентного линейного оператора.

В работе даётся полное описание всех нормальных делителей группы G. Множество всех нормальных делителей группы G распадается на подмножества, порядок которых также определяется.

§ 1.

Обозначения и определения

Пусть G-силовская p-подгруппа симметрической группы степени p^{n+1}. Как показал Л. А. Калужин ([8]), группа G является сплетением $n+1$ экземпляров циклических групп порядка p. Мы будем пользоваться обозначениями

* K. Buzási (Debrecen)

работы [5]. Согласно этим обозначениям группа G представляется в виде полупрямого произведения

$$(1.\ 1') \qquad G = G_{n+1} \cong A^{(n)} \cdot G_n,$$

где

$$A^{(n)} = \{\alpha_{p^n}^{(n)}, \alpha_{p^n-1}^{(n)}, \ldots, \alpha_1^{(n)}\},$$

а группа G_n-сплетение n экземпляров циклических групп порядка p. Продолжая полупрямое разложение по рекурентной формуле (1. 1'), мы получим

$$(1.\ 1) \qquad G \cong A^{(n)} \cdot A^{(n-1)} \cdot \ldots \cdot A^{(1)} \cdot A^{(0)},$$

где

$$(1.\ 2) \qquad A^{(i)} = \{\alpha_{p^i}^{(i)}, \alpha_{p^i-1}^{(i)}, \ldots, \alpha_1^{(i)}\},$$

$(i=0, 1, \ldots, n)$. Напомним также обозначения

$$(1.\ 3) \qquad A_j^{(i)} = \{\alpha_{p^i}^{(i)}, \alpha_{p^i-1}^{(i)}, \ldots, \alpha_j^{(i)}\},$$

$i=0, 1, \ldots, n;\ 1 \leqq j \leqq p^i$, причём $A_1^{(i)} = A^{(i)}$.

Будем пользоваться также обозначениями:

Если

$$\sigma = \alpha_{k(i_1)}^{(i_1)} \alpha_{k(i_2)}^{(i_2)} \ldots \alpha_{k(i_r)}^{(i_r)},$$

$0 \leqq i_1, \ldots, i_r \leqq n;\ 1 \leqq k^{(i_j)} \leqq p^{i_j}\ (j = 1, 2, \ldots, r)$, то положим

$$(1.\ 4) \qquad \begin{aligned} \bar{\sigma} &= \alpha_{k(i_1)+1}^{(i_1)} \alpha_{k(i_2)+1}^{(i_2)} \ldots \alpha_{k(i_r)+1}^{(i_r)}, \\ \underline{\sigma} &= \alpha_{k(i_1)-1}^{(i_1)} \alpha_{k(i_2)-1}^{(i_2)} \ldots \alpha_{k(i_r)-1}^{(i_r)}. \end{aligned}$$

Определение 1. 1. Согласно [5], линейным характером

$$\chi(k_{i_0}^{(n)}, \ldots, k_{i_t}^{(n-t)})_{(x_1^{(1)}, \ldots, x_{m_1}^{(1)})_{r_1-s_1} \ldots (x_{(1)}^{(q)}, \ldots, x_{m_q}^{(q)})_{r_q-s_q}} = \chi$$

называем характер, определённый на группе

$$A_{k^{(n)}}^{(n)} \ldots A_{k^{(n-t)}}^{(n-t)} \{\sigma_1^{(1)}, \ldots, \sigma_{m_1}^{(1)}\} \ldots \{\sigma_1^{(q)}, \ldots, \sigma_{m_q}^{(q)}\},$$

где элементы $\sigma_\eta^{(\mu)}$ $(\mu=1, 2, \ldots, q; \eta=1, 2, \ldots, m_\mu)$ определяются индуктивно следующим образом:

$$\sigma_1^{(\mu)} = \alpha_{k(n-r_\mu)-1}^{(n-r_\mu)} \cdot (\alpha_{k(n-s_\mu)-1}^{(n-s_\mu)})^{\nu_0^{(\mu)}},$$

$$\sigma_\eta^{(\mu)} = \sigma_{\eta-1}^{(\mu)} \cdot (\alpha_{k(n-s_\mu)-1}^{(n-s_\mu)})^{\nu_{n-1}^{(\mu)}},$$

где

$$i_{r_\mu} + \gamma_0^{(\mu)} \cdot i_{s_\mu} \equiv 0 \pmod p,$$

$$x_{\eta-1}^{(\mu)} + \gamma_{\eta-1}^{(\mu)} \cdot i_{s_\mu} \equiv 0 \pmod p,$$

$(\mu = 1, 2, \ldots, q;\ \eta = 1, 2, \ldots, m_\mu)$.

Характер χ принимает значение 1 в группах

$$A^{(n)}_{k^{(n)}+1}, \ldots, A^{(n-t)}_{k^{(n-t)}+1},$$

значение ξ^{i_λ} на базисных элементах $\alpha^{(n-\lambda)}_{k^{(n-\lambda)}}$ $(\lambda=0, 1, \ldots, n-t)$, и равен $\xi^{x^{(\mu)}_\eta}$ на элементах $\sigma^{(\mu)}_\eta(\mu=1,\ldots,q; \eta=1,\ldots,m_\mu)$, где ξ-фиксированный первообразный комплексный корень p-ой степени из 1. Компоненты целочисленного «вектора» $(k^{(n)}, \ldots, k^{(n-t)})$ удовлетворяют неравенствам $1 \leqq k^{(n)}, \ldots, k^{(n-t)} \leqq p^{n-t}$; $p^{n-t-1}+1 \leqq \max\{k^{(n)}, \ldots, k^{(n-t)}\} \leqq p^{n-t}$, компоненты целочисленного «весового вектора» $(i_0, i_1, \ldots, i_t)$ и целочисленных векторов $(x^{(\mu)}_1, x^{(\mu)}_2, \ldots, x^{(\mu)}_{m_\mu})$ удовлетворяют условиям

$$0 \leqq i_0, \ldots, i_t, x^{(\mu)}_1, \ldots, x^{(\mu)}_{m_\mu} \leqq p-1;\ 1 \leqq q \leqq t;\ 1 \leqq \mu \leqq q.$$

Определение 1. 2. Пусть дана подгруппа H группы G. Пусть

$$\alpha^{(n-\tau)}_{p^{n-\tau}}, \ldots, \alpha^{(n-\tau)}_{v_\tau} \in H$$

$$\alpha^{(n-\tau)}_{v_\tau-1}, \ldots, \alpha^{(n-\tau)}_1 \notin H,$$

где $\tau=0, 1, \ldots, n$; $1 \leqq v_\tau \leqq p^{n-\tau}+1$ (положим $\alpha^{(n-\tau)}_{p^{n-\tau}+1}=e$).

