Суперпозиция многоместных фунций

Л. М. ГЛУСКИН (Харьков)

Алгебраическая теория полугрупп является, как известно, абстрактным учением о суперпозиции преобразований. Иначе говоря, она изучает алгебраические аспекты суперпозиции функций одной переменной — полных и частичных, обратимых и необратимых, однозначных и многозначных. При этом речь идет о (полных или частичных) отображениях какого-либо фиксированного множества Ω в себя[1]).

Представляется вполне естественным аналогичное изучение суперпозиции функций многих переменных. Оно было начато уже сравнительно давно К. Менгером и его учениками [1], [2]. Пока здесь встречаются лишь весьма немногочисленные работы. В них при $n>1$ рассматриваются алгебраические системы, элементами которых являются (за исключением работ [5]—[6]) полные n-местные функции на каком-либо множестве Ω: однозначные отображения декартовой степени Ω^n в Ω.

Настоящая статья посвящена изучению алгебраических систем различных n-местных функций, главным образом, «симметрических» систем: алгебры $P_n(\Omega)$ всех (вообще говоря, многозначных) n-местных функций на множестве Ω (со значениями в этом же множестве), ее подалгебр $W_n(\Omega)$ и $S_n(\Omega)$, состоящих из всех частичных и соответственно полных однозначных функций, и некоторых их подалгебр.

Уже в § 1 мы сталкиваемся с существенными отличиями между алгебрами n-местных функций при $n=1$ и $n>1$. При $n=1$ замкнутое относительно суперпозиции множество S функций является, как известно, полугруппой, независимо от того, являются ли функции из S однозначными или многозначными. При $n>1$ алгебры однозначных функций являются суперассоциативными (менгеровскими), а многозначных — нет (п. п. 1. 5. 1—1. 6. 2, 1. 8—1. 9).

Известно, что симметрические полугруппы функций одной переменной весьма богаты идеалами [6], [7]. Естественно, идеалом алгебры считать, прежде всего полный гомоморфный прообраз нуля. Оказывается, не только симметрические алгебры n-местных функций, но и многие их подалгебры при $n>1$ не обладают нетривиальными гомоморфизмами (теоремы п. п. 4. 2—4. 4).

---

[1]) Изучение суперпозиции отображений (вообще говоря, многозначных) одного множества в другое привело В. В. Вагнера (см., например [17]) к изучению так называемых полугруд — алгебраических систем с одной тернарной операцией с тождествами типа ассоциативности.

В частности, они не содержат и собственных sl-идеалов — прообразов нуля (см. п. п., 1. 11. 1, 1. 12).

В § 2 для симметрических алгебр многоместных функций развита теория плотных вложений, близкая к аналогичной теории для полугрупп преобразований. Тем самым получена характеристика различных симметрических алгебр многоместных функций в терминах их весьма просто устроенных плотных подалгебр. Отличие от $n=1$ состоит здесь в более бедной структуре v-идеалов и sv-идеалов. Для алгебр многозначных функций при $n\neq 1$ получены характеристики лишь как для систем с двумя операциями (теоремы п. п. 2. 10, 2. 10. 1).

В § 3 рассмотрены автоморфизмы алгебр многоместных функций — решение здесь не отличается от $n=1$. В § 4 найдены гомоморфизмы ряда симметрических алгебр — о них уже шла речь выше. Из результатов этого § лишь теорема п. 4. 5. 1 о гомоморфизмах алгебр $V_{nr}(\mathbf{\Omega})$ оказалась аналогичной соответствующему результату теории полугрупп.

В работе повсеместно использованы методы, а часто и результаты теории полугрупп. В качестве аппарата широко применяются бинарные отношения (поскольку n-местные функции рассматриваются как бинарные отношения между элементами множеств $\mathbf{\Omega}^n$ и $\mathbf{\Omega}$).

В работе приняты следующие обозначения: $|X|$ — мощность множества X, $\mathfrak{P}(X)$ — множество всех подмножеств множества X; $\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} X_i = X_1\times X_2\times\ldots\times X_n$ — декартово произведение множеств X_i; X^n — декартова степень множества X; $\bar{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)=(x_i)$ — элемент из X^n; $x^n=(x, x, \ldots, x)$; $\mathbf{\Delta}(X^n)$ — диагональ, т. е. подмножество X^n, состоящее из всех элементов x^n; $\forall$ — квантор всеобщности, $\exists$ — квантор существования, $\rightarrow$ — импликация, $\leftrightarrow$ — логическая эквивалентность, $\wedge$ — коньюнкция, $\vee$ — дизъюнкция.

§ 1. Суперпозиции n-отношений

1. 1. Множество S с одной $(n+1)$-арной операцией

$$s_0\, s_1\, s_2 \ldots s_n = s \qquad (s_i, s\in S) \tag{1}$$

называется *оперативом* ($(n+1)$-оперативом). В дальнейшем, как правило, вместо (1) операцию в S будем записывать в виде

$$s = s_0\,\bar{s},$$

где

$$\bar{s}=(s_1, s_2, \ldots, s_n)\in S^n.$$

Непустое подмножество A оператива S назовем его s-идеалом, если

$$\mathop{\forall}\limits_{a\in A,\, \bar{s}\in S^n} a\bar{s}\in A;$$

v-идеалом (l-идеалом), если

$$\mathop{\forall}\limits_{\bar{a}\in A^n,\, s\in S} s\bar{a}\in A \quad \Bigl(\mathop{\forall}\limits_{\substack{\bar{a}\in S^n\setminus(S\setminus A)^n\\ s\in S}} s\bar{a}\in A\Bigr).$$

Всякий v-идеал является, очевидно, l-идеалом. Если s-идеал A является одновременно и v-идеалом (соответственно l-идеалом), то будем называть его sv-идеалом (sl-идеалом). Если оператив S содержит sl-идеал, состоящий из единственного элемента O, то O называется нулем оператива S.

1. 2. Операция (1) индуцирует на декартовой степени S^n оператива S бинарную операцию: для любых $\bar{s}, \bar{t} \in S^n$

$$\bar{s}\bar{t} = (s_1 \bar{t}, s_2 \bar{t}, \ldots, s_n \bar{t}).$$

Оператив S называется менгеровским, если в нем выполняется «суперассоциативный» [1—2] («подстановочный» [3]) закон: для любых $s_0 \in S$, $\bar{s}, \bar{t} \in S^n$

$$(s_0 \bar{s})\bar{t} = s_0(\bar{s}\bar{t}). \tag{2}$$

При $n=1$ тождество (2) сводится к обычному ассоциативному закону, т. е. менгеровский оператив при $n=1$ является полугруппой.

Известно [2], что оперативом Менгера является множество $S_n(\Omega)$ всех n-местных функций, всюду определенных на каком-либо множестве Ω, со значениями в этом же множестве; операция в $S_n(\Omega)$ — суперпозиция функций. Ниже (см. п. 1. 6) будет приведен еще один важный пример менгеровского оператива, содержащего $S_n(\Omega)$ в качестве подоператива.

Обозначим через $M_1[S]$, $M_2[S]$ подмножества оператива S^n, через $M_3[S]$ — подмножество оператива S со следующими свойствами: для любых $\bar{c} \in S^n$, $a \in S$

$$\begin{cases} \bar{c} \in M_1[S] \leftrightarrow \underset{x \in S,\, \bar{y} \in S^n}{\forall} (x\bar{y})\bar{c} = x(\bar{y}\bar{c}), \\ \bar{c} \in M_2[S] \leftrightarrow \underset{x \in S,\, \bar{y} \in S^n}{\forall} (x\bar{c})\bar{y} = x(\bar{c}\bar{y}), \\ a \in M_3[S] \leftrightarrow \underset{\bar{x}, \bar{y} \in S^n}{\forall} (a\bar{x})\bar{y} = a(\bar{x}\bar{y}). \end{cases} \tag{3}$$

Если оператив S содержит нуль, то ни одно из множеств $M_i[S]$ не пусто: $S^n \setminus (S \setminus \{O\})^n \subseteqq M_1[S] \cap M_2[S]$, $O \in M_3[S]$.

Теорема. *Множества $M_1[S]$, $M_2[S]$, если они не пусты, являются подполугруппами оператива S^n; $M_3[S]$ — менгеровским подоперативом оператива S.*

Доказательство. Пусть $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\bar{y}$ — любые элементы из S^n, $\bar{c} \in M_1[S]$. Из (3) следует $(x_i \bar{y})\bar{c} = x_i(\bar{y}\bar{c})$ при $i = 1, 2, \ldots, n$ и, по определению индуцированной операции в S^n, $(\bar{x}\bar{y})\bar{c} = \bar{x}(\bar{y}\bar{c})$. Отсюда и из (3) для любых $\bar{a}, \bar{c} \in M_1[S]$ имеем

$$(x\bar{y})(\bar{a}\bar{c}) = ((x\bar{y})\bar{a})\bar{c} = (x(\bar{y}\bar{a})\bar{c}) = x((\bar{y}\bar{a})\bar{c}) = x(\bar{y}(\bar{a}\bar{c})),$$

и $\bar{a}\bar{c} = (a_1\bar{c}, a_2\bar{c}, \ldots, a_n\bar{c}) \in M_1[S]$. Точно так же для любых $\bar{a}, \bar{c} \in M_2[S]$

$$(x(\bar{a}\bar{c}))\bar{y} = ((x\bar{a})\bar{c})\bar{y} = (x\bar{a})(\bar{c}\bar{y}) = x(\bar{a}(\bar{c}\bar{y})) = x((\bar{a}\bar{c})\bar{y}).$$

При этом $\bar{a}(\bar{b}\bar{c}) = (\bar{a}\bar{b})\bar{c}$, для любых $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in M_i[S]$ $(i=1, 2)$, и M_i-полугруппы.

Аналогично для любых $a \in M_3 = M_3[S]$, $\bar{c} \in (M_3)^n$, $\bar{x}$, $\bar{y} \in S^n$, имеем

$$\big((a\bar{c})\bar{x}\big)\bar{y} = \big(a(\bar{c}\bar{x})\big)\bar{y} = a\big((\bar{c}\bar{x})\bar{y}\big) = a\big(\bar{c}(\bar{x}\bar{y})\big) = (a\bar{c})(\bar{x}\bar{y}),$$

и

$$a\bar{c} \in M_3.$$

1. 3. Бинарным отношением [4] между элементами множеств Ω, Π называется любое подмножество a декартова произведения $\Pi \times \Omega$. Срезом бинарного отношения a через элемент $\xi \in \Omega$ называется множество $a\langle\xi\rangle$ всех элементов $\eta \in \Pi$ таких, что $(\eta, \xi) \in a$. Срезом отношения a через подмножество $\Omega' \subseteq \Omega$ называется множество $a\langle\Omega'\rangle = \bigcup\limits_{\xi \in \Omega'} a\langle\xi\rangle$[1]). Через a^{-1} обозначается следующее бинарное отношение из $\mathfrak{P}(\Omega \times \Pi)$: для любых $\xi \in \Omega$, $\eta \in \Pi$

$$(\xi, \eta) \in a^{-1} \leftrightarrow (\eta, \xi) \in a.$$

Тогда $a\langle\Omega\rangle$ (соответственно $a^{-1}\langle\Pi\rangle$) — множество всех $\eta \in \Pi$ $(\xi \in \Omega)$, для которых существует элемент $\xi \in \Omega$ $(\eta \in \Pi)$ такой, что $(\eta, \xi) \in a$.

Пусть a — произвольное бинарное отношение из $\mathfrak{P}(\Pi \times \Omega)$, Σ — подмножество Ω. Ограничением отношения a на множестве Σ называется следующее бинарное отношение $a|_\Sigma \in \mathfrak{P}(\Pi \times \Omega)$: для любых $\xi \in \Omega$, $\eta \in \Pi$

$$(\eta, \xi) \in a|_\Sigma \leftrightarrow \xi \in \Sigma \wedge (\eta, \xi) \in a.$$

Если $a \subseteq \Omega \times \Pi$, $b \subseteq \Pi \times \Sigma$, то произведением отношений a и b называется следующее отношение $a \circ b \subseteq \Omega \times \Sigma$: для любых $\zeta \in \Omega$, $\xi \in \Sigma$

(4) $$(\zeta, \xi) \in a \circ b \leftrightarrow \underset{\eta \in \Pi}{\exists} (\zeta, \eta) \in a \wedge (\eta, \xi) \in b.$$

Известно, что умножение бинарных отношений ассоциативно: для любых $a \in \mathfrak{P}(\Omega_1 \times \Omega_2)$, $b \in \mathfrak{P}(\Omega_2 \times \Omega_3)$, $c \in \mathfrak{P}(\Omega_3 \times \Omega_4)$

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c).$$

Умножение бинарных отношений вполне дистрибутивно относительно операции объединения: для любых a, $a_\alpha \in \mathfrak{P}(\Omega_1 \times \Omega_2)$, b, $b_\alpha \in \mathfrak{P}(\Omega_2 \times \Omega_3)$

(5) $$\begin{aligned} a \circ (\cup_\alpha b_\alpha) &= \cup_\alpha a \circ b_\alpha, \\ (\cup_\alpha a_\alpha) \circ b &= \cup_\alpha a_\alpha \circ b. \end{aligned}$$

1. 4. Пусть Ω — произвольное множество; k-местным отношением между элементами множества Ω называется любое подмножество a декартовой степени Ω^k. Обозначим через $P_n(\Omega) = P$ множество всех $(n+1)$ — местных отношений a между элеметами множества Ω. Вместо $(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \ldots, \boldsymbol{\xi}_n) \in a$ будем писать $(\boldsymbol{\eta}, \bar{\boldsymbol{\xi}}) \in a$, считая a бинарным отношением из $\mathfrak{P}(\Omega \times \Omega^n)$. Обозначим далее

$$pr_s\, a = a\langle\Omega^n\rangle, \quad pr_v\, a = a^{-1}\langle\Omega\rangle.$$

[1]) Здесь, как и в ряде других мест, есть отличия от обозначений В. В. Вагнера [4] и близких к нему работ (например, [5]).

По определению $pr_s a(pr_v a)$ — множество всех элементов $\boldsymbol{\eta} \in \Omega$ (соответственно $\bar{\boldsymbol{\xi}} \in \Omega^n$), для которых существует элемент $\bar{\boldsymbol{\xi}} \in \Omega^n$ $(\eta \in \Omega)$ такой, что $(\eta, \bar{\boldsymbol{\xi}}) \in a$.

Для всякого $\bar{a} = (a_i) \in P^n$ обозначим через $\mathbf{a} = \bar{a}_\Delta$ полупрямое произведение первого рода [4] отношений $a_1, a_2, \ldots, a_n$:

$$\mathbf{a} = \bar{a}_\Delta = \mathop{\Delta}_{i=1}^{n} a_i .$$

Иначе говоря, для любых $\bar{\xi}, \bar{\eta} = (\boldsymbol{\eta}_i) \in \Omega^n$

$$(\bar{\boldsymbol{\eta}}, \bar{\boldsymbol{\xi}}) \in \mathbf{a} \leftrightarrow \forall_i (\boldsymbol{\eta}_i, \bar{\boldsymbol{\xi}}) \in a_i. \tag{6}$$

При этом

$$\mathbf{a}^{-1}\langle \Omega^n \rangle = \bigcap_{i=1}^{n} pr_v a_i .$$

Если $a_i' = a_i|_\Sigma$, где $\Sigma = \mathbf{a}^{-1}\langle \Omega^n \rangle$, $\bar{a}' = (a_i')$, то $\bar{a}_\Delta = (\bar{a}')_\Delta$ и для любых $\bar{\boldsymbol{\xi}} \in \Omega^n$, $\Pi \subseteq \Omega^n$

$$\mathbf{a}\langle \bar{\boldsymbol{\xi}} \rangle = \mathop{\times}_{i=1}^{n} a_i' \langle \bar{\boldsymbol{\xi}} \rangle, \quad \mathbf{a}\langle \Pi \rangle = \mathop{\times}_{i=1}^{n} a_i' \langle \Pi \rangle .$$

Для произвольного подмножества $A \subseteq P$ обозначим через A_Δ множество всех отношений $\mathbf{a} = \bar{a}_\Delta$, где $\bar{a} \in A^n$.

1. 5. Определим в P $(n+1)$-арную операцию $a * \bar{b} = a * (b_i) = ab_1 b_2 \ldots b_n$ $(a, b_i \in P)$: для любых $\bar{\boldsymbol{\xi}} \in \Omega^n$, $\boldsymbol{\eta} \in \Omega$, $a \in P$, $\bar{b} = (b_i) \in P^n$

$$(\boldsymbol{\eta}, \bar{\boldsymbol{\xi}}) \in a * \bar{b} \leftrightarrow \mathop{\exists}_{\zeta \in \Omega^n} (\boldsymbol{\eta}, \bar{\boldsymbol{\zeta}}) \in a \wedge \{\forall_i (\zeta_i, \bar{\boldsymbol{\xi}}) \in b_i\} \tag{7}$$

или, что то же самое

$$(\boldsymbol{\eta}, \bar{\boldsymbol{\xi}}) \in a * \bar{b} \leftrightarrow \mathop{\exists}_{\zeta \in \Omega^n} (\boldsymbol{\eta}, \bar{\boldsymbol{\zeta}}) \in a \wedge (\bar{\boldsymbol{\zeta}}, \bar{\boldsymbol{\xi}}) \in \bar{b}_\Delta, \tag{8}$$

т. е.

$$a * \bar{b} = a \circ \mathbf{b} = a \circ \bar{b}_\Delta .$$

Предполагается, что P содержит отношение O такое, что $pr_s O = \emptyset$, $pr_v O = \emptyset$. O является нулем, оператива P. При этом $a * \bar{b} = O$, если $\mathbf{b} = O$.