Тогда подгруппу

$$A = A^{(n)}_{v_0} A^{(n-1)}_{v_1} \ldots A^{(1)}_{v_n} A^{(0)}_{v_{n+1}}$$

группы H назовём главной частью группы H.

§ 2.

Пересечения ядер неприводимых представлений

В этом параграфе выясним некоторые свойства строения ядер неприводимых комплексных представлений группы G, и строение групп, на которых определены линейные части неприводимых комплексных характеров группы. Рассматриваются также пересечения таких ядер и групп.

Теорема 2. 1. *Пусть χ-линейная часть некоторого неприводимого комплексного характера группы G, которая определена на групте F. Пусть группа*

$$R = A\{\bar\sigma^{(1)}_1, \ldots, \bar\sigma^{(1)}_{m_1+1}\} \ldots \{\bar\sigma^{(q)}_1, \ldots, \bar\sigma^{(q)}_{m_q+1}\}$$

— ядро характера χ, где A — главная часть R, а элементы $\bar\sigma^{(j)}_i$ строятся согласно (1. 4) *и определению* 1. 1. *Тогда фактор-группа F/A — абелева.*

Доказательство. Пусть группа A имеет вид

$$A = A^{(n)}_{k^{(n)}} A^{(n-1)}_{k^{(n-1)}} \ldots A^{(n-t)}_{k^{(n-t)}}.$$

Тогда группа F представляется в виде

$$F = A^{(n)}_{\bar k^{(n)}} A^{(n-1)}_{\bar k^{(n-1)}} \ldots A^{(n-t)}_{\bar k^{(n-t)}} \{\sigma^{(1)}_1, \ldots, \sigma^{(1)}_{m_1}\} \ldots \{\sigma^{(q)}_1, \ldots, \sigma^{(q)}_{m_q}\},$$

где $\tilde{k}^{(n-j)} = k^{(n-j)}$, если элементы группы $A^{(n-j)}$ не участвуют в разложении ни одного из элементов $\sigma_1^{(1)}, \ldots, \sigma_{m_1}^{(1)}, \ldots, \sigma_1^{(q)}, \ldots, \sigma_{m_q}^{(q)}$ в произведение степеней базисных элементов $\alpha_\eta^{(\mu)}$, и $\tilde{k}^{(n-j)} = k^{(n-j)} - 1$, в противном случае. (см. [5]).

Фактор-группа F/A порождается смежными классами

$$\alpha_{\tilde{k}^{(n)}}^{(n)} A, \ldots, \alpha_{\tilde{k}^{(n-t)}}^{(n-t)} A, \sigma_1^{(1)} A, \ldots, \sigma_{m_1}^{(1)} A, \ldots, \sigma_1^{(q)} A, \ldots, \sigma_{m_q}^{(q)} A,$$

причём

$$p^{n-t-1} + 1 \leqq \max\{k^{(n)}, \ldots, k^{(n-t)}\} \leqq p^{n-t}.$$

Очевидно, для доказательства теоремы достаточно показать, что коммутаторы представителей всех смежных классов, порождающих фактор-группу F/A, принадлежат группе A.

Как известно из свойств коммутаторов элементов этой группы, (см. [4]) для любого фиксированного τ $(0 \leqq \tau \leqq t)$ и r $(r \geqq \tau)$ имеет место включение

$$(\alpha_{\tilde{k}^{(n-r)}}^{(n-r)}, \alpha_{\tilde{k}^{(n-\tau)}}^{(n-\tau)}) \in A_{p^{n-r}+1}^{(n-\tau)} \subseteqq A.$$

Если же $0 \leqq r < \tau$, то

$$(\alpha_{\tilde{k}^{(n-\tau)}}^{(n-\tau)}, \alpha_{\tilde{k}^{(n-r)}}^{(n-r)}) \in A_{p^{n-\tau}+1}^{(n-r)} \subseteqq A.$$

Учтём теперь, что

$$\sigma_\lambda^{(j)} = \alpha_{\tilde{k}^{(n-\tau_0)}-\lambda}^{(n-\tau_0)} (\alpha_{\tilde{k}^{(n-\tau_j)}-\lambda}^{(n-\tau_j)})^{\nu_0} \ldots (\alpha_{\tilde{k}^{(n-\tau_j)}-1}^{(n-\tau_j)})^{\nu_{\lambda-1}},$$

$(\lambda = 1, 2, \ldots, m_j;\ j = 1, 2, \ldots, q)$, (см. определение 1.1), что завершает доказательство теоремы.

Покажем теперь, что пересечение любого конечного числа главных частей групп, определяющих линейные части некоторых неприводимых комплексных характеров, всегда является главной частью для некоторой группы, определяющей линейную часть некоторого неприводимого комплексного характера группы G.

Теорема 2. 2. *Пусть $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_s$ — линейные части некоторых неприводимых комплексных характеров группы G, заданные соответственно на группах $F_1, F_2, \ldots, F_s$. Пусть главные части этих групп соответственно равны подгруппам $A_1, A_2, \ldots, A_s$. Тогда найдётся такая группа F и такой её линейный характер χ — линейная часть некоторого неприводимого комплексного характера группы G, что для главной части A группы F выполняется равенство*

$$A = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_s$$

Доказательство. Пусть

$$A_j = A_{k_j^{(n)}}^{(n)} \ldots A_{k_j^{(n-\tau_j)}}^{(n-\tau_j))}, \qquad (j = 1, 2, \ldots, s;\ \tau_j \leqq t).$$

Тогда очевидно,

$$A = A_{r^{(n)}}^{(n)} \ldots A_{r^{(n-\tau)}}^{(n-\tau)},$$

где

$$\tau = \min\{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_s\},$$

$$r^{(n-\nu)} = \max\{k_1^{(n-\nu)}, \ldots, k_s^{(n-\nu)}\}, \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, \tau),$$

так как из процесса последовательного продолжения линейных характеров (см. [5]), следует, что если

$$A^{(n-i)}_{r^{(n-i)}} = e$$

для некоторого i $(0 \leqq i \leqq \tau)$, то

$$A^{(n-j)}_{r^{(n-j)}} = e$$

для всех $1 < j \leqq \tau$.

Так как для любого j $(1 \leqq j \leqq s)$ выполняется

$$p^{n-\tau_j-1}+1 \leqq \max\{k_j^{(n)}, \dots, k_j^{(n-\tau_j)}\} \leqq p^{n-\tau_j},$$

то

$$p^{n-\tau-1}+1 \leqq \max\{r^{(n)}, \dots, r^{(n-\tau)}\} \leqq p^{n-\tau}.$$

Последнее неравенство является достаточным условием того, что A является главной частью для некоторой группы F, соответствующей линейной части некоторого неприводимого комплексного характера группы G (см. [5]). Теорема доказана.

Теорема 2. 3. *Пусть $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_s$ — линейные части некоторых неприводимых комплексных характеров группы G, определённые на подгруппах $F_1, F_2, \dots, F_s$ группы G. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_s$ — главные части этих групп и пусть*

$$\tilde{F} = F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_s; \quad A = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_s.$$

Тогда существует такая группа F_χ с главной частью A, что $\tilde{F} \subseteqq F_\chi$, где χ — линейная часть некоторого неприводимого комплексного характера группы G.

Доказательство. Из теоремы 2. 2 следует существование такого линейного характера χ с группой определения F, что A — главная часть F. Пусть

$$(2.\,1)\quad F_j = A^{(n)}_{k_j^{(n)}} \dots A^{(n-t_j)}_{k_j^{(n-t_j)}} \cdot \{\sigma_1^{(1,\,j)}, \dots, \sigma_{m_1\,j}^{(1,\,j)}\} \dots \{\sigma_1^{(q_j,\,j)}, \dots, \sigma_{m_{q_j}\,j}^{(q_j\,j)}\} \qquad (j = 1, 2, \dots, s).$$

Главная часть группы $\tilde{F}$ совпадает с группой A. В то же время, пересечение циклических групп $\{\sigma_i^{(r,\,j_1)}\}$ и $\{\sigma_\lambda^{(r_1,\,j_2)}\}$ либо равно одной из этих групп, либо единица. Поэтому группа $\tilde{F}$ имеет вид

$$\tilde{F} = A \cdot \{\tilde{\sigma}_1^{(1)}, \dots, \tilde{\sigma}_s^{(1)}\} \dots \{\tilde{\sigma}_1^{(q)}, \dots, \tilde{\sigma}_{s_q}^{(q)}\}.$$

Рассмотрим элемент $\tilde{\sigma}_1^{(\nu)}$ $(1 \leqq \nu \leqq q)$.

Пусть $\tilde{\sigma}_1^{(\nu)}$ входит в одну из фигурных скобок во всех группах (2. 1). Тогда он является первым элементом в этих фигурных скобках. Действительно, пусть $\tilde{\sigma}_1^{(\nu)}$ входит в r-ую фигурную скобку группы F_j, но не является в ней первым элементом. (Предположим, что в группах F_j элементы фигурных скобок расположены в соответствии с определением 1. 1). Тогда в этой фигурной скобке найдётся такой элемент, разложение которого содержит базисные элементы $\alpha_\eta^{(\mu)}$ с большим индексом η, чем нижний индекс $k_j^{(\mu)}$ соответствующего полупрямого сомножителя $A^{(\mu)}_{k_j^{(\mu)}}$ в главной части F_j, что невозможно.

Пусть $\tilde{\sigma}_1^{(\nu)}$ не входит ни в одну из фигурных скобок и не может быть получен в виде произведения степеней элементов из двух скобок для некоторой группы F_j. Это значит, что в разложении элемента $\tilde{\sigma}_1^{(\nu)}$ базисные элементы

$\alpha_\eta^{(\mu)}$ имеют нижний индекс η больше нижних индексов $k_\eta^{(\mu)}$ соответствующих полупрямых сомножителей $A_{k_j^{(\mu)}}^{(\mu)}$ в главной части группы F_j.

Если, наконец, $\tilde{\sigma}_1^{(v)}$ не входит ни в одну из фигурных скобок для некоторого F_j, но может быть получен в виде произведения степеней элементов из двух скобок этой группы, то он является произведением первых элементов тех упомянутых двух скобок.

Во всех случаях элемент $\tilde{\sigma}_1^{(v)}$ имеет вид

$$\tilde{\sigma}_1^{(v)} = \alpha_{k(n-\delta_1)-1}^{(n-\delta_1)} \cdot (\alpha_{k(n-\delta_2)-1}^{(n-\delta_2)})^{v'}$$

для некоторого γ', если группа A записывается в виде

$$A = A_{k(n)}^{(n)} \dots A_{k(n-\delta_1)}^{(n-\delta_1)} \dots A_{k(n-\delta_2)}^{(n-\delta_2)} \dots A_{k(n-t)}^{(n-t)}.$$

Точно так же можно показать, что

$$\tilde{\sigma}_\eta^{(v)} = \tilde{\underline{\sigma}}_{\eta-1}^{(v)} \cdot (\alpha_{k(n-\delta_2)-1}^{(n-\delta_2)})^{v_{\eta-1}}$$

($v=1, 2, \dots, s$; $\eta>1$), для некоторого $v_{\eta-1}$ (см. определение 1. 1).

Это значит, что для соответствующим образом подобранных неотрицательных целых $i_{\delta_1}, i_{\delta_2}$ и целочисленных векторов $(x_1^{(v)}, \dots, x_{m_v}^{(v)})$ $(x_h^{(v)} \geqq 0)$ существует такой линейный характер

$$\chi(k_{i_0}^{(n)}, \dots, k_{i_{\delta_1}}^{(n-\delta_1)}, \dots, k_{i_{\delta_2}}^{(n-\delta_2)}, \dots, k_{i_t}^{(n-t)}) \dots (x_1^{(v)}, \dots, x_{m_v}^{(v)})_{\delta_1-\delta_2} \dots,$$

для которого группа определения F содержит группу $\tilde{F}$. Теорема доказана.