Бинарную операцию, индуцированную в P^n операцией (7) (см. п. 1. 1) обозначим также через $*$: если $\bar{b} = (b_i)$, $\bar{c} = (c_i) \in P^n$, то (см. п. 1. 4)

$$\bar{b} * \bar{c} = (b_1 * \bar{c}, b_2 * \bar{c}, \ldots, b_n * \bar{c}) = \mathop{\Delta}_{i=1}^{n} (b_i * \bar{c}) = \mathop{\Delta}_{i=1}^{n} (b_i \circ \bar{c}_\Delta).$$

Из (6), (8), (4), (7) следует для любых $\bar{\boldsymbol{\eta}} = (\boldsymbol{\eta}_i)$, $\bar{\boldsymbol{\xi}} \in \Omega^n$

$$\begin{gathered}(\bar{\boldsymbol{\eta}}, \bar{\boldsymbol{\xi}}) \in (\bar{b} * \bar{c})_\Delta \leftrightarrow \forall_i (\boldsymbol{\eta}_i, \bar{\boldsymbol{\xi}}) \in b_i * \bar{c} = b_i \circ \bar{c}_\Delta \leftrightarrow \\ \leftrightarrow \forall_i \mathop{\exists}_{\zeta_i \in \Omega^n} (\boldsymbol{\eta}_i, \bar{\boldsymbol{\zeta}}_i) \in b_i \wedge (\bar{\boldsymbol{\zeta}}_i, \bar{\boldsymbol{\xi}}) \in \bar{c}_\Delta, \\ (\bar{\boldsymbol{\eta}}, \bar{\boldsymbol{\xi}}) \in \bar{b}_\Delta \circ \bar{c}_\Delta \leftrightarrow \mathop{\exists}_{\zeta \in \Omega^n} (\bar{\boldsymbol{\eta}}, \bar{\boldsymbol{\zeta}}) \in \bar{b}_\Delta \wedge (\bar{\boldsymbol{\zeta}}, \bar{\boldsymbol{\xi}}) \in \bar{c}_\Delta \leftrightarrow \mathop{\exists}_{\zeta \in \Omega^n} \forall_i (\boldsymbol{\eta}_i, \bar{\boldsymbol{\zeta}}) \in b_i \wedge (\bar{\boldsymbol{\zeta}}, \bar{\boldsymbol{\xi}}) \in \bar{c}_\Delta .\end{gathered} \tag{9}$$

Таким образом,

$$\bar{b}_\Delta \circ \bar{c}_\Delta \subseteqq (\bar{b} * \bar{c})_\Delta. \tag{10}$$

При $n=1$ операции $*$ и $\circ$ совпадают; при $n>1$ существует элемент $\bar{c} \in P^n$, для которого при некотором $\bar{\xi} \in \Omega^n$ множество $\bar{c}_\Delta\langle\bar{\xi}\rangle$ содержит более одного элемента; например, $(\bar{\zeta}, \bar{\xi}) \in \bar{c}_\Delta$, $(\bar{\varepsilon}, \bar{\xi}) \in \bar{c}_\Delta$ и $\bar{\zeta} \neq \bar{\varepsilon}$. Выберем произвольно элементы $\eta_i \in \Omega$, и пусть $\bar{\eta} = (\eta_i)$. P содержит элементы b_i такие, что $b_1\langle\bar{\zeta}\rangle = \eta_1$, $b_1\langle\Omega^n \setminus \{\bar{\zeta}\}\rangle = \gamma_1 \neq \eta_1$, $b_2\langle\bar{\varepsilon}\rangle = \eta_2$, $b_2\langle\Omega^n \setminus \{\bar{\varepsilon}\}\rangle = \gamma_2 \neq \eta_2$, $b_j\langle\Omega^n\rangle = \eta_j$ при $j>2$. Тогда множество $(\mathbf{b} \circ \mathbf{c})$ $\langle\bar{\xi}\rangle$ состоит из «векторов» $(\eta_1, \gamma_2, \eta_3, \ldots, \eta_n)$, $(\gamma_1, \eta_2, \eta_3, \ldots, \eta_n)$ и, возможно, $(\gamma_1, \gamma_2, \eta_3, \ldots, \eta_n)$. В то же время из (7), (9) имеем $\eta_i \in (b_i * \bar{c})\langle\bar{\xi}\rangle$, $\bar{\eta} \in (\bar{b} * \bar{c})_\Delta\langle\bar{\xi}\rangle$. Таким образом, вообще говоря, при $n \neq 1$

$$\bar{b}_\Delta \circ \bar{c}_\Delta \neq (\bar{b} * \bar{c})_\Delta.$$

1. 5. 1. При $n=1$ операция (7) совпадает с обычным умножением бинарных отношений (п. 1. 3), а $P_1(\Omega)$ является полугруппой.

При $n>1$ оператив $P = P_n(\Omega)$ не является менгеровским.

В самом деле из (8) для любых $a \in P$, $\bar{b}, \bar{c} \in P^n$ имеем

$$(a * \bar{b}) * \bar{c} = (a \circ \mathbf{b}) \circ \mathbf{c} = a \circ (\mathbf{b} \circ \mathbf{c}), \quad a * (\bar{b} * \bar{c}) = a \circ (\bar{b} * \bar{c})_\Delta.$$

Вместе с (10) это дает

$$(a * \bar{b}) * \bar{c} \subseteqq a * (\bar{b} * \bar{c}).$$

Если $\bar{b}, \bar{c} \in P^n$ и $(\bar{\eta}, \bar{\xi}) \in (\bar{b} * \bar{c})_\Delta \setminus (\mathbf{b} \circ \mathbf{c})$ (см. п. 1. 5), то обозначим через a отношение из P такое, что $a\langle\bar{\eta}\rangle = \{\alpha\}$, $a\langle\Omega^n \setminus \{\bar{\eta}\}\rangle = \{\beta\}$ $(\alpha, \beta \in \Omega, \alpha \neq \beta)$. Тогда $(\alpha, \bar{\xi}) \in a * (\bar{b} * \bar{c}) \setminus (a * \bar{b}) * \bar{c}$.

1. 5. 2. Элемент $\bar{b} \in P^n$ в п. 1. 5 можно было выбрать проще: пусть $\bar{\eta} = (\eta_i)$ — любой элемент из Ω^n, $b_1 = \{(\eta_1, \bar{\zeta})\}$, $b_i = \{(\eta_i, \bar{\varepsilon})\}$ при $i \neq 1$. Тогда $(\bar{b} * \bar{c})_\Delta = \{(\bar{\eta}, \bar{\xi})\}$, $\bar{b}_\Delta \circ \bar{c}_\Delta = 0$.

Доказательство, приведенное в п. 1. 5 удобно тем, что его можно без изменений использовать в п. 1. 9.

1. 6. Обозначим через $W = W_n(\Omega)$ подмножество $P_n(\Omega)$, состоящее из всех однозначных отношений между элементами множеств Ω^n и Ω. Иначе говоря, отношение a из $P_n(\Omega)$ тогда и только тогда содержится в $W_n(\Omega)$, когда для любых $\eta, \zeta \in \Omega$, $\bar{\xi} \in \Omega^n$

$$(\eta, \bar{\xi}) \in a \wedge (\zeta, \bar{\xi}) \in a \rightarrow \eta = \zeta.$$

Очевидно, что $W_n(\Omega)$ является подоперативом оператива $P_n(\Omega)$.

Каждому отличному от O отношению $a \in W_n(\Omega)$ взаимно однозначно соответствует n-местная функция f_a с областью определения $pr_v a \subseteqq \Omega^n$ и областью значений $pr_s a \subseteqq \Omega$: при любых $\bar{\xi} = (\xi_i) \in \Omega^n$, $\eta \in \Omega$

$$f_a(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \eta \leftrightarrow (\eta, \bar{\xi}) \in a.$$

Операция (7) в $W_n(\Omega)$ приводит, как нетрудно убедиться, к суперпозиции функций: если a, b_i, $c \in W_n(\Omega)$, $c = a * \bar{b}$, то

$$f_c = f_a(f_{b_1}, f_{b_2}, \ldots, f_{b_n}).$$

Если $pr_v a = \Omega$, то $f_a \in S_n(\Omega)$ (см. п. 1. 2). В дальнейшем мы будем через $S_n(\Omega)$ обозначать подоператив $W_n(\Omega)$, состоящий из всех $a \in W_n(\Omega)$, для которых $Pr_v a = \Omega^n$. $W_1(\Omega)$ является полугруппой всех частичных преобразований множества Ω, а $S_1(\Omega)$ — полугруппой всех его полных преобразований.

Об элементах оператива $P_n(\Omega)$ можно было бы также говорить как о многоместных функциях, но разумеется, многозначных.

1. 6. 1. Если A — подмножество оператива S, то через $\tilde{A}$ обозначим множество всех элементов $\bar{x} \in S^n$, для каждого из которых существует элемент $\bar{a} \in A^n$, удовлетворяющий условию:

$$\bigvee_{s \in S} s\bar{x} = s\bar{a}$$

Нетрудно проверить, что для элементов $\bar{x}, \bar{y} \in P^n$, где $P = P_n(\Omega)$, условие

$$\bigvee_{s \in P} s * \bar{x} = s * \bar{y}$$

выполняется тогда и только тогда, когда $\bar{x}_\Delta = \bar{y}_\Delta$ (см. п. 1. 4).

Теорема. $\widetilde{W_n(\Omega)} = M_1[P_n(\Omega)]$ (см. п. п. 1. 2, 1, 6).

Доказательство. Если $\bar{c} \in W^n$ и $(\bar{\zeta}, \bar{\xi}) \in \bar{c}_\Delta$, $(\boldsymbol{\varepsilon}, \bar{\xi}) \in \bar{c}_\Delta$, то $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \bar{\zeta}$ и, вместо (9), имеем

$$(\bar{\boldsymbol{\eta}}, \bar{\xi}) \in (\bar{b} * \bar{c})_\Delta \leftrightarrow \underset{\bar{\zeta} \in \Omega^n}{\exists} (\bar{\boldsymbol{\eta}}, \bar{\zeta}) \in \bar{b}_\Delta \wedge (\bar{\zeta}, \bar{\xi}) \in \bar{c}_\Delta \leftrightarrow (\bar{\boldsymbol{\eta}}, \bar{\xi}) \in \bar{b}_\Delta \circ \bar{c}_\Delta;$$

в силу (8), $(a * \bar{b}) * \bar{c} = a * (\bar{b} * \bar{c})$ для любых $a \in P$, $\bar{b} \in P^n$, $\bar{c} \in W^n$. Из (8) вытекает справедливость этого же соотношения и для любого $\bar{c} \in \tilde{W}$, т. е. для таких $\bar{c} = (c_i) \in P^n$, что при $|c_j \langle \bar{\xi} \rangle| > 1$ следует $\bar{\xi} \notin \bigcap_{i=1}^{n} pr_v c_i$.

Если же $\bar{c} \notin \tilde{W}$, то в п. п. 1. 5, 1. 5. 1 показано, как подобрать $a \in P$, $\bar{b} \in P^n$ так, чтобы $(a * \bar{b}) * \bar{c} \neq a * (\bar{b} * \bar{c})$.

1. 6. 2. В частности, из п. п. 1. 6. 1. и 1. 2 следует: $W_n(\Omega)$ *является менгеровским оперативом, а* $\tilde{W}$ *и* W^n — *полугруппами.*

1. 7. Отношение $u \in P$ назовем цилиндрическим, если для любых $\bar{\boldsymbol{\xi}} \in \Omega^n$, $\boldsymbol{\eta} \in \Omega$

$$(\boldsymbol{\eta}, \bar{\xi}) \in u \leftrightarrow \bar{\xi} \in \mathrm{pr}_v u \wedge \boldsymbol{\eta} \in \mathrm{pr}_s u.$$

Если $pr_s u = \Sigma$, $pr_v u = \Pi$, то будем записывать такое цилиндрическое отношение в виде $u = (\Sigma, \Pi)$. Будем, кроме того, писать $(\Sigma, \{\bar{\xi}\}) = (\Sigma, \bar{\xi})$, $(\{\boldsymbol{\eta}\}, \Pi) = (\boldsymbol{\eta}, \Pi)$.

Бинарное цилиндрическое отношение обычно называют прямоугольным. Обозначим через $C = C_n(\Omega)$ подмножество P, состоящее из всех цилиндрических отношений. Если $\Sigma, \Sigma_i \subseteq \Omega, \Pi, \Pi_i \subseteq \Omega^n$, $\bar{a} \in P^n$, $c \in P$, $w_i = (\Sigma_i, \Pi_i)$, $\bar{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$, то из (7) имеем:

$$(11) \qquad (\Sigma, \Pi) * \bar{a} = (\Sigma, \mathbf{a}^{-1} \langle \Pi \rangle),$$

$$c * \bar{w} = \left(c \left\langle \mathop{\times}_{i=1}^{n} \Sigma_i \right\rangle, \bigcap_{i=1}^{n} \Pi_i \right).$$

В частности,

$$(12)\qquad (\Sigma, \Pi)*\overline{w} = \begin{cases} \left(\Sigma, \bigcap_{i=1}^{n} \Pi_i\right), & \text{если} \quad \Pi \cap \left(\bigtimes_{i=1}^{n} \Sigma_i\right) \neq \emptyset, \\ O, & \text{если} \quad \Pi \cap \left(\bigtimes_{i=1}^{n} \Sigma_i\right) = \emptyset. \end{cases}$$

Если $\Sigma \subseteqq \Omega (\Pi \subseteqq \Omega^n)$, то обозначим через R_Σ (соответственно L_Π) подмножество P, состоящее из O и всех отношений $u = (\Sigma, \Pi') \in C$ (соответственно $(\Sigma', \Pi) \in C$).

Теорема. *Множества $L_\Pi(R_\Sigma)$, и только они, являются минимальными ненулевыми s-идеалами (v-идеалами) оператива $P_n(\Omega)$; $C_n(\Omega)$ — его единственным минимальным ненулевым sv-идеалом.*

Доказательство. Из (11) следует, что L_Π, R_Σ C являются соответственно s-идеалом, v-идеалом и sv-идеалом оператива $P_n(\Omega)$. Если L — ненулевой v-идеал оператива P содержащийся в L_Π, $u = (\Sigma', \Pi) \in L$, Σ' — произвольное непустое подмножество Ω, ξ — любой элемент из Σ', $a = (\Sigma, \xi^n)$, то из (12) имеем $(\Sigma, \Pi) = a * u^n \in L$, $L = L_\Sigma$, и L_Σ — минимальный ненулевой v-идеал оператива P; аналогично R_Π — его минимальный ненулевой s-идеал.

Если A — ненулевой sv-идеал оператива P, $a \in A \setminus \{0\}$, $(\boldsymbol{\eta}, \overline{\boldsymbol{\xi}}) \in a$, $c_i = (\xi_i, \overline{\xi})$, $\bar{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, то в силу (11) $a * \bar{c} \in (A \cap C) \setminus \{O\}$. Как и выше, из (12) легко теперь показать, что $C \subseteqq A$, и C является минимальным sv-идеалом оператива P.

1.8. Для любого подмножества $\boldsymbol{\Pi} \subseteqq \boldsymbol{\Omega}^n$ обозначим через $pr_j \boldsymbol{\Pi}$ подмножество $\boldsymbol{\Omega}$, состоящее из всех $\zeta_j \in \boldsymbol{\Omega}$, для которых существует $\overline{\zeta} = (\zeta_i) \in \boldsymbol{\Pi}$. Множество $[\boldsymbol{\Pi}] = \bigtimes_{i=1}^{n} pr_i \boldsymbol{\Pi}$ называется (4) декартовым замыканием множества $\boldsymbol{\Pi}$. Если $\boldsymbol{\Pi} = \{\overline{\zeta}^{(j)}\}_{j=1}^n$, где $\overline{\zeta}^{(j)} = (\zeta_1^{(j)}, \zeta_2^{(j)}, \ldots, \zeta_n^{(j)})$, то множество $[\boldsymbol{\Pi}] = [\zeta^{(j)}]_{j=1}^n$, состоит из всех векторов $\overline{\zeta}$ вида $(\zeta_1^{(j_1)}, \zeta_2^{(j_2)}, \ldots, \zeta_n^{(j_n)})$, где индексы j_α независимо друг от друга пробегают значения $1, 2, \ldots, n$.