Теорема 2. 4. *Пусть R — пересечение произвольной системы ядер неприводимых комплексных представлений группы G. Пусть A — главная часть ядра R. Тогда найдётся такая группа F_χ — группа определения для некоторого линейного характера χ, что $A \subseteqq R \subset F_\chi$ и фактор-группа F_χ/A — абелева.*

Доказательство. Пусть

$$R = R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_s,$$

где R_i-ядро линейного характера χ_i $(i=1, 2, \dots, s)$. Очевидно,

$$A = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_s,$$

где A — главная часть ядра R, A_i — главные части ядер R_i $(i=1, 2, \dots, s)$. Пусть

$$\tilde{F} = F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_s,$$

где линейные характеры χ_i определены в группах F_i.

Так как

$$A_i \subseteqq R_i \subseteqq F_i,$$

то также

$$A \subseteqq R \subseteqq \tilde{F}.$$

Согласно теореме 2. 3, группа $\tilde{F}$ с главной частью $\bar{A}$ (см. (1. 4)) содержится в некоторой группе F_χ-группе определения для некоторого линейного характера χ группы G. Теорема доказана.

§ 3.

Нормальные делители и линейные подпространства

Знание строения линейных частей характеров неприводимых комплексных представлений группы G, ядер и групп определения этих характеров, и того факта, что фактор-группы ядер по главным частям являются абелевыми группами, позволяет построить эти ядра в виде линейного пространства над простым полем характеристики p. Мы теперь займёмся построением этих линейных пространств.

Определение 3. 1. Пусть дано множество M натуральных чисел

$$M = M_0 = \{1, 2, \ldots, q+1\}.$$

Предположим, что во множестве M выделены подмножества

$$M_{j_1}, M_{j_1 j_2}, \ldots, M_{j_1 j_2 \ldots j_d}$$

такие, что

1.

$$M_{j_1 \ldots j_t} \cap M_{j'_1 \ldots j'_t} = \begin{cases} \emptyset & \text{если} \quad (j_1, \ldots, j_t) \neq (j'_1, \ldots, j'_t), \\ M_{j_1 \ldots j_t} & \text{если} \quad (j_1, \ldots, j_t) = (j'_1, \ldots, j'_t). \end{cases}$$

2. Каждый из индексов j_ν удовлетворяет условию $1 \leqq j_\nu \leqq l_\nu$ где l_ν зависит только от предыдущих индексов $j_1, \ldots, j_{v-1}$.

3. При фиксированных $j_1, \ldots, j_t$ выполняется

$$\bigcup_{j_1=1}^{l_1} M_{j_1} = M; \quad M_{j_1 \ldots j_t} = \bigcup_{j_{t+1}=1}^{l_{t+1}} M_{j_1 \ldots j_t j_{t+1}}.$$

Пусть фиксирован вектор $(j_1, \ldots, j_d)$. Сопоставим каждому неотрицательному числу j $(0 \leqq j \leqq d)$ натуральное число $r^{(j)}$, где $r^{(0)} = q+1$; $r^{(0)} \geqq r^{(1)} \geqq \ldots \geqq r^{(d)}$ и число $r^{(j)}$ зависит также от вектора $(j_1, \ldots, j_d)$.

Для каждого s $(=0, 1, \ldots, d)$ построим линейное пространство $V^{(s)}$ размерности $r^{(s)}$ над простым полем π характеристики p. Пусть $e_1^{(s)}, \ldots, e_{r^{(s)}}^{(s)}$ — базис пространства $V^{(s)}$ над π.

Образуем прямую сумму

$$V = V^{(0)} \oplus \ldots \oplus V^{(d)}.$$

Каждый вектор $x \in V$ записывается в виде

$$x = x^{(0)} + \ldots + x^{(d)},$$

(3. 1) где

$$x^{(s)} = \sum_{i=1}^{r^{(s)}} \lambda_i^{(s)} e_i^{(s)} \in V^{(s)}, \qquad (s = 0, 1, \ldots, d).$$

Сопоставим каждому вектору $(j_1, \ldots, j_d)$ подпространство $L = L(j_1, \ldots, j_d) \in V$ (назовём его отмеченным подпространством), состоящее из векторов $x \in V$ вида

$$x = \sum_{i=1}^{q+1} \lambda_i e_i^{(0)} + \sum_{\eta=1}^{d} \left[\sum_{i=1}^{r^{(\eta)}} \lambda_i e_i^{(\eta)} + \sum_{\mu=0}^{\eta-1} \sum_{\nu=1}^{r^{(\mu)}} \sum_{i=1}^{q} \lambda_i t_i^{(\eta+\mu,\nu)} e_\nu^{(\mu)} \right], \tag{3. 2}$$

где

1. $\lambda_1 j_1 + \ldots + \lambda_{q+1} j_{q+1} \equiv 0 \pmod p$
2. $t_i^{(\eta+\mu,\nu)}$ — произвольные фиксированные параметры из поля π.
3. $\sum_{i=1}^{r^{(\eta)}} \lambda_i e_i^{(\eta)}$ — комбинация таких базисных векторов, индексы i которых принадлежат одному множеству $M_{j_1 \ldots j_\eta}$.

Поставим в соответствие каждому вектору $x^{(s)} \in V^{(s)}$ вида (3. 1) вектор

$$\underset{\rightarrow}{x}^{(s)} = \sum_{i=1}^{r^{(s)}} \lambda_i^{(s)} e_i^{(s-1)} \in V^{(s-1)},$$

$(s=1, 2, \ldots, d)$. Если $s=0$, то положим $\underset{\rightarrow}{x}^{(s)}=0$.

В соответствии с этим обозначением для каждого элемента

$$x = x^{(0)} + \ldots + x^{(d)} \in V$$

положим

$$S(x) = \underset{\rightarrow}{x}^{(0)} + \ldots + \underset{\rightarrow}{x}^{(d)}. \tag{3. 3}$$

Очевидно, S — нильпотентный линейный оператор в пространстве V (будем его называть оператором сдвига). Легко заметить, что отмеченные подпространства являются инвариантными пространствами относительно оператора S.

Определение 3. 2. Пусть $\tilde{\chi}$ — линейная часть некоторого неприводимого комплексного характера группы G, пусть R — ядро характера $\tilde{\chi}$ и A — главная часть R. Предположим, что характер $\tilde{\chi}$ получен путём последовательного линейного продолжения из линейного характера

$$\chi(k_{i_0}^{(n)}, k_{i_1}^{(n-1)}, \ldots, k_{i_{t-1}}^{(n-t+1)}). \tag{3. 4}$$

Пусть

$$k^{(n-\tau_1)}, k^{(n-\tau_2)}, \ldots k^{(n-\tau_{q+1})} \tag{3. 5}$$

— множество всех индексов характера (3. 4), для которых $i_{\tau_j} \neq 0$ $(j=1, 2, \ldots, q+1)$. Рассмотрим множество $M = \{1, 2, \ldots, q+1\}$ индексов, соответствующих числам (3. 5). Следующим образом выделим во множестве M подмножества $M_{j_1}, M_{j_1 j_2}, \ldots, M_{j_1 \ldots j_d}$. Подмножества M_{j_1} содержат такие индексы $m_1, \ldots, m_{r_{j_1}} \in M$, для которых числа $k^{(n-\tau_{m_1})}, \ldots, k^{(n-m_{r_{j_1}})}$ из чисел (3. 5) сравнимы между собой по модулю p.

Пусть

$$k^{(n-\tau_j)} = \sum_{\nu=0}^{n-t-1} \tilde{k}_\nu^{(\tau_j)} p^\nu \tag{3. 6}$$

— p-разложение чисел (3. 5), где $j=1, 2, \ldots, q+1$; $0 \leqq \tilde{k}_\nu^{(\tau_j)} \leqq p-1$. Пусть $\tilde{k}_1 = \min\{\tilde{k}_1^{(\tau_{m_1})}, \ldots, \tilde{k}_1^{(\tau_{m_{r_{j_1}}})}\}$. Тогда положим

$$M_{j_1} = M_{j_1 j_2} = \ldots = M_{j_1 \ldots j_{\tilde{k}_1 p + \tilde{k}_0}},$$

где $\tilde{k}_0 = \tilde{k}_0^{(\tau_{m_1})} = \ldots = \tilde{k}_0^{(\tau_{m_{r_{j_1}}})}$

Пусть $M_{j_1 \dots j_{\tilde{k}_1 p+\tilde{k}_0+1}}$ — подмножество индексов множества $M_{j_1 \dots j_{\tilde{k}_1 p+\tilde{k}_0}}$, которым соответствуют сравнимые по модулю p^2 числа вида (3. 5).

Положим

$$M_{j_1 \dots j_{\tilde{k}_1 p+k_0+1}} = \dots = M_{j_1 \dots j_{\tilde{k}_2 p^2+\tilde{k}_1 p+\tilde{k}_0+1}},$$

где $\tilde{k}_2$ — минимум коэффициентов при p^2 в p-разложении (3. 6) чисел (3. 5), соответствующих индексам множества $M_{j_1 \dots j_{\tilde{k}_1 p+\tilde{k}_0+1}}$.

Вообще, множество $M_{j_1 \dots j_{\tilde{k}_\lambda p^\lambda+\dots+\tilde{k}_0+1}}$ состоит из таких индексов множества $M_{j_1 \dots j_{\tilde{k}_\lambda p^\lambda+\dots+\tilde{k}_0}}$, которым соответствуют сравнимые по модулю $p^{\lambda+1}$ числа вида (3. 5) и положим

$$M_{j_1 \dots j_{\tilde{k}_\lambda p^\lambda+\dots+\tilde{k}_0+1}} = \dots = M_{j_1 \dots j_{\tilde{k}_{\lambda+1} p^{\lambda+1}+\dots+\tilde{k}_0}},$$

где

$$\tilde{k}_{\lambda+1} = \min_{\mu} k_{\lambda+1}^{(\tau_{m_\mu})} \qquad (\mu \in M_{j_1 \dots j_{\tilde{k}_\lambda p^\lambda+\dots+\tilde{k}_0+1}}).$$

Таким образом, полученные все множества $M_{j_1 \dots j_d}$ содержат либо один индекс, либо несколько индексов, которым соответствуют равные числа вида (3. 5).

Очевидно, полученные высше описанным образом подмножества удовлетворяют всем требованиям определения 3. 1.

Пусть $m \in M$ и $(j_1, \dots, j_d)$ — фиксированный вектор, для которого $m \in M_{j_1 \dots j_d}$. Могут представиться два случая.

1. Существует такое число $h < d$, что подмножество $M_{j_1 \dots j_h}$ кроме m содержит по крайней мере ещё один индекс, а множество $M_{j_1 \dots j_{h+1}}$ состоит только из m.

2. Множество $M_{j_1 \dots j_d}$ содержит по крайней мере два индекса.

В первом случае положим

$$d_m = r_h^{(\tau_m)} p^h + \tilde{k}_{h-1}^{(\tau_m)} p^{h-1} + \dots + \tilde{k}_0^{(\tau_m)},$$

где

$$r_h^{(\tau_m)} \min_{\nu \in M_{j_1 \dots j_d}} \{\tilde{k}_h^{(\tau_\nu)}\}.$$

Во втором случае

$$d_m = k^{(n-\tau_m)}.$$

Тогда

$$d = \max_{m \in M} \{d_m\}.$$

Пусть числа (3. 5) расположены так, что

$$d_1 \geqq d_2 \geqq \dots \geqq d_{q+1}.$$

Положим

$$d_i = \begin{cases} d_i - s, & (s \leqq d_i), \\ 0, & (s > d_i), \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \dots, q+1; \quad s = 1, 2, \dots, d).$$

Обозначим через $r^{(s)}$ количество чисел $d_i^{(s)}$, отличных от нуля, и положим $r^{(0)} = q+1$.