Теорема. *Оператив* $M_2[P_n(\boldsymbol{\Omega})]$ (см. п. 1.2) *состоит из тех и только тех векторов $\bar{b} = (b_j) \in P^n$, которые при любых $\overline{\zeta}^{(j)} \in \boldsymbol{\Omega}^n$, $\boldsymbol{\eta}_j \in \boldsymbol{\Omega}$ удовлетворяют условию*:

$$\{\forall_{j=1,2,\ldots,n} (\boldsymbol{\eta}_j, \overline{\zeta}^{(j)}) \in b_j\} \to \exists_{\overline{\zeta} \in [\overline{\zeta}^{(j)}]_{j=1}^n} \forall_{j=1,2,\ldots,n} (\boldsymbol{\eta}_j, \overline{\zeta}) \in b_j.$$

Доказательство. Из п. п. 1.5, 1.5.1 следует: для того, чтобы $\bar{b} \in M_2[P]$, необходимо и достаточно, чтобы

$$(13)\qquad \forall_{\bar{c}=(c_i)\in P^n} (\bar{b} * \bar{c})_\Delta \subseteqq \bar{b}_\Delta \circ \bar{c}_\Delta.$$

Если $(\boldsymbol{\eta}_j, \overline{\zeta}^{(j)}) \in b_j$ при $j = 1, 2, \ldots, n$ и каких-либо $\boldsymbol{\eta}_j \in \boldsymbol{\Omega}$, $\overline{\zeta}^{(j)} \in \boldsymbol{\Omega}^n$, то выберем в качестве $c_i \in P$ следующие отношения из C: $c_i = (\{\zeta_i^{(j)}\}_{j=1}^n, \boldsymbol{\Omega})$ (см. п. 1.7).

Из (11) следует тогда, что $(\overline{\boldsymbol{\eta}}, \overline{\boldsymbol{\xi}}) \in (\bar{b} * \bar{c})_\Delta$ при любом $\overline{\boldsymbol{\xi}} \in \boldsymbol{\Omega}^n$ и, в силу (13), $(\overline{\boldsymbol{\eta}}, \overline{\boldsymbol{\xi}}) \in \bar{b}_\Delta \circ \bar{c}_\Delta$. Но $\bar{c}_\Delta$ состоит в силу п. 1.4 из всех пар $(\overline{\zeta}, \overline{\xi})$, где $\overline{\zeta} \in [\overline{\zeta}^{(j)}]_{j=1}^n$,

$\bar{\xi} \in \mathbf{\Omega}^n$. Вследствие (4) существует $\bar{\zeta} \in [\bar{\zeta}^{(j)}]_{j=1}^n$ такой, что $(\bar{\boldsymbol{\eta}}, \bar{\zeta}) \in \bar{b}_\Delta$, т. е. $(\boldsymbol{\eta}_j, \bar{\zeta}) \in b_j$ при $j = 1, 2, \ldots, n$ (см. п. 1. 4).

Достаточность условий теоремы вытекает непосредственно из (7).

1. 8. 1. Из теоремы п. 1. 8 следует, что $M_2[P]$ содержит, например, всякий элемент $\bar{c} = (c_i) \in C^n$, для которого существует такой индекс j, что $\mathbf{c}^{-1}\langle \mathbf{\Omega} \rangle = pr_v c_j$ и $c_i \langle \mathbf{\Omega}^n \rangle \subseteq c_j \langle \mathbf{\Omega}^n \rangle$ при $i = 1, 2, \ldots, n$. $M_2[P]$ содержит также все множество $P^n \setminus (P \setminus \{O\})^n$. Однако в общем случае строение элементов из $M_2[P_n(\mathbf{\Omega})]$ более сложно.

1. 8. 2. Теорема. $M_3[P_n(\mathbf{\Omega})] = \{O\}$

Доказательство. Для любого $\bar{x} \in P^n$ в силу п. 1. 5, $O * \bar{x} = O$. Поэтому $(O * \bar{x}) * \bar{y} = O * (\bar{x} * \bar{y}) = O$ для любых $\bar{x}, \bar{y} \in P^n$.

Если a — любой ненулевой элемент из P и $(\gamma, \bar{\boldsymbol{\eta}}) \in a$, то для элементов $\bar{b}, \bar{c}$ п. 1. 5. 2 имеем $(a * \bar{b}) * \bar{c} = O$ и в то же время $(\gamma, \bar{\xi}) \in a * (\bar{b} * \bar{c})$.

1. 9. Обозначим через $F = F_n(\mathbf{\Omega})$ подмножество $P_n(\mathbf{\Omega})$, состоящее из всех его полных отношений, т. е. таких отношений $a \in P_n(\mathbf{\Omega})$, для которых $pr_v a = \mathbf{\Omega}^n$.

Теорема.

$$M_1[F_n(\mathbf{\Omega})] = \big(S_n(\mathbf{\Omega})\big)^n; \quad M_2[F_n(\mathbf{\Omega})] = F_n(\mathbf{\Omega}) \cap M_2[P_n(\mathbf{\Omega})];$$

$$M_3[F_n(\mathbf{\Omega})] = F_n(\mathbf{\Omega}) \cap C_n(\mathbf{\Omega}).$$

Доказательство первых двух утверждений — такое же, как и в п. п. 1. 6. 1, 1. 8. Следует лишь заметить, что $\tilde{A} = A^n$ для любого подмножества $A \subseteq F_n(\mathbf{\Omega})$ и что $M_1[F] = M_1[P] \cap F^n$.

Если $c \in F_n(\mathbf{\Omega})$ и $pr_s c = \Pi (\subseteq \mathbf{\Omega})$, то обозначим такой элемент c через c_Π. Из (11) следует

$$\underset{\Pi \subseteq \Omega,\ \bar{x} \in F^n}{\forall} c_\Pi * \bar{x} = c_\Pi$$

и, при любых $\bar{x}, \bar{y} \in F^n$ $(c_\Pi * \bar{x}) * \bar{y} = c_\Pi * (\bar{x} * \bar{y}) = c_\Pi$. Если же $c \notin F_n(\mathbf{\Omega}) \cap C^n$ то, как и в п. 1. 5. 1, подберем элементы $\bar{x}, \bar{y} \in F^n$ такие, что $(c * \bar{x}) * \bar{y} \neq c * (\bar{x} * \bar{y})$.

1. 10. Пусть r, t — фиксированные кардинальные числа. Обозначим через $P_{nrt}(\mathbf{\Omega})$ подмножество $P_n(\mathbf{\Omega})$, состоящее из всех отношений $a \in P_n(\mathbf{\Omega})$ таких, что $|pr_s a| < r$, $|pr_v a| < t$; если $\boldsymbol{\mu}$ — наименьшее кардинальное число $> |\mathbf{\Omega}^n|$, то обозначим $P_{nr\mu}(\mathbf{\Omega}) = P_{nr}(\mathbf{\Omega})$. Пусть далее $W_{nr}(\mathbf{\Omega}) = P_{nr}(\mathbf{\Omega}) \cap W_n(\mathbf{\Omega})$, $W_{nrt}(\mathbf{\Omega}) = P_{nrt}(\mathbf{\Omega}) \cap W_n(\mathbf{\Omega})$.

Все подмножества $P_{nrt}(\mathbf{\Omega})$ являются подоперативами оператива $P_n(\mathbf{\Omega})$, а подмножества $P_{nr}(\mathbf{\Omega})$ — его s-идеалами.

В самом деле, для любых $a \in P_{nr}(\mathbf{\Omega})$, $\bar{x} = (x_i) \in P^n$ имеем $pr_s(a * \bar{x}) \subseteq pr_s a$, $|pr_s(a * \bar{x})| \leqq |pr_s a|$ и $a * \bar{x} \in P_{nr}(\mathbf{\Omega})$. Если, кроме того, все $x_i \in P_{nrt}(\mathbf{\Omega})$, то $|pr_v x_i| < t$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $|\mathbf{x}^{-1}\langle \mathbf{\Omega}^n \rangle| = |\bigcap_{i=1}^n pr_v x_i| < t$ и, в силу (7), $|pr_v(a * \bar{x})| \leqq |\mathbf{x}^{-1}\langle \mathbf{\Omega}^n \rangle| < t$, $a * \bar{x} \in P_{nrt}(\mathbf{\Omega})$.

Пересечение подоператива $W_n(\mathbf{\Omega}) \subset P_n(\mathbf{\Omega})$ с s-идеалом или подоперативом является s-идеалом и соответственно подоперативом в $W_n(\mathbf{\Omega})$. Отсюда следует:

Все $W_{nrt}(\mathbf{\Omega})$ *являются подоперативами* $W_n(\mathbf{\Omega})$, *а* $W_{nr}(\mathbf{\Omega})$ — *s-идеалами.*

Очевидно, что $P_{n11}(\mathbf{\Omega}) = W_{n11}(\mathbf{\Omega}) = W_{n1}(\mathbf{\Omega}) = \{O\}$. Если $r > |\mathbf{\Omega}|$, $t > |\mathbf{\Omega}^n|$, то $P_{nrt}(\mathbf{\Omega}) = P_{nr}(\mathbf{\Omega}) = P_n(\mathbf{\Omega})$, $W_{nrt}(\mathbf{\Omega}) = W_{nr}(\mathbf{\Omega}) = W_n(\mathbf{\Omega})$. Заметим, что для любого оператива $W_{nrt}(\mathbf{\Omega})$ можно считать $r \leqq t$.

1. 11. Идеалами полугруппы $W_1(\mathbf{\Omega})$ являются, как известно [8], подмножества $W_{1r}(\mathbf{\Omega})$, и только они. При $n < 1$ справедлива следующая теорема:

Теорема. *При* $n > 1$ *подоперативы* $W_{nqt}(\mathbf{\Omega})$ *(в частности* $W_{nt}(\mathbf{\Omega})$*), где* $q = 2$ *или* q — *бесконечное* $< r$, *и только они, являются собственными sv-идеалами оператива* $W_{nrt}(\mathbf{\Omega})$ *(соответственно* $W_{nr}(\mathbf{\Omega})$*).*

Доказательство. Пусть ненулевой sv-идеал A оператива $D = W_{nrt}(\mathbf{\Omega})$ содержит элемент a такой, что $|pr_s a| = k$. Если $\xi \in \mathbf{\Omega}$, $c = (\xi, pr_v a)$, $\bar{a} = (a, c, c, \ldots, c)$, то, как и в [7], для любого элемента $b \in W_{nkt}(\mathbf{\Omega})$ нетрудно подобрать элементы $x \in D$, $\bar{y} \in D^n$ такие, что $(x \ast \bar{a}) \ast \bar{y} = b$. Следовательно, $W_{nkt}(\mathbf{\Omega}) \subseteqq A$.

Если при этом k — конечное число, отличное от 1, $l \leqq k^n$, $l < r$, то найдутся элементы $\bar{a} \in D^n$, $\bar{\xi}_j \in \mathbf{\Omega}^n$ $(j = 1, 2, \ldots, l)$, $w \in D$, такие что $|\mathbf{a}^{-1}\langle \mathbf{\Omega}^n \rangle| = t$, все элементы $\mathbf{a}\langle \bar{\xi}_j \rangle$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ различны между собой, и все элементы $w \circ \mathbf{a}\langle \bar{\xi}_j \rangle$ различны между собой. Тогда $w \circ \mathbf{a} \in W_{nlt}(\mathbf{\Omega}) \cap A$ и, следовательно $W_{nlt}(\mathbf{\Omega}) \subseteqq A$. Повторяя процесс достаточное число раз, получим, что $W_{nlt}(\mathbf{\Omega}) \subseteqq A$ при любом конечном $l \leqq |\mathbf{\Omega}|$.

1. 11. 1. При $n = 1$ понятия sv-идеала и sl-идеала совпадают. Из п. 1. 11 следует:

При $n > 1$ *оператив* $W_{nrt}(\mathbf{\Omega})$ *не содержит собственных sl-идеалов.*

В самом деле, пусть A — sl-идеал оператива $W_{nrt}(\mathbf{\Omega})$, отличный от $\{O\}$. Тогда A является и sv-идеалом; из п. 1. 11 следует., что $W_{n2t}(\mathbf{\Omega}) \subseteqq A$. Пусть k — любое кардинальное число $< r$, x — произвольный элемент из $W_{nrt}(\mathbf{\Omega})$, $\xi \in \mathbf{\Omega}$, $c = (\xi, pr_v x)$, $\bar{c} = (x, c, c, \ldots, c)$; w — такой элемент из $W_n(\mathbf{\Omega})$, что $pr_v w = pr_s x \times \{\xi\}^{n-1}$, и $w(\boldsymbol{\alpha}, \xi, \xi, \ldots, \xi) = \boldsymbol{\alpha}$ для любого $\boldsymbol{\alpha} \in pr_s x$. Тогда $|pr_v w| = |pr_s w| = pr_v x < r$; следовательно, $w \in W_{nrt}(\mathbf{\Omega})$. В то же время из $c \in A$ следует $x = w \ast \bar{c} \in A$. В силу произвола в выборе x, $A = W_{nrt}(\mathbf{\Omega})$.

1. 12. Обозначим $S_{nr}(\mathbf{\Omega}) = S_n(\mathbf{\Omega}) \cap W_{nr}(\mathbf{\Omega})$. Как и в п. п. 1. 10—1. 11. 1, справедливо следующее предложение:

Все подмножества $S_{nq}(\mathbf{\Omega})$ *являются s-идеалами оператива* $S_n(\mathbf{\Omega})$. *При* $n > 1$ *подоперативы* $S_{nq}(\mathbf{\Omega})$, *где* $q = 2$ *или* q — *бвсконечное* $< r$, *и только они, являются собственными sv-идеалами оператива* $S_{nr}(\mathbf{\Omega})$. $S_{nr}(\mathbf{\Omega})$ *не содержит собственных sl-идеалов.*

1. 13. Обозначим через $V_n(\mathbf{\Omega})$ подмножество $W_n(\mathbf{\Omega})$, состоящее из всех отношений a вида

$$a = \mathop{\mathbf{\Delta}}_{i=1}^{n} a_i$$

где $\mathbf{\Delta}$ — полупрямое произведение второго рода [4] взаимно однозначных бинарных отношений $a_i \in \mathfrak{P}(\mathbf{\Omega}^2)$. Иначе говоря, $a \in V_n(\mathbf{\Omega})$ тогда и только тогда, когда для любого $i=1, 2, \ldots, n$ оно индуцирует взаимно однозначное преобразование a_i множества $\mathbf{\Omega}$ (см. п. п. 1. 4, 1. 8):

$$\underset{\xi,\eta\in\Omega}{\forall}(\eta, \xi)\in a_i \leftrightarrow \underset{\bar\xi\in\Omega^n}{\exists}(\eta, \bar\xi)\in a \wedge \{\xi\} = \mathrm{pr}_i\{\bar\xi\}.$$

Очевидно, что $V_n(\mathbf{\Omega})$ является подоперативом $W_n(\mathbf{\Omega})$; пусть $V_{nr}(\mathbf{\Omega}) = W_{nr}(\mathbf{\Omega}) \cap V_n(\mathbf{\Omega})$. Структуры идеалов оперативов $V_{nr}(\mathbf{\Omega})$ при произвольном n более богаты, чем у $W_{nr}(\mathbf{\Omega})$ и $S_{nr}(\mathbf{\Omega})$ (см. п. п. 1. 10—1. 12).

Теорема. *При любых n, r $V_{nr}(\mathbf{\Omega})$ является sl-идеалом оператива $V_n(\mathbf{\Omega})$; $V_{n2}(\mathbf{\Omega})$ — v-идеалом оператива $W_n(\mathbf{\Omega})$. Всякий sv-идеал оператива $V_{nr}(\mathbf{\Omega})$ совпадает с одним из оперативов $V_{nq}(\mathbf{\Omega})$.*

Доказательство. Пусть $a\in V=V_n(\mathbf{\Omega})$, $\bar u = (u_i)\in V^n$. Если $u_i\in V_{nr}(\mathbf{\Omega})$ при каком-либо i, то $|pr_v u_i| = |pr_s u_i| \leqq r$, $|\mathbf{u}^{-1}\langle\mathbf{\Omega}\rangle|\leqq r$ и, в силу (7), $|pr_s(a * \bar u)| \leqq r$. Точно так же $|pr_s(a*\bar u)|\leqq r$, если $|pr_s a| = |pr_v a| \leqq r$.

Если $u_i\in V_{n2}(\mathbf{\Omega})$, то $|u\langle\mathbf{\Omega}^n\rangle| = |u^{-1}\langle\mathbf{\Omega}\rangle|\leqq 1$, и при любом $w\in W_n(\mathbf{\Omega})$ либо $w*\bar u = O$, либо $|pr_v(w*\bar u)| = 1$, т. е. $w*\bar u\in V_{n2}(\mathbf{\Omega})$.

Наконец, как и в п. 1. 11. 1, можно показать, что для всякого sv-идеала A оператива $V_{nr}(\mathbf{\Omega})$ и любых элементов $a, b\in V_{nr}(\mathbf{\Omega})$ из $a\in A$, $|pr_s a| = k$, $|pr_s b| = k$ следует $b\in A$.

§ 2. Плотные вложения в алгебрах функций

2. 1. Пусть $\mathfrak{K}$ — некоторый класс алгебраических систем, замкнутый относительно гомоморфизмов из некоторого класса $\mathbf{\Phi}$ (содержащего все изоморфизмы систем $A\in\mathfrak{K}$); ϱ — бинарное отношение в классе $\mathfrak{K}$. Вместо $(A, B)\in\varrho$ будем писать $B\in\varrho\langle A\rangle$. Гомоморфизм f системы B называется собственным, если он не является изоморфизмом; тождественным на подсистеме $A\subseteqq B$, если $fa=a$ для любого элемента $a\in A$. Предполагается, что отношение ϱ удовлетворяет для любых $A, B, C\in\mathfrak{K}$, и произвольного изоморфизма f условиям:

1. $B\in\varrho\langle A\rangle \to A\subseteqq B$,
2. $B\in\varrho\langle A\rangle\wedge A\subseteqq C\subseteqq B\to C\in\varrho\langle A\rangle$,
3. $B\in\varrho\langle A\rangle\to fB\in\varrho\langle fA\rangle$.

Пусть $B\in\varrho\langle A\rangle$. Система A называется $\check{\varrho}$-плотной в B [9], если 1) для всякой системы $C\in\varrho\langle A\rangle$ существует тождественный на A гомоморфизм $f\in\mathbf{\Phi}$, отображающий C в B, и 2) всякий эндоморфизм $f\in\mathbf{\Phi}$ системы B, тождественный на A, является тождественным на B. A называется ϱ^*-плотной в B, если 1) всякий собственный гомоморфизм $f\in\mathbf{\Phi}$ системы B, при котором $fB\in\varrho\langle fA\rangle$, индуцирует собственный гомоморфизм на A и 2) для любой системы $C\in\varrho\langle A\rangle$ $(C\neq B,\ C\supseteqq B)$ существует собственный гомоморфизм $f\in\mathbf{\Phi}$, тождественный на A и такой, что $fC\in\varrho\langle A\rangle$.

Всякая ϱ^*-плотная подсистема является $\check{\varrho}$-плотной. Значение этих понятий заключается, прежде всего, в следующей теореме.

Пусть A — $\check{\mathfrak{q}}$-плотная подсистема системы B, A' — $\mathfrak{q}^*$-плотная подсистема C, f — изоморфизм системы A' на систему A. Существует, и притом единственный изоморфизм $\boldsymbol{\varphi}$ системы C в B, являющийся продолжением изоморфизма f; $\boldsymbol{\varphi}C = B$.

С помощью этой теоремы найдены, например, абстрактные характеристики ряда классов полугрупп и других алгебраических систем (см. например, [9—13]). В настоящем § будет найден ряд плотных вложений в оперативах многоместных отношений. В качестве класса $\mathfrak{K}$ мы, как правило не оговаривая этого, будем рассматривать класс $\mathfrak{M}_n$ всех $(n+1)$-оперативов; в качестве $\boldsymbol{\Phi}$ — класс всех гомоморфизмов оперативов из $\mathfrak{M}_n$. В классе $\mathfrak{M}_n$ введем следующее отношение $\mathfrak{q}_L$: $(A, S) \in \mathfrak{q}_L$, если $A^n \subseteqq M_1[S]$ и

$$\forall_{s \in S,\, \bar{t} \in S^n,\, \bar{a} \in A^n} (s\bar{t})\bar{a} \in A \rightarrow \bar{t}\bar{a} \in A^n. \tag{14}$$

Далее будем писать $(A, S) \in \varrho_x$ $(x = s, v, sl, sv)$, если $A^n \subseteqq M_1[S]$ и A является x-идеалом оператива S. В этом случае $\check{\mathfrak{q}}_x$-плотный (ϱ_x^*-плотный) подоператив будем называть плотным $\check{x}$-идеалом (и соответственно x^*-идеалом). Все рассмотрения остаются в силе, если $\mathfrak{M}_n$ заменить его подклассом $\mathfrak{M}'_n$ всех менгеровских $(n+1)$-оперативов; разумеется условие $A^n \subseteqq M_1[S]$ при этом становится излишним.

2. 2. Часто в настоящем параграфе тот или иной подоператив $A \subseteqq P_n(\Omega)$ одновременно является подоперативом некоторого «абстрактного» оператива S. Операцию в S будем обозначать, как и в п. 1. 1—1. 2, через $a\bar{b}$; операцию в A — через $a\bar{b}$ и $a * \bar{b}$; $\circ$ означает умножение бинарных отношений (4).

Вместо $(\boldsymbol{\eta}, \bar{\boldsymbol{\xi}}) \in a$ или $(\bar{\boldsymbol{\zeta}}, \bar{\boldsymbol{\xi}}) \in \mathrm{a}$, где $a \in W = W_n(\Omega)$, $\bar{a} \in W^n$ (см. п. 1. 6), иногда будем писать $\boldsymbol{\eta} = a\bar{\boldsymbol{\xi}}$, $\bar{\boldsymbol{\zeta}} = \mathrm{a}\bar{\boldsymbol{\xi}}$.

Если $(n+1)$-оператив S содержит подоперативы $A \subseteqq W_n(\Omega)$, $B \subseteqq P_n(\Omega)$, то для каждого $s \in S$ обозначим:

$$\boldsymbol{\varphi}s = s^* = \bigcup_{\bar{a} \in A^n,\, s\bar{a} \in B} (s\bar{a}) \circ \mathbf{a}^{-1} \tag{15}$$

Лемма. *Пусть A, B — подоперативы оператива S, $B \subseteqq P_n(\boldsymbol{\Omega})$, $A \subseteqq W_n(\boldsymbol{\Omega}) \cap B$, $A^n \subseteqq M_1[S]$* (см. п. 1. 2). *Если A, B удовлетворяют условиям*

$$\forall_{\substack{j = 1, 2, \ldots, n;\ \zeta_j \in \Omega; \\ \bar{\xi} \in \Omega^n,\ \bar{a}_i \in A^n,\ t_i \in S}} (\bar{\boldsymbol{\xi}}, \bar{\boldsymbol{\eta}}_j) \in \mathbf{a}_j \wedge (\boldsymbol{\zeta}_j, \bar{\boldsymbol{\eta}}_j) \in t_j \bar{a}_j \wedge \tag{16}$$

$$\wedge t_j \bar{a}_j \in B \rightarrow \exists_{\bar{\eta} \in \Omega^n,\, \bar{a} \in A^n} (\boldsymbol{\zeta}_j, \bar{\boldsymbol{\eta}}) \in t_j \bar{a} \wedge t_j \bar{a} \in B \wedge (\bar{\boldsymbol{\xi}}, \bar{\boldsymbol{\eta}}) \in \mathbf{a},$$

$$\forall_{b \in B,\, \bar{a} \in B^n,\, s \in S} b^* = b \wedge (s\bar{a})^* = s^* * \bar{a} \tag{17}$$

и условию (14), *то отображение* $\boldsymbol{\varphi}$, *определенное формулой* (15), *является гомоморфизмом оператива S в $P_n(\Omega)$.*

Доказательство. Пусть $s \in S$, $\bar{t} \in S^n$. По определению (15),

$$(s\bar{t})^* = \bigcup_{\bar{a} \in A^n,\, (s\bar{t})\bar{a} \in B} (s\bar{t})\bar{a} \circ \mathbf{a}^{-1}.$$

Из $A^n \subseteqq M_1[S]$ следует $(s\bar{t})\bar{a}=s(\bar{t}\bar{a})$. В силу (14), при $(s\bar{t})\bar{a}\in B$ имеем $\bar{t}\bar{a}\in B^n$, $t_i\bar{a}\in B$ при $i=1, 2, \ldots, n$, и, обозначая $\bar{t}^*=(t_i^*)$, получим вследствие (17) и п. 1. 6. 1

$$(s\bar{t})\bar{a} = s(\bar{t}\bar{a}) = s^* * (\bar{t}^* * \bar{a}) = (s^* * \bar{t}^*) * \bar{a} = (s^* * \bar{t}^*)\circ \mathbf{a}$$

$$(s\bar{t})^* = \bigcup_{\bar{a}\in A^n,\ (s\bar{t})\bar{a}\in B} (s^* * \bar{t}^*)\circ\mathbf{a}\circ\mathbf{a}^{-1} \subseteqq s^* * \bar{t}^*$$

Докажем теперь противоположное включение. Из (7), (15) при любых $\bar{\boldsymbol{\xi}}\in\Omega^n$, $\boldsymbol{\eta}\in\Omega$ имеем

$$(\boldsymbol{\eta}, \bar{\boldsymbol{\xi}})\in s^* * \bar{t}^* \leftrightarrow \underset{\bar{\zeta}\in\Omega^n}{\exists}\{(\boldsymbol{\eta}, \bar{\boldsymbol{\zeta}})\in s^*\wedge \underset{i=1,2,\ldots,n}{\forall}(\zeta_i, \bar{\boldsymbol{\xi}})\in t_i^* = \bigcup_{\bar{a}_i\in A^n,\ t_i\bar{a}_i\in B} t_i\bar{a}_i\circ\mathbf{a}_i^{-1}\}\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \underset{\substack{\bar{\zeta},\bar{\eta}_i\in\Omega^n,\\ \bar{a}_i\in A^n}}{\exists}(\boldsymbol{\eta}, \bar{\boldsymbol{\zeta}})\in s^*\wedge t_i\bar{a}_i\in B\wedge(\zeta_i, \bar{\boldsymbol{\eta}}_i)\in t_i\bar{a}_i\wedge(\bar{\boldsymbol{\xi}}, \bar{\boldsymbol{\eta}}_i)\in\mathbf{a}_i.$$

Вместе с (16), (5), (7), (17), (8) это дает

$$(\boldsymbol{\eta}, \bar{\boldsymbol{\xi}})\in s^* * \bar{t}^* \to \underset{\substack{\bar{a}\in A^n,\\ \bar{\eta},\bar{\zeta}\in\Omega^n}}{\exists}(\boldsymbol{\eta}, \bar{\boldsymbol{\zeta}})\in s^*\wedge(\zeta_i, \bar{\boldsymbol{\eta}})\in t_i\bar{a}\wedge t_i\bar{a}\in B\wedge(\bar{\boldsymbol{\xi}}, \bar{\boldsymbol{\eta}})\in\mathbf{a}\to$$

$$\to \underset{\bar{a}\in A^n}{\exists}(\boldsymbol{\eta}, \bar{\boldsymbol{\xi}})\in(s^* * \bar{t}\bar{a})\circ\mathbf{a}^{-1} = (s\bar{t}\bar{a})^*\circ\mathbf{a}^{-1} = [(s\bar{t})^* * \bar{a}]\circ\mathbf{a}^{-1} =$$

$$= (s\bar{t})^*\circ\mathbf{a}\circ\mathbf{a}^{-1}\to(\boldsymbol{\eta}, \bar{\boldsymbol{\xi}})\in(s\,\bar{t})^*,$$

т. е.

$$s^* * \bar{t}^* \subseteqq (s\bar{t})^*.$$

2. 3. Лемма. *Пусть оператив S содержит подоперативы A, B, удовлетворяющие условиям:* $B\subseteqq W_n(\Omega)$, $A^n\subseteqq B^n\cap M_1[S]$ (см. п. 1. 2) *и при любых* $\bar{b}_1, \bar{b}_2\in B^n$, $\bar{\boldsymbol{\eta}}_1, \bar{\boldsymbol{\eta}}_2\in\boldsymbol{\Omega}^n$ (см. п. 1. 4)

$$(18)\qquad \mathbf{b}_1\bar{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{b}_2\bar{\boldsymbol{\eta}}_2\to \underset{\substack{\bar{a}_i\in A^n\\ \bar{\eta}\in \mathrm{pr}_v\bar{a}_1\cap\mathrm{pr}_v\bar{a}_2}}{\exists}\bar{b}_1 * \bar{a}_1 = \bar{b}_2 * \bar{a}_2\in A^n\wedge\bar{\boldsymbol{\eta}}_i = \mathrm{a}\bar{\boldsymbol{\eta}}.$$

Тогда для S, A и B выполняются условия (16),

$$(19)\qquad \underset{\bar{b}_1,\bar{b}_2\in B^n,\ \bar{\eta}_1,\bar{\eta}_2\in\Omega^n,\ s\in S}{\forall}\mathbf{b}_1\bar{\boldsymbol{\eta}}_1 = \mathbf{b}_2\bar{\boldsymbol{\eta}}_2\wedge s\bar{b}_1\in B\wedge s\bar{b}_2\in B\to s\bar{b}_1\langle\bar{\boldsymbol{\eta}}_1\rangle = s\bar{b}_2\langle\bar{\boldsymbol{\eta}}_2\rangle$$

и $\bar{\bar{s}}^*\in W_n(\boldsymbol{\Omega})$ *для любого* $s\in S$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{b}_1\boldsymbol{\eta}_1=\mathbf{b}_2\bar{\boldsymbol{\eta}}_2=\bar{\boldsymbol{\xi}}$; вследствие (18), существуют элементы $\bar{a}_1, \bar{a}_2\in A^n$, $\bar{\boldsymbol{\eta}}\in\boldsymbol{\Omega}$ такие, что

$$\bar{b}_1 * \bar{a}_1 = \bar{b}_2 * \bar{a}_2\wedge(\bar{\boldsymbol{\eta}}_i, \bar{\boldsymbol{\eta}})\in\mathbf{a}_i.$$

Тогда из (8) и (4) имеем для всякого элемента $\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{\Omega}$

$$(\boldsymbol{\alpha}, \bar{\boldsymbol{\eta}}_1)\in s\bar{b}_1\leftrightarrow(\boldsymbol{\alpha}, \bar{\boldsymbol{\eta}})\in(s\bar{b}_1)\circ\mathbf{a}_1 = (s\bar{b}_1) * \bar{a}_1 =$$

$$= s(\bar{b}_1 * \bar{a}_1) = s(\bar{b}_2 * a_2) = (s\bar{b}_2)\circ\mathbf{a}_2\leftrightarrow(\boldsymbol{\alpha}, \bar{\boldsymbol{\eta}}_2)\in s\bar{b}_2.$$

Пусть теперь

$$t_j\in S,\quad \bar{a}_j\in A^n,\quad t_j\bar{a}_j\in B,\quad \mathbf{a}_j\bar{\boldsymbol{\eta}}_j = \bar{\boldsymbol{\xi}},\quad (\zeta_j, \bar{\boldsymbol{\eta}}_j)\in t_j\bar{a}_j$$

при $j=1, 2, \ldots, n$. В силу (18), существуют элементы $\bar{c}_1^{(1)}, \bar{c}_2^{(1)} \in A^n$, $\bar{\boldsymbol{\eta}}_{n+1} \in \boldsymbol{\Omega}^n$, для которых $\bar{a}_1 * \bar{c}_1^{(1)} = \bar{a}_2 * \bar{c}_2^{(1)} = \bar{a}_{n+1}$, $\bar{\boldsymbol{\eta}}_1 = \bar{c}_1^{(1)}\bar{\boldsymbol{\eta}}_{n+1}$, $\bar{\boldsymbol{\eta}}_2 = \bar{c}_2^{(1)}\bar{\boldsymbol{\eta}}_{n+1}$. Точно так же существуют $\bar{a}_3, \bar{a}_{n+1} \in A^n$, $\bar{\boldsymbol{\eta}}_{n+2} \in \boldsymbol{\Omega}^n$ такие, что

$$\bar{a}_3 * \bar{c}_3 = \bar{a}_{n+1} * \bar{c}_{n+1}, \quad \bar{\boldsymbol{\eta}}_3 = \bar{c}_3 \bar{\boldsymbol{\eta}}_{n+2}, \quad \bar{\boldsymbol{\eta}}_{n+1} = \bar{c}_{n+1} \bar{\boldsymbol{\eta}}_{n+2}$$

или (обозначая $\bar{c}_1^{(1)} * \bar{c}_{n+1} = \bar{c}_1^{(2)}$, $\bar{c}_2^{(1)} * \bar{c}_{n+1} = \bar{c}_2^{(2)}$, $\bar{c}_3 = \bar{c}_3^{(2)}$)

$$\bar{a}_1 * \bar{c}_1 = \bar{a}_2 * \bar{c}_2^{(2)} = \bar{a}_3 * \bar{c}_3^{(2)}, \quad \bar{\boldsymbol{\eta}}_i = \bar{a}_i^{(2)} \bar{\boldsymbol{\eta}}_{n+2} \qquad (i=1, 2, 3);$$

при этом $\bar{c}_i^{(2)} \in A^n$, поскольку A^n является в силу п. п. 1. 2, 1. 6. 1 полугруппой. Продолжая таким же образом, найдем элементы $\bar{c}_j \in A^n$ $(j=1, 2, \ldots, n)$, $\bar{\boldsymbol{\eta}} \in \Omega$, удовлетворяющие условиям:

$$\bar{a}_1 * \bar{c}_1 = \bar{a}_2 * \bar{c}_2 = \ldots = \bar{a}_n * \bar{c}_n (=\bar{a}) \in A^n, \quad \bar{c}_i \bar{\boldsymbol{\eta}} = \bar{\boldsymbol{\eta}}_i.$$

Но тогда $\mathbf{a}\bar{\boldsymbol{\eta}} = \bar{a}_i(\bar{c}_i\bar{\boldsymbol{\eta}}) = \bar{a}_i\bar{\boldsymbol{\eta}}_i = \bar{\boldsymbol{\xi}}$ и, вследствие (8), 1. 6. 1, получим при $j=1, 2, \ldots, n$

$$(\zeta_j, \bar{\boldsymbol{\eta}}_j) \in t_j \bar{a}_j \wedge (\bar{\boldsymbol{\eta}}_j, \bar{\boldsymbol{\eta}}) \in \bar{c}_j \rightarrow (\zeta_j, \bar{\boldsymbol{\eta}}) \in (t_j \bar{a}_j) \circ c_j = (t_j \bar{a}_j) * \bar{c}_j = t_j(\bar{a}_j * \bar{c}_j) = t_j \bar{a}.$$

Из (19) следует, что для любых $s \in S, \bar{\boldsymbol{\xi}} \in \boldsymbol{\Omega}^n$ множество $s^*\langle\bar{\boldsymbol{\xi}}\rangle$ содержит не более одного элемента, и $s^* \in W_n(\boldsymbol{\Omega})$ для любого $s \in S$.