Поставим теперь в соответствие базисным элементам $e_j^{(s)}$ $(j=1,2,\dots,r^{(s)};$ $s=0,\dots,d)$, введённым в определении 3. 1, смежные классы

$$\alpha_{k(n-\tau_j)-s}^{(n-\tau_j)}\cdot A,$$

а каждому вектору x вида (3. 1) вектор

$$x_G=\sum_{\nu=0}^{d}\sum_{i=1}^{r^{(\nu)}}\lambda_i^{(\nu)}\alpha_{k(n-\tau_j)-\nu}^{(n-\tau_j)}A. \tag{3. 7}$$

В этих обозначениях имеет место

Теорема 3. 1. *Если векторы $x\in V$ вида* (3. 1) *пробегают отмеченное пространство $L(j_1,\dots,j_d)$, то элементы группы G, принадлежащие соответствующим смежным классам вида* (3. 7), *порождают ядро R некоторого неприводимого комплексного характера $\tilde\chi$ (A — главная часть ядра R). При переменном векторе $(j_1,\dots,j_d)$ и переменных параметрах $t_i^{(l,\nu)}$ (см. (3. 2)) таким путём получаются все ядра характеров $\tilde\chi$ с фиксированной главной частью A и только они. При этом все нормальные делители H группы G, удовлетворяющие условию $A\subseteq H\subseteq R$, взаимно однозначно соответствуют инвариантным относительно оператора S подпространствам в пространстве $L(j_1,\dots,j_d)$.*

Доказательство. Докажем сначала первое утверждение теоремы. Согласно теореме 2. 1, фактор-группа R/A — абелева типа $(p,p,\dots,p)$. Следовательно, в аддитивной записи она может рассматриваться как линейное пространство над простым полем π характеристики p. Как известно (см. теорему 5. 4 в [5]), фактор-группа R/A порождается базисом

$$\bar\sigma_1^{(1)}\cdot A,\dots,\bar\sigma_{m_1}^{(1)}\cdot A,\dots,\bar\sigma_1^{(q)}\cdot A,\dots,\bar\sigma_{m_q}^{(q)}\cdot A, \tag{3. 8}$$

где

$$\bar\sigma_\mu^{(\eta)}=\alpha_{k(n-\tau_1)-\mu}^{(n-\tau_1)}\cdot(\alpha_{k(n-\tau_\eta)-\mu}^{(n-\tau_\eta)})^{v_0^{(\eta)}}\cdot\ldots\cdot(\alpha_{k(n-\tau_\eta)}^{(n-\tau_\eta)})^{v_\mu^{(\eta)}},$$

и $v_0^{(\eta)},\dots,v_\mu^{(\eta)}$ — фиксированные для R элементы поля π $(\mu=1,2,\dots,m_\eta;$ $\eta=1,2,\dots,q)$.

Учитывая теперь (3. 7), ясно, что смежные классы вида (3. 8) взаимно однозначно соответствуют элементам отмеченного пространства, в котором параметры $t_i^{(l,\nu)}$ однозначно определяются показателями $v_i^{(\eta)}$. Наоборот, для каждого фиксированного набора параметров $t_i^{(l,\nu)}$ можно выбрать такую систему показателей $v_i^{(\eta)}$ в смежных классах (3. 8), что так полученные смежные классы порождают фактор-группу R/A.

Докажем теперь второе утверждение теоремы.

Пусть H — произвольный нормальный делитель группы G, удовлетворяющий условию $A\subseteq H\subseteq R$. Тогда фактор-группа H/A является подпространством пространства R/A над π. Из того, что H — нормальный делитель G, следует, что $(g,a_H)\in H$ для всех элементов $g\in G$; $a_H\in H$. В частности $(x^{(m)},a_H)\in H$ для всех элементов $x^{(m)}\in G$ $(m=0,1,\dots,n)$ (см. определяющие соотношения (2. 1) в [5]). Последнее эквивалентно тому, что пространство H/A инвариантно относительно оператора S (см. [3. 3]).

Пусть наоборот, H/A — подпространство пространства R/A над π, инвариантное относительно оператора S. Покажем, что группа H является нормальным делителем группы G.

Действительно, так как H — подгруппа группы R, то элемент $h \in H$ имеет вид

$$h = a \cdot (\bar{\sigma}_1^{(1)})^{\delta_1^{(1)}} \cdot \ldots \cdot (\bar{\sigma}_{m_1}^{(1)})^{\delta_{m_1}^{(1)}} \cdot \ldots \cdot (\bar{\sigma}_1^{(q)})^{\delta_1^{(q)}} \cdot \ldots \cdot (\bar{\sigma}_{m_q}^{(q)})^{\delta_{m_q}^{(q)}},$$

где $a \in A$, а элементы $\bar{\sigma}_i^{(j)}$ определены по (1. 4) и определением 1. 1.

Не трудно заметить, что если для некоторого элемента $g \in G$ выполняется

$$(g, \bar{\sigma}_i^{(j)}) = \bar{\sigma}_r^{(j)},$$

то также

$$(g, \bar{\sigma}_i^{(s)}) = \bar{\sigma}_r^{(s)}$$

для всех $s = 1, 2, \ldots, q$. Действительно,

$$\bar{\sigma}_i^{(j)} = \alpha^{(n-\tau_{j_1})}_{k^{(n-\tau_{j_1})}-i} \cdot (\alpha^{(n-\tau_{j_2})}_{k^{(n-\tau_{j_2})}-i})^{\nu_0} \cdot \ldots \cdot (\alpha^{(n-\tau_{j_2})}_{k^{(n-\tau_{j_2})}})^{\nu_i}.$$

Следовательно,

$$(g, \alpha^{(n-\tau_{j_1})}_{k^{(n-\tau_{j_1})}-i}) = \alpha^{(n-\tau_{j_1})}_{k^{(n-\tau_{j_1})}-r}; \quad (g, \alpha^{(n-\tau_{j_2})}_{k^{(n-\tau_{j_2})}-i}) = \alpha^{(n-\tau_{j_2})}_{k^{(n-\tau_{j_2})}-r}.$$

Это значит, что для всех элементов s $(s = 1, \ldots, q)$ и того же элемента $g \in G$ коммутатор $(g, \bar{\sigma}_i^{(s)})$ содержит базисные множители $\alpha_\eta^{(m)}$, где $\eta = k^{(n-\tau_{j_s})} - r$. В то же время

$$(\alpha_i^{(j)}, \alpha_\mu^{(\nu)}) \in A_\eta^{(\nu)},$$

где индекс η зависит только от j (см. лемму 1′ в [5]).

Следовательно

$$(g, h) = a' \cdot (\bar{\sigma}_1^{(1)})^{\delta_{i-r}^{(1)}} \cdot \ldots \cdot (\bar{\sigma}_{m_1-i+r}^{(1)})^{\delta_{m_1}^{(1)}} \cdot \ldots \cdot (\bar{\sigma}_1^{(q)})^{\delta_{i-r}^{(q)}} \cdot \ldots \cdot (\bar{\sigma}_{m_q-i+r}^{(q)})^{\delta_{m_q}^{(q)}}.$$

Так как пространство H/A инвариантно относительно оператора S, то $(g, h) \in H$, что и требовалось доказать. Теорема доказана.

Теорема 3. 2. *Пусть L — отмеченное пространство, построенное в соответствии с определением 3. 1. Пусть S — линейный оператор сдвига (см. определение 3. 1) в пространстве L. Тогда жорданов нормальный вид матрицы оператора S содержит $r^{(d)} - 1$ ящиков размера $d+1$ и $r^{(i)} - r^{(i+1)}$ ящиков размера $i+1$ $(i = 0, 1, \ldots, d-1)$ с нулями по главной диагонали.*

Доказательство. В качестве жорданового базиса в L можно выбрать базис

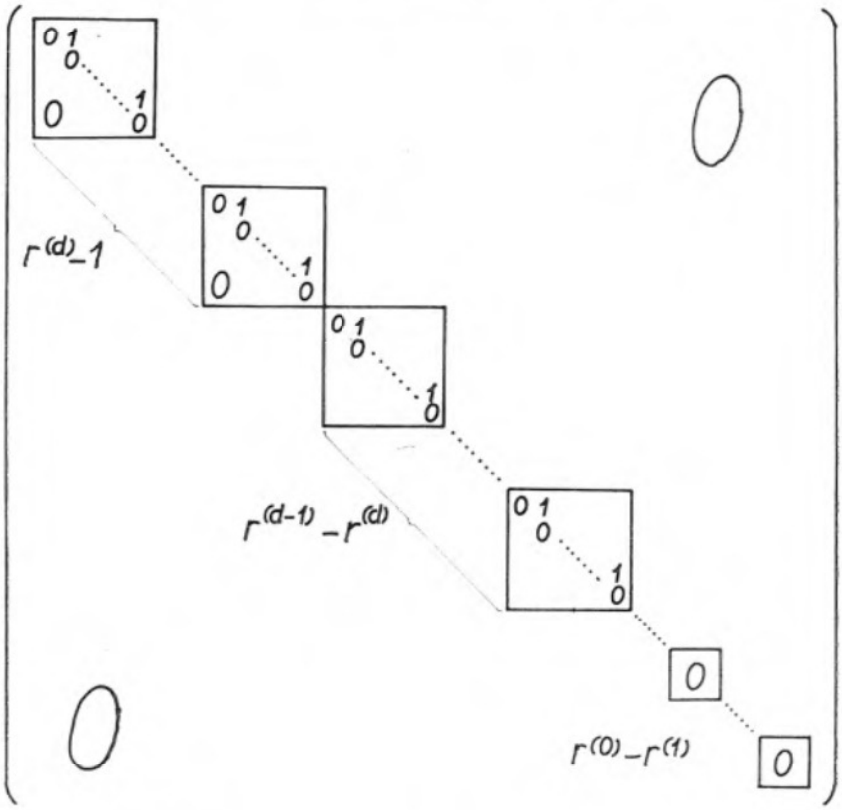
$$u_j^{(0)} = \lambda_1 e_1^{(0)} + \lambda_j e_j^{(0)}$$

$$u_j^{(s+1)} = u_j^{(s)} + \lambda_1 e_1^{(s+1)} + \lambda_j e_j^{(s+1)} + \sum_{i=1}^{s} [\lambda_1 t_1^{(i)} + \lambda_j t_j^{(i)}] \cdot e_j^{(s-i)}, \tag{3.9}$$

где $s = 0, 1, \ldots, d-1$; $j = 1, 2, \ldots, r^{(s)} - 1$, причём

$$\lambda_1 \cdot i_1 + \lambda_j \cdot i_j \equiv 0 \pmod p, \qquad (i_1, i_j \neq 0).$$

В этом базисе матрица линейного оператора S имеет вид



Теорема доказана.

Теорема 3. 3. *Пусть L — отмеченное пространство, построенное в соответствии с определением* 3. 1. *Пусть S — линейный оператор сдвига в пространстве L. Пусть n ($\leqq \dim L$) — произвольное фиксированное неотрицательное целое число. Обозначим через $\psi(n)$ число всех разбиений числа n в сумму*

$$n_0 + n_1 + \ldots + n_d = n, \tag{3.10}$$

где $n_0 \geqq n_1 \geqq \ldots \geqq n_d$; $0 \leqq n_i \leqq r^{(i)} - 1$. Положим $\psi(n) = 1$, если $n = 0$. Тогда число всех подпространств $H \subseteqq L$ размерности n, инвариантных относительно оператора S, равно числу

$$\mathfrak{N}(n) = \prod_{i=0}^{d} \frac{(p^{r^{(i)}-1} - 1) \cdot (p^{r^{(i)}-2} - 1) \cdot \ldots \cdot (p^{r^{(i)}-n_i} - 1)}{(p-1) \cdot (p^2 - 1) \cdot \ldots \cdot (p^{n_i} - 1)} \cdot \psi(n).$$

Доказательство. Фиксируем некоторое разбиение (3. 10) числа n. Как известно, (см. напр. [9]), число подпространств размерности n_i в пространстве $L \cap V^{(i)}$ (см. определение 3. 1) размерности $r^{(i)} - 1$ равно числу

$$\frac{(p^{r^{(i)}-1} - 1) \cdot (p^{r^{(i)}-2} - 1) \cdot \ldots \cdot (p^{r^{(i)}-n_i} - 1)}{(p-1) \cdot (p^2 - 1) \cdot \ldots \cdot (p^{n_i} - 1)}.$$

Тогда число всех подпространств размерности n пространства L при фиксированном разбиении (3. 10) числа n равно числу

$$\prod_{i=0}^{d} \frac{(p^{r^{(i)}-1}-1)(p^{r^{(i)}-2}-1)\dots(p^{r^{(i)}-n_i}-1)}{(p-1)(p^2-1)\dots(p^{n_i}-1)}.$$

Из жорданового вида матрицы оператора S ясно, что все построенные таким путём подпространства инвариантны относительно оператора S. Теорема доказана.