2. 4. Подоператив A оператива $W = W_n(\boldsymbol{\Omega})$, по аналогии с [9], назовем *слабо транзитивным, если*

$$\bigcup_{a \in A} \mathrm{pr}_v\, a = \boldsymbol{\Omega}^n \quad \bigcup_{a \in A} \mathrm{pr}_s\, a = \boldsymbol{\Omega}.$$

Лемма. *Если при условиях леммы п.* 2. 3 *оператив A слабо транзитивен, то для B выполняется условие* (17).

Доказательство. Для всякого $\bar{a} \in A^n$ бинарное отношение $\mathbf{a} \circ \mathbf{a}^{-1}$ является тождественным преобразованием множества $\boldsymbol{\Omega}^n$. Из слабой транзитивности оператива A следует, что $\mathbf{e} = \bigcup_{\bar{a} \in A^n} \mathbf{a} \circ \mathbf{a}^{-1}$ является тождественным преобразованием множества $\boldsymbol{\Omega}^n$. Если $b \in B$, то $b * \bar{a} \in B$ при любом $\bar{a} \in A^n$; следовательно, $b^* = b \circ \mathbf{e} = b$.

Пусть теперь s — любой элемент из S, $\bar{b}$ — произвольный элемент из B^n. Из (15) и (8) следует:

$$s^* * \bar{b} = \bigcup_{\bar{a} \in A^n,\, s\bar{a} \in B} s\bar{a} \circ \mathbf{a}^{-1} \circ \mathbf{b}. \tag{20}$$

В силу (4), при $\bar{a} \in A^n$, $s\bar{a} \in B$ и любых $\bar{\boldsymbol{\xi}} \in \boldsymbol{\Omega}^n, \boldsymbol{\eta} \in \boldsymbol{\Omega}$ имеем

$$(\boldsymbol{\eta}, \bar{\boldsymbol{\xi}}) \in s\bar{a} \circ \mathbf{a}^{-1} \circ \mathbf{b} \leftrightarrow \underset{\bar{\zeta}, \bar{\varepsilon} \in \Omega^n}{\exists} (\boldsymbol{\eta}, \bar{\boldsymbol{\zeta}}) \in s\bar{a} \wedge (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \bar{\boldsymbol{\zeta}}) \in \mathbf{a} \wedge (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \bar{\boldsymbol{\xi}}) \in \mathbf{b}. \tag{21}$$

Пусть $s\bar{b} \in B$. Если $(\boldsymbol{\eta}, \bar{\boldsymbol{\xi}}) \in s^* * \bar{b}$, то из (21) и леммы п. 2. 3 следует $(\boldsymbol{\eta}, \bar{\boldsymbol{\xi}}) \in s\bar{b}$, т. е. $s^* * \bar{b} \subseteq s\bar{b}$. Обратно, если $(\boldsymbol{\eta}, \bar{\boldsymbol{\xi}}) \in s\bar{b}$ и $\bar{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{b}\bar{\boldsymbol{\zeta}}$, то по условию (18) существуют элементы $\bar{a} \in A^n$, $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \in \boldsymbol{\Omega}^n$ такие, что $\bar{b} * \bar{a} = \bar{c} \in A^n$ и $\bar{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{a}\boldsymbol{\varepsilon}$. Тогда из (8), (15) имеем

$$(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\varepsilon}) \in (s\bar{b}) \circ \mathbf{a} = s\bar{b} * \bar{a} = s(\bar{b} * \bar{a}) = s\bar{c}, \quad s\bar{c}(= s\bar{b} * \bar{a}) \in B,$$

$$(\boldsymbol{\eta}, \bar{\boldsymbol{\zeta}}) \in s\bar{c} \cdot \mathbf{c}^{-1} \subseteq s^*, \quad (\boldsymbol{\eta}, \bar{\boldsymbol{\xi}}) \in s^* \circ \mathbf{b} = s^* * \bar{b}$$

и, следовательно,

$$\underset{\bar{b} \in B^n}{\forall} s\bar{b} \in B \rightarrow s^* \circ \mathbf{b} = s\bar{b}.$$

$\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\eta}$ — те же, что и в (21). В силу (18) существуют элементы $\bar{c}, \bar{z} \in A^n$, $\bar{\boldsymbol{\alpha}} \in \boldsymbol{\Omega}^n$ такие, что $\bar{\boldsymbol{\zeta}} = \mathbf{z}\bar{\boldsymbol{\alpha}}$, $\bar{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{c}\bar{\boldsymbol{\alpha}}$, $\bar{b} * \bar{c} = \bar{a} * \bar{z}$ и, вследствие $s\bar{a} \in B$, $A^n \subseteq M_1[S]$

$$(s\bar{b})\bar{c} = s(\bar{b} * \bar{c}) = s(\bar{a} * \bar{z}) = (s\bar{a}) * \bar{z} \in B.$$

Отсюда и из (21) имеем

$$(\boldsymbol{\eta}, \bar{\boldsymbol{\xi}}) \in s\bar{a} \circ \mathbf{a}^{-1} \circ \mathbf{b} \rightarrow (\boldsymbol{\eta}, \bar{\boldsymbol{\alpha}}) \in (s\bar{a})\bar{z} = (s\bar{b})\bar{c} \wedge (\bar{\boldsymbol{\xi}}, \bar{\boldsymbol{\alpha}}) \in \mathbf{c} \rightarrow (\boldsymbol{\eta}, \bar{\boldsymbol{\xi}}) \in (s\bar{b})\bar{c} \circ \mathbf{c}^{-1},$$

и вместе с (20), (15)

$$s^* * \bar{b} \subseteq \bigcup_{\substack{\bar{c} \in A^n \\ (s\bar{b})\bar{c} \in B}} (s\bar{b})\bar{c} \circ \mathbf{c}^{-1} = (s\bar{b})^*$$

С другой стороны, из (15), (22), (5), (8) вытекает

$$(s\bar{b})^* = \bigcup_{\substack{\bar{c} \in A^n \\ s\bar{b}\bar{c} \in B}} s\bar{b}\bar{c} \circ \mathbf{c}^{-1} = s * \bigcup_{\substack{\bar{c} \in A^n \\ s\bar{b}\bar{c} \in B}} (\bar{b} * \bar{c}) \circ \mathbf{c}^{-1} =$$

$$= s^* \circ \mathbf{b} \circ \bigcup_{\substack{\bar{c} \in A^n \\ s\bar{b}\bar{c} \in B}} \mathbf{c} \circ \mathbf{c}^{-1} \subseteq s^* \circ b \circ \mathbf{e} = s^* \circ \mathbf{b} = s^* * \bar{b}$$

и, следовательно, $(s\bar{b})^* \subseteq s^* * \bar{b}$.

2. 5. Лемма. *Если* $B = A_1$ *или* $B = A_1 \setminus A_2$, *где* A_i — *l-идеалы оператива* $S \in \mathfrak{M}_n$, *то* $B \in \varrho_L\langle A \rangle$ (см. п. 2. 1).

Доказательство. Если A — l-идеал оператива S, то $\bar{t}\bar{a} \in A^n$ при любых $\bar{t} \in S^n$, $\bar{a} \in A^n$. Пусть $A = A_1 \setminus A_2$, где A_i — l-идеалы оператива S, $(s\bar{t})\bar{a} \in A$, $\bar{t}\bar{a} \notin A^n$ при некоторых $s \in S$, $\bar{t} = (t_i) \in S^n$, $\bar{a} \in A^n$. Тогда $t_k\bar{a} \notin A$ хотя бы при одном k и, следовательно, $t_k\bar{a} \in A_1 \setminus A \subseteq A_2$ (поскольку A_1 — l-идеал). Но A_2 — также l-идеал; поэтому $s(\bar{t}\bar{a}) \in A_2$, что противоречит условию $(s\bar{t})\bar{a} = s(\bar{t}\bar{a}) \in A$.

2. 5. 1. При $n = 1$ справедливо обращение леммы п. 2. 5. В самом деле, в этом случае l-идеал и v-идеал являются левыми идеалами, а условие (14) выглядит следующим образом (см. [9]):

$$\underset{s, t \in S,\, a \in A}{\forall} sta \in A \rightarrow ta \in A \tag{23}$$

Обозначим $A_1 = A \cup SA$, $A_2 = A_1 \setminus A$. По построению, A_1 — левый идеал полугруппы S. Допустим, что $A_2 \neq \emptyset$; пусть $x \in A_2$. Тогда $x = sa$ при некотором $s \in S$. Если $tsa \notin A_2$ при некотором $t \in S$, то $tsa \in A$. Из (23) тогда следовало бы, что $sa \in A$, т. е. $sa \notin A_2$. Следовательно, $tsa \in A_2$ и A_2 — левый идеал.

2.6. **Теорема.** *При $r=2$ или r бесконечном $S_{nr}(\mathbf{\Omega})$ является плотным $\check{v}$-идеалом оператива $S=S_n(\mathbf{\Omega})$.*

Доказательство. Для каждого $\xi\in\mathbf{\Omega}$ обозначим $c_\xi=c_{\{\xi\}}$ (см. п. 1.9); если $\bar{\xi}=(\xi_i)$, то обозначим $\bar{c}_{\bar{\xi}}=(c_{\xi i})$.

Оперативы $A=S_{n2}(\mathbf{\Omega})$ и $B=S_{nr}(\mathbf{\Omega})$ удовлетворяют условиям лемм п. 2.2—2.4. Из п.п. 2.2—2.5 следует, что для всякого оператива $S\in\mathfrak{M}_n$, содержащего B в качестве v-идеала, отображение

$$s^* = \bigcup_{\bar{c}_{\bar{\xi}}\in A^n} s\bar{c}_{\bar{\xi}}\circ(\bar{c}_{\bar{\xi}})_A^{-1}$$

является гомоморфизмом S в $W_n(\mathbf{\Omega})$, тождественным на B. Из (15) имеем

$$(\boldsymbol{\eta},\bar{\boldsymbol{\xi}})\in s^*\leftrightarrow \underset{\bar{\alpha},\bar{\zeta}\in\Omega^n}{\exists} s\bar{c}_{\bar{\alpha}}\in A\wedge(\boldsymbol{\eta},\bar{\boldsymbol{\zeta}})\in s\bar{c}_{\bar{\alpha}}\wedge(\bar{\boldsymbol{\zeta}},\bar{\boldsymbol{\xi}})\in(\bar{c}_{\bar{\alpha}})_A^{-1}$$

и из (II)

$$(\boldsymbol{\eta},\bar{\boldsymbol{\xi}})\in s^*\leftrightarrow s\bar{c}_{\bar{\xi}}=c_\eta(=c_{s^*\bar{\xi}}). \tag{24}$$

Следовательно $s^*\in S(\mathbf{\Omega})$ для любого $s\in S$, т. е. $\boldsymbol{\varphi}S\subseteqq S(\mathbf{\Omega})$.

С другой стороны, при условиях теоремы (см. п. 1.11) B является v-идеалом оператива $S_n(\mathbf{\Omega})$. Пусть f — собственный гомоморфизм оператива $S_n(\mathbf{\Omega})$; существуют элементы $x,y\in S_n(\mathbf{\Omega})$ такие, что такие, что $x\neq y$, $\boldsymbol{\varphi}x=\boldsymbol{\varphi}y$. Найдется хотя бы один элемент $\bar{\boldsymbol{\xi}}\in\mathbf{\Omega}^n$, для которого $x\bar{\boldsymbol{\xi}}\neq y\bar{\boldsymbol{\xi}}$. Но тогда $x*\bar{c}_{\bar{\xi}}=c_{x\bar{\xi}}\neq c= = y*\bar{c}_{\bar{\xi}}$; в то же время $c_{x\bar{\xi}}, c_{y\bar{\xi}}\in B$ и из $\boldsymbol{\varphi}x=\boldsymbol{\varphi}y$ следует $\boldsymbol{\varphi}c_{x\bar{\xi}}=\boldsymbol{\varphi}c_{y\bar{\xi}}$.

2.6.1. Как и в п. 2.6, можно доказать следующую теорему:

Теорема. *При $r=2$ или r бесконечном $S_{nr}(\mathbf{\Omega})$ является плотным $s\check{v}$-идеалом оператива $S_n(\mathbf{\Omega})$.*

2.6.2. Из п. 2.1 и теорем п.п. 2.6, 2.6.1 вытекает теорема:

Теорема. *Для того, чтобы оператив $S\in\mathfrak{M}_n$ был изоморфен оперативу $S_n(\mathbf{\Omega})$, необходимо и достаточно, чтобы S содержал плотный v^*-идеал (или плотный sv^*-идеал), изоморфный $S_{nr}(\mathbf{\Omega})$.*

2.6.3. Теорема п. 2.6.2 дает при $r=2$ абстрактную хатракеристику оператива $S_n(\mathbf{\Omega})$: ведь $A=S_{n2}(\mathbf{\Omega})$ является, очевидно, оперативом мощности $|\mathbf{\Omega}|$ с действием

$$\underset{x\in A,\ \bar{y}\in A^n}{\forall} x\bar{y}=x$$

2.6.4. Плотные $\check{v}$-идеалы и $s\check{v}$-идеалы (плотно вложенные левые и двусторонние идеалы) полугрупп $S_1(\mathbf{\Omega})$ и $W_1(\mathbf{\Omega})$ найдены в статьях [10—13]. Теоремы п.п. 2.6.2, 2.6.3, 2.7.1 переносят на оперативы многоместных функций характеристики полугрупп преобразований с помощью их плотно вложенных идеалов, приведенные в этих статьях.

Плотные идеалы в оперативах многоместных функций указаны в заметках [6], [14].

2.7. Теорема. *Оперативы $W_{n2}(\mathbf{\Omega})$ и $W_{nr}(\mathbf{\Omega})$ при бесконечном r являются плотными $\check{v}$-идеалами и $s\check{v}$-идеалами оператива $W_n(\mathbf{\Omega})$.*

Теорема эта доказывается так же, как и в п. 2. 6, 2. 6. 1; при этом удобнее всего положить $A = S_{n2}(\mathbf{\Omega})$.

Конец доказательства — как и в п. п. 2. 6, 2. 8).

2. 7. 1. Как и в п. 2. 6. 3, справедлива следующая теорема:

Теорема. *Для того, чтобы оператив $S \in \mathfrak{M}_n$ был изоморфен $W_n(\mathbf{\Omega})$, необходимо и достаточно, чтобы он содержал плотный sv^*-идеал, изоморфный одному из оперативов $W_{nr}(\mathbf{\Omega})$ при $r = 2$ или r бесконечном.*

Эту теорему при $r = 2$ можно также считать абстрактной характеристикой оператива $W_n(\mathbf{\Omega})$, поскольку из (12) вытекает характеристика оператива $W_{n2}(\mathbf{\Omega})$, аналогичная формуле (25) (но несколько более сложная).

2. 8. Пусть $\boldsymbol{\sigma}_L$ — следующее отношение в классе $\mathfrak{M}_n : (B, S) \in \boldsymbol{\sigma}_L$ тогда и только тогда, когда $B^n \subseteqq M_1[S]$, $B = A_1 \diagdown A_2$, где A_1 — v-идеал оператива S, а $A_2 = \emptyset$ или A_2 является l-идеалом оператива S.

Следующие две теоремы являются аналогами теоремы 4. 5 статьи [9].

Теорема. *$S_{nr}(\mathbf{\Omega})$ является при $r = 2$, конечном $r = |\mathbf{\Omega}| + 1$ или r бесконечном $\check{\mathfrak{g}}_L$-плотным подоперативом оператива $W_n(\mathbf{\Omega})$.*

Доказательство. Пусть $A_1 = W_{nr}(\mathbf{\Omega})$, $B = S_{nr}(\mathbf{\Omega})$. A_1 является v-идеалом оператива $W_n(\mathbf{\Omega})$ в силу п. 1. 11. Множество $A_2 = W_n(\mathbf{\Omega}) \diagdown S_n(\mathbf{\Omega})$ является l-идеалом оператива $W = W_n(\mathbf{\Omega})$: если $\bar{a} = (a_i) \in W^n$ и $pr_v a_i \neq \mathbf{\Omega}$ при каком-либо i, то $pr_v(w\bar{a}) \neq \mathbf{\Omega}$ при любом $w \in W$ в силу (7) и $w\bar{a} \in A_2$. Следовательно, $W_n(\mathbf{\Omega}) \in \boldsymbol{\sigma}_L \langle B \rangle$.

Если $S \in \boldsymbol{\sigma}_L \langle B \rangle$ для какого-либо оператива S, то из леммы п. 2. 5 вытекает $S \in \mathfrak{g}_L \langle B \rangle$. Если $A = S_{n2}(\mathbf{\Omega})$, то из лемм п. п. 2. 2—2. 5 следует, что отображение (15) является гомоморфизмом оператива S в $W_n(\mathbf{\Omega})$, тождественным на B.

Пусть теперь $\boldsymbol{\varphi}$ — собственный эндоморфизм оператива W, $x, y \in W$, $x \neq y$, $\boldsymbol{\varphi} x = \boldsymbol{\varphi} y$. Если $pr_v x = pr_v y$, то существует элемент $\bar{\boldsymbol{\xi}} \in pr_v x$ такой, что $(\boldsymbol{\eta}, \bar{\boldsymbol{\xi}}) \in x$, $(\boldsymbol{\zeta}, \bar{\boldsymbol{\xi}}) \in y$, $\boldsymbol{\eta} \neq \boldsymbol{\zeta}$. Тогда $x * \bar{c}_{\bar{\xi}} = c_\eta$, $y * \bar{c}_{\bar{\xi}} = c_\zeta$, $\boldsymbol{\varphi} c_\eta = \boldsymbol{\varphi} c_\zeta$, $c_\zeta \neq c_\eta$.

Если же $pr_v x \neq pr_v y$, то существует элемент $\bar{\boldsymbol{\xi}} \in pr_v x \diagdown pr_v y$ (или наоборот $\bar{\boldsymbol{\xi}} \in pr_v y \diagdown pr_v x$); пусть $x\bar{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{\eta}$. Тогда $x * \bar{c}_{\bar{\xi}} = c_\eta$, $y * \bar{c}_{\bar{\xi}} = O\ (\in W)$, $\boldsymbol{\varphi} c_\eta = \boldsymbol{\varphi} O$. Если, $\bar{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{\eta}^n$, то для всякого $\boldsymbol{\zeta} \in \mathbf{\Omega}$

$$\boldsymbol{\varphi} c_\zeta = \boldsymbol{\varphi}(c_\zeta * \bar{c}_{\bar{\eta}}) = \boldsymbol{\varphi} c_\zeta * (\boldsymbol{\varphi} O)^n = \boldsymbol{\varphi} O,$$

и $\boldsymbol{\varphi}$ индуцирует собственный эндоморфизм на оперативе $S_{n2}(\mathbf{\Omega}) \subseteqq S_{nr}(\mathbf{\Omega})$. Теорема доказана.

2. 8. 1. При условиях теоремы п. 2. 8 $W_{nr}(\mathbf{\Omega})$ является sv-идеалом оператива $W_n(\mathbf{\Omega})$ (см. п. 1. 11). Поэтому отношение $\boldsymbol{\sigma}_L$ в теореме п. 2. 8 можно заменить следующим отношением $\boldsymbol{\sigma}$: $(B, S) \in \boldsymbol{\sigma}$ тогда и только тогда, когда $B = A_1 \diagdown A_2$, где A_1 — sv-идеал оператива S, A_2 — его l-идеал.

2. 8. 2. Из доказательства теоремы п. 2. 8 вытекает следующая теорема (при $n = 1$ в силу п. 2. 5. 1 она совпадает с тероемой п. 2. 8):

Теорема. *$S_{n2}(\mathbf{\Omega})$, $S_n(\mathbf{\Omega})$ и $S_{n2}(\mathbf{\Omega})$ при бесконечном r являются $\check{\mathfrak{g}}_L$-плотными подоперативами оператива $W_n(\mathbf{\Omega})$* (см. п. 2. 2).

2. 8. 3. Из п. п. 2. 8, 2. 8. 2, 2. 1 вытекает:

Теорема. *Для того, чтобы оператив* $S \in \mathfrak{M}_n$ *был изоморфен оперативу* $W_n(\Omega)$, *необходимо и достаточно, чтобы он содержал* ϱ_L^**-плотный* (σ_L^*-плотный) *подоператив, изоморфный одному из оперативов* $S_{n2}(\Omega)$, $S_n(\Omega)$.

2. 8. 4. В частности, как и в п. 2. 6. 3:

Теорема. *Для того, чтобы оператив* $S \in \mathfrak{M}_n$ *был изоморфен оперативу* $W_n(\Omega)$, *необходимо и достаточно чтобы он содержал* ϱ_L^**-плотный* (σ_L^**-плотный*) *подоператив* A *мощности* $|\Omega|$ *с действием* (25).

2. 9. Перейдем теперь к изучению плотных идеалов оператива $V_n(\Omega)$ (см. п. 1. 13). В отличие от $W_n(\Omega)$ и $S_n(\Omega)$, результаты для $n=1$ и $n>1$ здесь одинаковы.

Теорема. $V_{nr}(\Omega)$ *при* $r>2$ *является плотным* $\check{l}$*-идеалом, плотным* $\check{s}$*-идеалом, плотным* $\check{v}$*-идеалом и плотным* $\check{s}v$*-идеалом оператива* $V=V_n(\Omega)$.

Доказательство. Пусть $A=V_{n2}(\Omega)$, $B=V_{nr}(\Omega)$. В силу п. 1. 13, B является sl-идеалом (а следовательно и sv-идеалом) оператива V. Из лемм п. п. 2. 2—2. 5 следует, что для всякого оператива $S \in \mathfrak{M}_n$, содержащего B в качестве l-идеала (в частности, sl-идеала, v-идеала, sv-идеала), отображение (15) является гомоморфизмом в $W_n(\Omega)$, тождественным на B.

Допустим, что $s^* \in W_n(\Omega) \setminus V$ для какого-либо $s \in S$. Тогда существует по крайней мере одна пара элементов $\bar{\xi}=(\xi_i)$, $\bar{\xi}'=(\xi_i') \in pr_v s^*$ таких, что $\bar{\xi} \neq \bar{\xi}'$ $s^*\bar{\xi}=\eta$, $s^*\bar{\xi}'=\eta'$ $(\eta, \eta \in \Omega)$ и

$$\eta=\eta' \vee \{\eta \neq \eta' \wedge \underset{i}{\exists} \xi_i=\xi_i'\} \tag{26}$$

По условию $U=V_{n3}(\Omega) \subseteq B$. Обозначим через $\bar{u}$ такой элемент из U^n, для которого $\mathbf{u}\bar{\xi}=\bar{\xi}$, $\mathbf{u}\bar{\xi}'=\bar{\xi}'$. Тогда по условию $s\bar{u} \in B$ и, в силу (8), (17), $s^* \circ \bar{u}=s^* * \bar{u}=(s\bar{u})^*=s\bar{u} \in B$. Из (4) следует $(s^* \circ \mathbf{u})\bar{\xi}=\eta$, $(s^* \circ \mathbf{u})\bar{\xi}'=\eta'$; вместе с $\bar{\xi} \neq \bar{\xi}'$ и (26) это противоречит условию $s^* \circ \mathbf{u} \in V$ (см. п. 1. 12). Следовательно, $s^* \in V$ для любого $s \in S$ и $\varphi S \subseteq V$.

Пусть f — собственный эндоморфизм оператива V; $x, y \in V$, $x \neq y$, $fx=fy$. Если $pr_v x \neq pr_v y$, то существует элемент $\bar{\xi} \in pr_v x$ такой, что $x\langle\bar{\xi}\rangle \neq y\langle\bar{\xi}\rangle$. Обозначим через $\bar{u}$ элемент из A^n, для которого $\mathbf{u}\bar{\xi}=\bar{\xi}$. Тогда $x * \bar{u} \in B$, $y * \bar{u} \in \boldsymbol{B}$. Но в силу (8), (4), $x * \bar{u} \neq y * \bar{u}$; в то же время $f(x * \bar{u})=f(y * \bar{u})$, вследствие $fx=fy$.

Если же $pr_v x \neq pr_v y$ и $\bar{\xi} \in pr_v x \setminus pr_v y$ (или аналогично $\bar{\xi} \in pr_v y \setminus pr_v x$), то $x * \bar{u} \in B \setminus \{O\}$, $y * \bar{u}=O$ и опять таки $f(x * \bar{u})=f(y * \bar{u})$. Таким образом, f индуцирует собственный эндоморфизм на B, и B является плотным $\check{l}$-идеалом (и $\check{s}l$-идеалом оператива V).

2. 9. 1. Теорема. $V_{n2}(\Omega)$ *является плотным* $\check{l}$*-идеалом и плотным* $\check{v}$*-идеалом оператива* $W_n(\Omega)$.

Доказательство. Пусть $A=B=V_{n2}(\Omega)$. Для всякого оператива S, содержащего A в качестве l-идеала (соответственно v-идеала) отображение (15), как и в п. 2. 9, является гомоморфизмом в $W_n(\Omega)$, тождественным на A. $W_n(\Omega)$ содержит A в качестве l-идеала (и тем более — в качестве v-идеала). Как и в п. 2. 9), всякий нетождественный эндоморфизм оператива $W_n(\Omega)$ индуцирует нетождественный эндоморфизм оператива A.

2. 9. 2. Аналогично доказывается следующая теорема:

Теорема. $V_{n2}(\Omega)$ *является* $\breve{\sigma}_L$*-плотным и* $\breve{\varrho}_L$*-плотным подоперативом оператива* $W_n(\Omega)$ (см. п. п. 2. 1, 2. 8).

2. 9. 3. При $n=1$ l-идеал и v-идеал являются левыми идеалами. Теорема п. 2. 9. 1 в этом случае дает результат п. 4. 2. 2 статьи (9).

Теорема п. 2. 9. 2 при $n=1$ дает для $V_{n2}(\Omega)$ утверждение п. 4. 5. 2 статьи [9], приведенное там без доказательства. Для полугрупп $V_{1r}(\Omega)$ (и точно так же — для $W_r^1(\Omega)$) при $r>2$ это утверждение неверно.

Лемма п. 2. 4. при $n=1$ для $\breve{\varrho}_L$-плотных подполугрупп является аналогом леммы п. 4. 2 статьи (9) для плотных левых идеалов.

2. 10. В двух следующих п. п. даны плотные вложения, дающие характеристики $P_n(\Omega)$ и $F_n(\Omega)$ (п. п. 1. 4, 1. 9) как алгебр с двумя операциями.

Множество S называется $\mathfrak{P}$-оперативом [4], если задано отображение ψ множества $\mathfrak{P}(S)$ в S ($\mathfrak{P}$-операция). Элемент $a\in S$ называется $\mathfrak{P}$-неразложимым, если для любого $A\subseteq S$ из $\psi A=a$ следует $A=\{a\}$. $\mathfrak{P}$-операция на множестве S индуцирует $\mathfrak{P}$-операцию на декартовой степени S^n:

$$\underset{A_i\subseteq S}{\forall}\psi\left(\mathop{\times}_{i=1}^{n}A_i\right)=(\psi A_1,\psi A_2,\ldots,\psi A_n).$$

Множество S назовем ψ_n-оперативом, если оно является $(n+1)$-оперативом относительно некоторой операции (1) и $\mathfrak{P}$-оперативом относительно некоторой $\mathfrak{P}$-операции ψ. Если оператив S содержит нуль O, то предполагается, что для любого $A\subseteq S$

$$\psi(A\cup\{O\})=\psi A$$

Если B — подоператив ψ_n-оператива S, обладающего нулем, то для любых $s\in S$, $\bar{b}\in B^n$ обозначим

$$s\bar{b}\|_B=\begin{cases}O, & \text{если}\quad s\bar{b}\notin B,\\ s\bar{b}, & \text{если}\quad s\bar{b}\in B.\end{cases}$$

Если X — подмножество S^n, $s\in S$, то через sX и $sX\|_B$ обозначим соответственно множества всех элементов $s\bar{x}$ и $s\bar{x}\|_B$, где $\bar{x}\in X$.

Пусть $\mathfrak{H}_n$ — класс всех ψ_n-оперативов, Φ — класс всех их гомоморфизмов φ относительно операции (1), являющихся одновременно гомоморфизмами относительно $\mathfrak{P}$-операции $\psi:\psi(\varphi A)=\varphi(\psi A)$ для любого $A\subseteq S$.

Введем в классе $\mathfrak{H}_n$ отношение $\varrho_U: S\in\varrho_U\langle B\rangle$ тогда и только тогда, когда $B\subseteq S$ и

1. $S\in\varrho_L\langle B\rangle$ (см. п. 2. 1)

2. если A — множество всех ψ-неразложимых элементов из B, то $A^n \subseteqq M_1[S]$ (см. п. 1. 2).

(27) 3. $$\forall_{s \in S,\, X = \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} X_i \subseteqq B^n} \quad s\psi X\|_B = \psi(sX\|_B)$$

Множество $P_n(\boldsymbol{\Omega})$ и его подмножества будем теперь рассматривать как U_n-оперативы, где U — операция теоретико-множественного объединения. В частности, если $B_n(\boldsymbol{\Omega}) = C_n(\boldsymbol{\Omega}) \cap F_n(\boldsymbol{\Omega})$ (см. п. п. 1. 7, 1. 9), то для любого $c_\Pi = (\boldsymbol{\Pi}, \boldsymbol{\Omega}) \in B_n(\boldsymbol{\Omega})$ (см. п. 1. 7)

$$c_\Pi = \bigcup_{\Sigma \subseteqq \Pi} c_\Sigma = \bigcup_{\xi \in \Pi} c_\xi .$$

Теорема. *U_n-оператив $B = B_n(\boldsymbol{\Omega})$ является $\check{\boldsymbol{\varrho}}_U$-плотным подоперативом U_n-оператива $P = P_n(\boldsymbol{\Omega})$.*

Доказательство. Пусть $(s * \bar{t}) * \bar{c}_\Pi \in B$ при некоторых $s \in P$, $s \in P$, $\bar{t} \in P^n$, $\bar{c}_\Pi \in B^n$. Из (8) следует $s \circ \mathbf{t} \circ (\bar{c}_\Pi)_\Delta \neq O$, и, в силу (4), (10), $\mathbf{t} \circ (\bar{c}_\Pi)_\Delta \neq O$, $\bar{t} * \bar{c}_\Pi \neq O^n$. Вместе с п. 1. 7 это дает $\bar{t} * \bar{c}_\Pi \in B^n$. U-неразложимыми в $B_n(\boldsymbol{\Omega})$ являются элементы $c_\xi \in S_{n2}(\boldsymbol{\Omega})$ (см. п. 2. 6) и только они. Из п. 1. 6. 1 вытекает, что $A^n \subseteqq M_1[S]$. Справедливость условия (27) вытекает из (5) и (8). Таким образом, $P \in \boldsymbol{\varrho}_U \langle B \rangle$.

Условие (16) проверяется здесь тривиально: для всякого $\bar{\boldsymbol{\xi}} \in \boldsymbol{\Omega}^n$ существует лишь один элемент $\bar{c} = \bar{c}_{\bar{\xi}}$ такой, что $\bar{\boldsymbol{\xi}} \in \langle \boldsymbol{\Omega}^n \rangle$.

Пусть теперь $S \in \mathfrak{H}_n$ и $S \in \boldsymbol{\varrho}_U \langle B \rangle$; $\varphi s = s^*$ — отображение (15). Как и в п. 2. 4, получаем $c_\Pi^* = c_\Pi$ для любого $c_\Pi \in B$. Если s — какой-либо элемент из S, $\bar{c}_\Pi = (c_{\Pi_1}, c_{\Pi_2}, \ldots c_{\Pi_n})$, то из (15), (7), (8)

$$s^* * \bar{c}_\Pi = \bigcup_{s\bar{c}_{\bar{\xi}} \in B} s\bar{c}_{\bar{\xi}} \circ (\bar{c}_{\bar{\xi}})_\Delta^{-1} \circ \bar{c}_\Pi = \bigcup_{\substack{s\bar{c}_{\bar{\xi}} \in B \\ \bar{\xi} \in \Pi}} s\bar{c}_{\bar{\xi}} = \bigcup_{\bar{\xi} \in \Pi} s\bar{c}_{\bar{\xi}}\|_B .$$

$$(s\bar{c}_\Pi)^* = \bigcup_{s\bar{c}_{\bar{\xi}} \in B} (s\bar{c}_\Pi * \bar{c}_{\bar{\xi}}) \circ (\bar{c}_{\bar{\xi}})_\Delta^{-1} = s\bar{c}_\Pi\|_B .$$

Вместе с условием (27) это дает $s^* * \bar{c}_\Pi = (s\bar{c}_\Pi)^*$.

Наконец, как и в п. 2. 8, всякий нетождественный гомоморфизм оператива $P_n(\boldsymbol{\Omega})$ индуцирует нетождественный гомоморфизм на $B_n(\boldsymbol{\Omega})$.