Следствие 3. 1. Фиксированное подпространство H размерности n в отмеченном пространстве L, инвариантное относительно линейного оператора сдвига S, соответствующее фиксированному разбиению (3. 10) числа n, представляется в виде прямой суммы

(3. 11) $$H = v^{(0)} \oplus \dots \oplus v^{(d)},$$
где
$$\dim v^{(j)} = n_j; \quad s(v^{(j)}) \subseteqq v^{(j-1)}$$

и $v^{(j)}$ принадлежит подпространству, порождённому базисом

$$\{u_1^{(j)}, \dots, u_{r^{(j)}}^{(j)}\}$$
$(j=0, 1, \dots, d)$ (см. [3. 9]).

Таким путём могут быть получены все подпространства размерности n, инвариантные относительно оператора S, соответствующие фиксированному разбиению (3. 10) числа n.

Доказательство очевидным образом следует из теорем 3. 2 и 3. 3.

Сводка результатов. Для любого натурального числа t $(1 \leqq t \leqq n+1)$ фиксируем целочисленный вектор

(3. 12) $$v^{(t)} = (k^{(n)}, \dots, k^{(n-t+1)}),$$

компоненты которого удовлетворяют условиям

$$1 \leqq k^{(n)}, \dots, k^{(n-t+1)} \leqq p^{n-t},$$
$$p^{n-t-1}+1 \leqq \max\{k^{(n)}, \dots, k^{(n-t+1)}\}.$$

Для вектора $v^{(t)}$ фиксируем «весовой вектор»

$$b_v = (i_0, \dots, i_{t-1}),$$

где $0 \leqq i_v \leqq p-1$, если $k^{(n-v)}=1$, и $1 \leqq i_v \leqq p-1$, если $k^{(n-v)}>1$ $(v=0, 1, \dots, t-1)$.

Пусть

(3. 14) $$k^{(n-\tau_1)}, k^{(n-\tau_2)}, \dots, k^{(n-\tau_{q+1})}$$

— множество всех компонент вектора $v^{(t)}$, которым соответствуют ненулевые компоненты вектора b_v (т. е. $i_{\tau_j} \neq 0$; $j=1, 2, \dots, q+1$). Найдём множества

$M_{j_1 \ldots j_d}$ и числа $d_m, r^{(s)}$ в соответствии с определением 3. 1. Векторы $v^{(t)}$ и b_v однозначно определяют группу

$$A = A^{(n)}_{\bar{k}^{(n)}} \cdot \ldots \cdot A^{(n-t+1)}_{\bar{k}^{(n-t+1)}},$$

где

$$\bar{k}^{(n-j)} = \begin{cases} k^{(n-j)}+1, & \text{если} \quad i_j \neq 0, \\ k^{(n-j)}, & \text{если} \quad i_j = 0. \end{cases}$$

Предположим, что числа (3. 14) расположены так, что

$$d_1 \geqq d_2 \geqq \ldots \geqq d_{q+1}.$$

Для каждого фиксированного вектора $(j_1, \ldots, j_d)$, согласно теореме 3. 1, построим отмеченное пространство L. Сопоставим каждому отмеченному пространству L группу R (с главной частью A) по теореме 3. 1. Тогда R — ядро некоторого неприводимого комплексного представления группы G. Таким путём могут быть получены ядра всех неприводимых комплексных представлений группы G.

Число всех нормальных делителей группы G, удовлетворяющих иусловям $A \subseteqq H \subseteqq G$ и $[H:A] = p^n$, равно числу $\mathfrak{N}(n)$, определённому в теореме 3. 3. Все такие нормальные делители находятся во взаимно однозначном соответствии с подпространствами отмеченного пространства L, инвариантными относительно некоторого нильпотентного линейного оператора S (заданного в определении 3. 1), и описаны в следствии 3. 1.

При переменных числах t $(1 \leqq t \leqq n+1)$, векторах $v^{(t)}$ и b_v, параметрах $t_i^{(l,v)}$, всевозможных разбиениях (3.10) и всевозможных выборах подпространств $v^{(j)}$ (см. следствие 3. 1) указанным образом могут быть получены все нормальные делители группы G.

Таким образом, множество всех нормальных делителей H группы G распадается на подмножества, определённые включениями $A \subseteqq H \subseteqq R$. Число нормальных делителей внутри одного подмножества определяется числом $\mathfrak{N}(n)$. Классификация нормальных делителей внутри одного подмножества сводится к описанию специальных подпространств линейного пространства над простым полем характеристики p, инвариантных относительно некоторого нильпотентного оператора.

Литература

[1] С. Д. Берман, О характерах конечных нильпотентных групп, *Успехи мат. наук,* 1959, **14,** № 5, (217—218).

[2] С. Д. Берман, Нормальные делители группы треугольных матриц над конечным полем, *Докл. и сообщ. Ужг. унив.,* 1960, № 3 (50).

[3] К. Бузаши, Ядра неприводимых представлений силовской p-подгруппы S_3 симметрической группы Sp^3. *Publ. Math. Debrecen,* **14** (1967), 285—310.

[4] К. Бузаши, О строении сплетения конечного числа циклических групп простого порядка, *Publ. Math. Debrecen,* **15** (1968), 107—129.

[5] К. Бузаши, Ядра неприводимых представлений силовской p-подгруппы симметрической группы Sp^n, *Publ. Math. Debrecen,* **16** (1969), 199—227.

[6] Curtis C. W.-Reiner I., Representations theory of finite groups and associative algebras, *New York—London,* 1962.

[7] L. Kalujnine, Sur les p-groupes de Sylow du groupe symetrique de degre m, *C. R. Acad. Sci. Paris* **221** (1945), 222—224.

[8] L. Kalujnine, La structure des p-groupes de Sylow des groupes symetriques finis, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.,* (3), **65** (1948), 239—276.

[9] A. Speiser, Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, *Berlin,* 1937.

[10] A. I. Weir, Sylow p-groups of the classical groups over finite fields with characteristic prime to p, *Proc. Amer. Math. Soc.* **6** (1955), 529—533.

[11] A. I. Weir, The Sylow subgroups of the symmetric group, *Proc. Amer. Math. Soc.* **6** (1955), 534—541.

(Поступило 7. IV. 1968 г.)