2. 10. 1. Введем в классе $\mathfrak{H}_n$ отношение $\boldsymbol{\sigma}_U : S \in \boldsymbol{\sigma}_U \langle B \rangle$ тогда и только тогда, когда B является v-идеалом оператива B и B, S удовлетворяют условиям 2.—3. п. 2. 10. (Заметим, что в этом случае $s\bar{b}\|_B = s\bar{b}$ для любых $s \in S$, $b \in B^n$.)

Теорема. *Упорядоченный оператив $B_n(\boldsymbol{\Omega})$ является $\check{\boldsymbol{\sigma}}_U$-плотным подоперативом оператива $F_n(\boldsymbol{\Omega})$.*

Доказательство аналогично п. 2. 10.

2. 10. 2. В определении класса $\mathfrak{H}_n$ в п. п. 2. 10—2. 10. 1 можно было требовать, чтобы ψ являлась не $\mathfrak{P}$-операцией, а частичной $\mathfrak{P}$-операцией в S, т. е. отображением некоторого подмножества $S_\psi \subseteqq \mathfrak{P}(S)$ в S. Определение отношений $\boldsymbol{\varrho}_U$ и $\boldsymbol{\sigma}_U$ при этом дополняется условием $B \subseteqq S_\psi$.

§ 3. Автоморфизмы алгебр n-отношений

3. 1. Пусть f — произвольное взаимно однозначное отображение множества Ω на себя. Продолжим f обычным способом до отображения множества Ω^n на себя

$$\underset{\xi_i \in \Omega}{\forall} f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = (f\xi_1, f\xi_2, \ldots, f\xi_n)$$

и отображения φ_f оператива $P = P_n(\Omega)$ на себя

$$\underset{\bar{\xi} \in \Omega^n,\ \eta \in \Omega,\ a \in P}{\forall} (f\eta, f\bar{\xi}) \in \varphi_f a \leftrightarrow (\eta, \bar{\xi}) \in a$$

или, что то же самое, при любых $\bar{\xi} \in \Omega^n$, $\eta \in \Omega$, $a \in P$

$$(\eta, \bar{\xi}) \in \varphi_f a \leftrightarrow (f^{-1}\eta, f^{-1}\bar{\xi}) \in a \tag{28}$$

Преобразование φ_f, очевидно, взаимно однозначно, и отображает подоперативы $P_{nrt}(\Omega)$, $S_n(\Omega)$, $W_n(\Omega)$, $V_n(\Omega)$ (см. п. п. 1. 2, 1. 6, 1. 9, 1. 10, 1. 13) и их пересечения на себя. Из (7) следует, что φ_f является автоморфизмом: при любых $a \in P$, $\bar{b} \in P^n$, $\eta \in \Omega$, $\bar{\xi} \in \Omega^n$

$$(\eta, \bar{\xi}) \in \varphi_f(a * \bar{b}) \leftrightarrow (f^{-1}\eta, f^{-1}\bar{\xi}) \in a * \bar{b} \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \underset{\bar{\zeta} \in \Omega^n}{\exists} (f^{-1}\eta, \bar{\zeta}) \in a \wedge \forall_i (\zeta_i, f^{-1}\bar{\xi}) \in b_i \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \underset{\bar{\zeta}' = f\bar{\zeta} \in \Omega^n}{\exists} (\eta, \bar{\zeta}') \in \varphi_f a \wedge \forall_i (\zeta_i', \bar{\xi}) \in \varphi_f b_i \leftrightarrow (\eta, \bar{\xi}) \in \varphi_f a * \varphi_f \bar{b}.$$

В статье [2] показано, что всякий автоморфизм оператива $S_n(\Omega)$ имеет вид (28). Приведенная ниже теорема обобщает этот результат; для $n=1$ она доказана в [7], [9].

Теорема. *Всякий автоморфизм оператива* $S_{nr}(\Omega)$ (см. п. 1. 12) *имеет вид* (28).

Доказательство. В работе [9] показано, что если существует какое-либо $\breve{\varrho}$-плотное вложение алгебраической системы A в алгебраическую систему B, то всякий автоморфизм системы A может быть, и притом единственным образом, продолжен до автоморфизма системы B (см. п. 2. 1). В случае $r=2$ или бесконечного r остается воспользоваться теоремой п. 2. 6 и уже упомянутым результатом статьи [9].

Для конечного r заметим, что $A = S_{n2}(\Omega)$ является единственным минимальным sv-идеалом оператива $S_r = S_{nr}(\Omega)$. Поэтому всякий автоморфизм φ индуцирует на A автоморфизм $\varphi|_A = \varphi_f|_A$, где f — некоторое взаимно однозначное отображение множества Ω на себя.

Тогда $\psi = \varphi_f^{-1}\varphi$ является автоморфизмом оператива S_r таким, что $\psi c_\xi = c_\xi$ (см. п. 2. 6) для любого $\xi \in \Omega$. Поскольку $x\bar{c}_{\bar{\xi}} = c_{x\bar{\xi}}$ для всякого $x \in S_r$, то

$$c_{\psi x\langle\bar{\xi}\rangle} = \psi x * \bar{c}_{\bar{\xi}} = \psi x * \psi \bar{c}_{\bar{\xi}} = \psi(x * \bar{c}_{\bar{\xi}}) = \psi c_{x\bar{\xi}} = c_{x\bar{\xi}}$$

и $\psi x = x$, ψ — тождественный автоморфизм, $\varphi = \varphi_f$.

3. 2. Аналогично из теорем п. п. 2. 7, 2. 8, 2. 9, 2. 9. 1 вытекает следующая теорема:

Теорема. *Всякий автоморфизм оператива* $W_{nr}(\mathbf{\Omega})$ *или* $V_{nr}(\mathbf{\Omega})$ *имеет вид* (28).

3. 3. Теорема п. 2. 10 дает возможность найти группу автоморфизмов для $P_n(\mathbf{\Omega})$ лишь как для упорядоченного оператива. Поэтому ниже будут непосредственно найдены все автоморфизмы $P_n(\mathbf{\Omega})$ без предположения о его упорядоченности (и попутно — автоморфизмы некоторых его подоперативов).

Введем следующие отношения квазипорядка χ_s, χ_v в оперативе S с нулем O: для любых $a, b \in S$,

$$(29)\qquad \begin{aligned} (a, b) \in \chi_v &\leftrightarrow \underset{\bar{x} \in S^n}{\forall} \{b\bar{x} = O \to a\bar{x} = O\}, \\ (a, b) \in \chi_s &\leftrightarrow \underset{\bar{x} \in S^n}{\forall} \{xb^n = O \to xa^n = O\}. \end{aligned}$$

Если $S = P_{nrt}(\mathbf{\Omega})$ или $S = W_{nrt}(\mathbf{\Omega})$, то нетрудно проверить, что

$$(a, b) \in \chi_v \leftrightarrow \mathrm{pr}_v\, a \subseteqq \mathrm{pr}_v\, b,$$

$$(a, b) \in \chi_s \leftrightarrow \mathrm{pr}_s\, a \subseteqq \mathrm{pr}_s\, b.$$

Приведенная ниже теорема при $n=1$ доказана в работе [16].

Теорема. *Всякий автоморфизм оператива* $P_{nrt}(\mathbf{\Omega})$ *при* $r>1$, $t>1$ *имеет вид* (28)

Доказательство. Пусть φ — произвольный автоморфизм оператива $D = P_{nrt}(\mathbf{\Omega})$. Автоморфизм φ переводит в себя единственный минимальный ненулевой sv-идеал $C_{nrt}(\mathbf{\Omega}) = P_{nrt}(\mathbf{\Omega}) \cap C_n(\mathbf{\Omega})$ (см. п. 1. 7) оператива $P_{nrt}(\mathbf{\Omega})$ и отображает любой его минимальный ненулевой v-идеал (s-идеал) на минимальной ненулевой v-идеал (s-идеал). Из п. 1. 7[1]) следует

$$(30)\qquad \underset{\Sigma \subseteqq \Omega,\ \Pi \subseteqq \Omega^n}{\forall} \varphi(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi}) = (\psi\mathbf{\Sigma}, \psi'\mathbf{\Pi}),$$

где ψ, ψ' — взаимно однозначные отображения множеств $\mathfrak{P}(\mathbf{\Omega})$ и $\mathfrak{P}(\mathbf{\Omega}^n)$ на себя. По определению (29), автоморфизм φ сохраняет отношения χ_s, χ_v. Следовательно, существуют такие взаимно однозначные отображения f, f' множеств $\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}^n$ на себя, что

$$(31)\qquad \begin{aligned} &\underset{\xi \in \Omega,\ \Sigma \subseteqq \Omega}{\forall} f\xi \in \psi\mathbf{\Sigma} \leftrightarrow \xi \in \mathbf{\Sigma} \\ &\underset{\bar{\xi} \in \Omega^n,\ \Pi \subseteqq \Omega^n}{\forall} f'\bar{\xi} \in \psi'\mathbf{\Pi} \leftrightarrow \bar{\xi} \in \mathbf{\Pi} \end{aligned}$$

Пусть $\eta \in \mathbf{\Omega}$, $\bar{\xi} = (\xi_i) \in \mathbf{\Omega}^n$, $u = (\eta, \bar{\xi})$, $w_i = (\xi_i, \bar{\xi})$, $\bar{w} = (w_i) \in P^n$. Из (30), (31) следует $\varphi u = (f\eta, f'\bar{\xi})$, $\varphi w_i = (f\xi_i, f'\bar{\xi})$. Если бы $(f\xi_i) \neq f'\bar{\xi}$, то из (12) следовало бы

$$\varphi u = \varphi(u * \bar{w}) = \varphi u * \varphi\bar{w} = (f\eta, f'\bar{\xi}) * \bar{w} = 0.$$

[1]) Теорема п. 1. 7, очевидно, справедлива и для оперативов $P_{nrt}(\Omega)$.

Значит, $f'(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = (f\xi_1, \dots, f\xi_n)$, и вместо (30) имеем

$$\underset{\Sigma\subseteq\Omega,\ \Pi\subseteq\Omega^n}{\forall}(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\Pi}) = (f\boldsymbol{\Sigma}, f\boldsymbol{\Pi})$$

где в правой части продолжение отображения f на $\mathfrak{P}(\boldsymbol{\Omega})$ и $\mathfrak{P}(\boldsymbol{\Omega}^n)$ снова обозначено через f.

Для любых элементов $x \in P_{nrt}(\boldsymbol{\Omega})$, $\bar{\boldsymbol{\xi}} = (\xi_i) \in \boldsymbol{\Omega}^n$, $\boldsymbol{\eta} \in \boldsymbol{\Omega}$ из (11) следует

$$(\boldsymbol{\eta}, \bar{\boldsymbol{\xi}}) \in x \leftrightarrow (\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}^n) * x^n * (\bar{\bar{\boldsymbol{\xi}}}, \bar{\boldsymbol{\xi}}) \neq O,$$

где

$$(\bar{\bar{\boldsymbol{\xi}}}, \bar{\boldsymbol{\xi}}) = ((\xi_1, \bar{\boldsymbol{\xi}}), (\xi_2, \bar{\boldsymbol{\xi}}) \dots (\xi_n, \bar{\boldsymbol{\xi}})),$$

и

$$(f\boldsymbol{\eta}, f\bar{\boldsymbol{\xi}}) \in \boldsymbol{\varphi} x \leftrightarrow (f\boldsymbol{\eta}, f\boldsymbol{\eta}^n) * \boldsymbol{\varphi} x^n * (f\bar{\bar{\boldsymbol{\xi}}}, f\bar{\boldsymbol{\xi}}) = \boldsymbol{\varphi}\{(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}^n) * x^n * (\bar{\bar{\boldsymbol{\xi}}}, \bar{\boldsymbol{\xi}})\} \neq$$

$$\neq O \leftrightarrow (\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}^n) * x^n * (\bar{\bar{\boldsymbol{\xi}}}, \bar{\boldsymbol{\xi}}) \neq O \leftrightarrow (\boldsymbol{\eta}, \bar{\boldsymbol{\xi}}) \in x,$$

что и требовалось доказать.

3. 3. 1. Аналогично доказывается следующая теорема:

Теорема. *Всякий автоморфизм оператива* $W_{nrt}(\boldsymbol{\Omega})$ *имеет вид* (28).

3. 3. 2. Доказательство приведенной ниже теоремы вытекает, аналогично теореме п. 3. 1, из п. п. 2. 9, 2. 9. 1. При $n=1$ она доказана в [9], [10].

Теорема. *Всякий автоморфизм оператива* $V_{nr}(\boldsymbol{\Omega})$ *имеет вид* (28).

3. 4. Пусть A — произвольное непустое множество натуральных чисел; $\boldsymbol{\Theta} = \{t_n\}_{n\in A}$ — семейство натуральных чисел. В множестве

$$P_A(\boldsymbol{\Omega}) = \bigcup_{n\in A} P_n(\boldsymbol{\Omega})$$

введем частичные операции $*_n$ следующим образом. Каждая операция $*_n$ $(n+1)$-арная; она определена для элементов $a, b_1, b_2, \dots, b_n$ в том и только в том случае, когда $a \in P_n(\boldsymbol{\Omega})$, а $b_1, b_2, \dots, b_n$ содержатся в каком-либо одном множестве $P_k(\boldsymbol{\Omega})$, где $k \in A$: для любых $a \in P_n = P_n(\boldsymbol{\Omega})$, $\bar{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in (P_k)^n$, $\boldsymbol{\eta} \in \boldsymbol{\Omega}$, $\bar{\boldsymbol{\xi}} \in \boldsymbol{\Omega}^k$

$$(\boldsymbol{\eta}, \bar{\boldsymbol{\xi}}) \in a *_n \bar{b} \leftrightarrow \underset{\zeta\in\Omega^n}{\exists}\{\boldsymbol{\eta}, \bar{\zeta}) \in a \wedge \underset{i}{\forall}(\zeta_i, \bar{\boldsymbol{\xi}}) \in b_i\}. \tag{32}$$

Присоединим к множеству $P_A(\boldsymbol{\Omega})$ элемент $O = O_A$ и доопределим все частичные операции $*_n$ до операций в множестве $P_A^0(\boldsymbol{\Omega}) = P_A(\boldsymbol{\Omega}) \cup \{O_A\}$, считая, что O_A является нулем в $P_A^0(\boldsymbol{\Omega})$ относительно каждой из операций $*_n$ $(n \in A)$ и что $a *_n b = O_A$ если $a \notin P_n(\boldsymbol{\Omega})$ или $\bar{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ не содержится в каком-либо множестве $(P_k)^n$.[1])

---

[1]) Иначе говоря, $P_A^0(\Omega)$ является элементарным глобальным оперативом [4] относительно каждой операции $*_n$. Можно определить и другими способами суперпозицию отношений из $P_A^0(\Omega)$ (см. например, [5]).

Выделим некоторые подалгебры алгебры $P\ (\Omega)$:

$$X_{Ar\theta}(\Omega) = \bigcup_{n \in A} X_{nrt_n}(\Omega) \quad (\text{где } X - P \text{ или } W);$$

$$X_{Ar}(\Omega) = \bigcup_{n \in A} X_{nr}(\Omega) \quad (\text{где } X - P, F, W, V \text{ или } S).$$

Пусть f — произвольное взаимно однозначное отображение множества Ω на себя. Как и в п. 3. 1, нетрудно проверить, что преобразование φ_f любой из алгебр $P_A(\Omega)$

$$\forall_{\substack{n \in A,\ \bar{\xi} \in \Omega^n \\ \eta \in \Omega,\ x \in P_n(\Omega)}} (\eta, \bar{\xi}) \in \varphi_f x \leftrightarrow (f^{-1}\eta, f^{-1}\bar{\xi}) \in x \tag{33}$$

является ее автоморфизмом, переводящим в себя алгебры $P_{Ar\theta}(\Omega)$, $W_A(\Omega)$, $S_A(\Omega)$, $V_A(\Omega)$.

Теорема. *Всякий автоморфизм алгебры $X_{Ar\Theta}(\Omega)$ или $X_{Ar}(\Omega)$ имеет вид* (33).

Доказательство. Пусть φ — произвольный автоморфизм алгебры $X_{Ar\theta}(\Omega)$. При любом $n \in A$ φ индуцирует на каждой подалгебре $X_n = X_{nrt_n}(\Omega)$, где $n \in A$, автоморфизм φ_{f_n} (см. п. п. 3. 1, 3. 3), где f_n — взаимно однозначные отображения Ω на себя.

Если $k, n \in A$, $k > n$, то отображение φ_{f_k} является автоморфизмом всей алгебры X_A. Тогда $\varphi' = \varphi_{f_k}^{-1}\varphi$ является автоморфизмом алгебры X_A, тождественными на X_k, следовательно,

$$\forall_{x \in X_n,\ \bar{y} \in (X_k)^n} \varphi' x \ast_n \bar{y} = \varphi' x \ast_n \varphi' \bar{y} = \varphi'(x \ast_n \bar{y}) = x \ast_n \bar{y} \tag{34}$$

Пусть $\eta \in \Omega$, $\bar{\zeta} = (\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_n) \in \Omega^n$, $\bar{\xi} \in \Omega^k$ $y_i = (\zeta_i, \bar{\xi})$ $(i = 1, 2, \dots, n)$. Из (32) следует,

$$(\eta, \bar{\xi}) \in x \ast_n \bar{y} \leftrightarrow (\eta, \bar{\zeta}) \in x,$$

$$(\eta, \bar{\xi}) \in (\varphi' x) \ast_n \bar{y} \leftrightarrow (\eta, \bar{\zeta}) \in \varphi' x$$

и, вместе с (34),

$$\forall_{x \in X_n} \varphi' x = x,$$

т. е. $\varphi = \varphi_{f_k}$ всюду на X_n, $f_k = f_n$, что и требовалось доказать.

§ 4. Гомоморфизмы и конгруэнции алгебр n-отношений

4. 1. Лемма. *Пусть φ — гомоморфизм оператива S, φA — подмножество оператива φS, A — полный прообраз множества φA. Множество φA тогда и только тогда является s-идеалом (соответственно v-идеалом, l-идеалом) оператива φS, когда A является s-идеалом (v-идеалом, l-идеалом) оператива S.*

Доказательство. Для любого $\bar{x} = (x_i) \in S^n$ обозначим $\varphi\bar{x} = (\varphi x_i)$. Пусть, например, A — v-идеал оператива S, $\varphi\bar{a} \in (\varphi A)^n$, x — произвольный элемент из S. Тогда $\varphi x \cdot \varphi\bar{a} = \varphi(x\bar{a}) \in \varphi A$ и φA — v-идеал оператива φS.

Обратно, пусть φA — v-идеал оператива φS, $\bar{a}$ — произвольный элемент из A^n, x — произвольный элемент из S. Тогда $\varphi(x\bar{a}) = \varphi x \cdot \varphi\bar{a} \in \varphi A$, $x\bar{a} \in A$, и A — v-идеал в S.

Аналогично, полагая $\bar{a} \in S^n \diagdown (S \diagdown A)^n$, $x \in S$ (и соответственно $\bar{a} \in S^n$, $x \in A$), можно доказать и остальные два утверждения леммы.

4. 2. Гомоморфизмы полугруппы $S_1(\Omega)$ и $W_1(\Omega)$ найдены в работах [7, 8]; гомоморфизмы полугрупп $P_1(\Omega)$ и $F_1(\Omega)$ насколько известно автору, до сих пор не изучены. В приведенных ниже теоремах решен вопрос о гомоморфизмах оперативов $W_{nrt}(\Omega)$, $P_{nrt}(\Omega)$, $S_{nr}(\Omega)$ и $F_{nr}(\Omega)$ при $n > 1$. Он решается значительно проще, чем при $n = 1$.

Гомоморфизм φ алгебраической системы A называется нетривиальным, если он не является ни изоморфизмом, ни отображением в систему, состоящую из одного элемента.

Теорема. *При $n > 1$ оператив $W_{nrt}(\Omega)$ не обладает нетривиальными гомоморфизмами.*

Доказательство. Пусть φ — произвольный собственный (см. п. 21) гомоморфизм оператива $D = W_{nrt}(\Omega)$. Существуют элементы $x, y \in D$, $\bar{\bar{\xi}} = (\xi_i) \in \Omega^n$, $\eta \in \Omega$ такие, что $\varphi x = \varphi y$, $(\eta\, \bar{\bar{\xi}},) \in x \diagdown y$. Обозначив $c_i = (\xi_i, \bar{\bar{\xi}})$ (см. п. 1. 7), $\bar{c} = (c_i)$, $a = (\eta, \eta^n)$, получим $(a * x^n) * \bar{c} = (\eta, \bar{\bar{\xi}}) \neq O = (a * y^n) * \bar{c}$, а в то же время $\varphi\big((a * x^n) * \bar{c}\big) = (\varphi a * \varphi x^n) * \varphi\bar{c} = (\varphi a * \varphi y^n) * \varphi\bar{c} = \varphi\big((a * y^n) * \bar{c}\big) = \varphi O$.

По лемме п. 4. 1 подмножество $A \subseteq W$, состоящее из всех таких элементов $a \in W$, что $\varphi a = \varphi O$, является sl-идеалом оператива W. Поскольку $A \neq \{O\}$, из теоремы п. 1. 11. 1 следует, что $A = D$ и, значит $\varphi D = \varphi O$.

4. 3. Теорема. *Оператив $P_{nrt}(\Omega)$ при $n > 1$ не обладает нетривиальными гомоморфизмами.*

Доказательство. Пусть x — произвольный элемент из $P_{nrt}(\Omega)$; $\eta \in \Omega$; c_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$, a, w такие элементы из $W_n(\Omega)$, что $pr_v c_k = pr_v a = pr_v x$, $pr_v w = pr_s x \times \{\eta\}^{n-1}$, $c_k \bar{\bar{\xi}} = \xi_k$ и $a\bar{\bar{\xi}} = \eta$ для любого $\bar{\bar{\xi}} = (\xi_i) \in pr_v x$; $w\bar{\bar{\xi}} = \xi_1$ для любого $\bar{\bar{\xi}} \in pr_v w$; $\bar{c} = (c_i)$, $\bar{a} = (x, a, a, \ldots, a)$. Тогда $a \in W_{nrt}(\Omega)$ и из (7) следует

$$x * \bar{c} = w * \bar{a} = x. \tag{35}$$

Если $r \leqq t$, то из $|pr_s w| = |pr_v w| = |pr_s x| < r$ имеем $w \in W_{nrt}(\Omega)$; если же $r \geqq t$, то в силу $|pr_s c_k| \leqq |pr_v c_k| = |pr_v x| < t$, $c_k \in W_{nrt}(\Omega)$. Гомоморфизм φ оператива $P_{nrt}(\Omega)$ индуцирует на $W_{nrt}(\Omega)$ в силу п. 4. 2 отображение в один элемент φO; поэтому из (35) в обоих случаях вытекает $\varphi x = \varphi O$, $\varphi P_{nrt}(\Omega) = \varphi O$.

4. 4. Всякая эквивалентность на оперативе $S_{n2}(\Omega)$ является, как нетрудно проверить, конгруэнцией.

Теорема. *Оператив $S_{nr}(\Omega)$ при $n > 1$, $r > 2$ не обладает нетривиальными гомоморфизмами.*

Доказательство. Пусть φ — произвольный гомоморфизм оператива $S_{nr}(\Omega)$, не являющийся изоморфизмом. Как и в п. 2. 6, существуют $\eta, \varepsilon \in \Omega$

$(\eta \neq \varepsilon)$ такие, что $\varphi c_\eta \neq \varphi c_\varepsilon$. Для любого элемента $\xi \in \Omega$ при $r > 2$ элемент $a \in S_{nr}(\Omega)$ такой, что $a\eta^n = \eta$, $a\varepsilon^n = \xi$. Тогда $a * (c_\eta)^n = c_\eta$, $a * (c_\varepsilon)^n = c_\xi$, и $\varphi c_\xi = \varphi a * \varphi c_\varepsilon^n = \varphi a * \varphi c_\eta^n = \varphi(a * c_\eta^n) = \varphi c_\eta$; $\varphi S_{n2} = \varphi c_\eta$.

Пусть теперь x — произвольный элемент из $S_{nr}(\Omega)$. Обозначим через w элемент из $S_n(\Omega)$ такой, что $w\bar{\xi} = \xi_1$, если $\bar{\xi} = (\xi_1, \eta, \eta, \ldots, \eta)$, $\xi_1 \in pr_s x$, и $w\bar{\xi} = \varepsilon$ для всех остальных $\bar{\xi} \in \Omega^n$ (ε — фиксированный элемент из $pr_s x$). Тогда $|pr_s w| = |pr_s x| < r$ и, следовательно, $w \in S_{nr}(\Omega)$. Кроме того, обозначив $\bar{a} = (x, c_\eta, \ldots, c_\eta)$, $\bar{c} = (x, c_\varepsilon, c_\varepsilon, \ldots, c_\varepsilon)$, получим из (7) $w * \bar{a} = x$, $w * \bar{c} = c_\varepsilon$; следовательно, $\varphi x = \varphi(w * \bar{a}) = \varphi w * \varphi\bar{a} = \varphi w * \varphi\bar{c} = \varphi(w * \bar{c}) = \varphi c_\varepsilon$, и $\varphi S_{nr}(\Omega) = \varphi c_\varepsilon$.

4. 4. 1. Обозначим $F_{nr}(\Omega) = P_{nr}(\Omega) \cap F(\Omega)$ (см. п. п. 1. 9, 1. 10). Очевидно, что $F_{n2}(\Omega) = S_{n2}(\Omega)$.

Теорема. *При $n > 1$, $r > 2$ оператив $F_{nr}(\Omega)$ не обладает нетривиальными гомоморфизмами.*

Доказательство аналогично случаю $r \leqq t$ в п. 4. 3.

4. 5. Оператив $V_{n2}(\Omega) = W_{n22}(\Omega)$ не обладает нетривиальными гомоморфизмами в силу п. 4. 2. При $r > 2$ оператив $V_{nr}(\Omega)$ содержит собственные l-идеалы (см. п. 1. 13) и, в силу п. 4. 1, обладает нетривиальными гомоморфизмами.

Пусть $\mathbf{v}$ — некоторое натуральное число; $\mathbf{v} < r$; Σ — фиксированное подмножество Ω, $|\Sigma| = \mathbf{v}$; N — нормальный делитель группы G всех взаимно однозначных отображений множества Σ на себя. Обозначим через σ_{nN} следующую эквивалентность на оперативе $V_{nr}(\Omega)$: для любых $a, b \in V_{nr}(\Omega)$ $(a, b) \in \sigma_{nN}$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий: а) $a = b$, в) $|pr_s a| < \mathbf{v}$, $|pr_s b| < \mathbf{v}$, с) $|pr_s a| = \mathbf{v}$, $pr_s a = pr_s b$, $pr_v a = pr_v b$, $b = x^{-1} \circ d \circ x \circ a$, где x — взаимно однозначное отображение множества $pr_s a$ на Σ, $d \in N$.

Пусть теперь θ — конечная последовательность бесконечных кардинальных чисел $\mu_i, \mathbf{v}_i$ таких, что

$$\mu_n < \mu_{n-1} < \ldots < \mu_1 \leqq \mathbf{v} = \mathbf{v}_1 < \mathbf{v}_2 < \ldots < \mathbf{v}_n < \mathbf{v}_{n+1} < r.$$

Если $a, b \in V_n(\Omega)$, то обозначим через Ω_{ab} множество всех элементов $\bar{\xi} \in pr_v a \cap pr_v b$, что $a\bar{\xi} \neq b\bar{\xi}$; обозначим, кроме того $r_{ab} = |\Omega_{ab} \cup (pr_v a \setminus pr_v b)|$. Пусть далее $\sigma_{n\theta}$ — следующая эквивалентность на оперативе $V_{nr}(\Omega)$: $(a, b) \in \sigma_{n\theta}$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий: а) $a = b$, в) $|pr_s a| < \mathbf{v}$, $|pr_s b| < \mathbf{v}$, с) $\mathbf{v}_i \leqq |pr_s a| = |pr_s b| < \mathbf{v}_{i+1}$, $r_{ab} < \mu_i$ при некотором i.

Как и в [15,8] нетрудно проверить, что σ_{nN} являются конгруэнциями на оперативе $V_{nr}(\Omega)$. В статье [15] (см. также [8]) показано, что всякая конгруэнция на полугруппе $V_1(\Omega)$ совпадает с одной из эквивалентностей σ_{1N} или $\sigma_{1\theta}$; этот результат справедлив и для полугрупп $V_{1r}(\Omega)$ — метод доказательства остается тем же.

4. 5. 1. Теорема. *Всякая конгруэнция на оперативе $V_{nr}(\Omega)$ совпадает с одной из эквивалентностей σ_{nN} или $\sigma_{n\theta}$.*

Доказательство. Пусть $V_\Delta = V_{nr}(\Omega, \Delta)$ — подмножество $V_{nr}(\Omega)$ состоящее из всех $u \in V_{nr}(\Omega)$, для которых $pr_v u \subseteqq \Delta(\Omega^n)$ (см. введение). Каждому отношению $u^{(1)} \in V_{1r}(\mathbf{\Omega})$ поставим во взаимно однозначное соответствие отношение $u \in V_{nr}(\mathbf{\Omega})$:

$$\forall_{\xi, \eta \in \Omega} (\mathbf{\eta}, \xi) \in u^{(1)} \leftrightarrow (\mathbf{\eta}, \xi^n) \in u. \tag{36}$$

Из (36), (8), (4) следует для любых $u, w \in V_n(\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Delta})$

$$(w \circ u^n)^{(1)} = w^{(1)} \circ u^{(1)} \tag{37}$$

В самом деле, если $\mathbf{\eta}, \xi$ — произвольные элементы из $\mathbf{\Omega}$, то

$$(\mathbf{\eta}, \xi) \in (w \circ u^n)^{(1)} \leftrightarrow (\mathbf{\eta}, \xi) \in w \circ u^n \leftrightarrow \exists_{\zeta^n \in \Delta(\Omega^n)} (\mathbf{\eta}, \zeta^n) \in$$
$$\in w \wedge (\zeta, \xi^n) \in u \leftrightarrow (\mathbf{\eta}, \zeta) \in w^{(1)} \wedge (\zeta, \xi) \in u^{(1)} \leftrightarrow (\mathbf{\eta}, \xi) \in w^{(1)}.$$

Пусть $\boldsymbol{\sigma}$ — произвольная конгруэнция оператива $V_{nr}(\mathbf{\Omega})$. Обозначим через $\boldsymbol{\sigma}'$ следующую эквивалентность на полугруппе $V_{1r}(\mathbf{\Omega})$: для любых $u, w \in V_\Delta$

$$(u^{(1)}, w^{(1)}) \in \boldsymbol{\sigma}' \leftrightarrow (u, w) \in \boldsymbol{\sigma} \tag{38}$$

Из (37), (38), (8) и (4) следует, что $\boldsymbol{\sigma}'$ является конгруэнцией на полугруппе $V_{1r}(\mathbf{\Omega})$, а из п. 4. 5, — что $\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma}_{1N}$ или $\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma}_{1\theta}$. Но тогда из (37) получим $\boldsymbol{\sigma}|_{v_\Delta} = \boldsymbol{\sigma}_{nN}|_{v_\Delta}$ или $\boldsymbol{\sigma}|_{v_\Delta} = \boldsymbol{\sigma}_{n\theta}|_{v_\Delta}$ (см. п. 1. 3).

Пусть теперь a, b — произвольные элементы из $V_{nr}(\mathbf{\Omega})$, $(a, b) \in \boldsymbol{\sigma}$, $|pr_v a| \leqq |pr_v b|$ $(<r)$, $\mathbf{\Pi} = pr_v a \cup pr_v b$. Если $|\mathbf{\Pi}| < r$, то выберем такое подмножество $\mathbf{\Xi} \subseteq \mathbf{\Omega}$, для которого $|\mathbf{\Xi}| = |\mathbf{\Pi}|$, и пусть f — взаимно однозначное отображение $\mathbf{\Xi}$ на $\mathbf{\Pi}$. Обозначим через u_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ следующий элемент из $V_{nr}(\mathbf{\Omega})$: $pr_v u_i = \mathbf{\Delta}(\mathbf{\Xi}^n)$ и, если для некоторого $\xi \in \mathbf{\Xi}$ $f\xi = \bar{\mathbf{\eta}} = (\mathbf{\eta}_i) \in \mathbf{\Pi}$, то $u_i \langle \xi^n \rangle = \mathbf{\eta}_i$. Тогда для $\bar{u} = (u_i)$ получим в силу (6), (7) $a \circ \mathbf{u} = a * \bar{u} \in V_\Delta, b \circ \mathbf{u} \in V_\Delta = V_{nr}(\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Delta})$, $(a \circ \mathbf{u}, b \circ \mathbf{u}) \in \boldsymbol{\sigma}|_{v_\Delta}$ и, следовательно, $(a \circ \mathbf{u}, b \circ \mathbf{u}) \in \boldsymbol{\sigma}_{nN}|_{v_\Delta}$ или соответственно $(a \circ \mathbf{u}, b \circ \mathbf{u}) \in \boldsymbol{\sigma}_{n\theta}|_{v_\Delta}$. Поскольку u взаимно однозначно отображает множества $pr_v a$ и $pr_v b$ в $\mathbf{\Delta}(\mathbf{\Omega}^n)$, из определения отношений $\boldsymbol{\sigma}_{n\theta}$ и $\boldsymbol{\sigma}_{nN}$ теперь следует $(a, b) \in \boldsymbol{\sigma}_{nN}$ или $(a, b) \in \boldsymbol{\sigma}_{n\theta}$.

Если же $|\mathbf{\Pi}| \geqq r$, то (в силу $|pr_v b| < r$) множество $\mathbf{\Pi}' = pr_v b$ конечно и $\mathbf{\Pi}'' = pr_v a \cap pr_v b \neq pr_v b$. Выбрав $\mathbf{\Xi} \subseteq \mathbf{\Omega}$ так, чтобы $|\mathbf{\Xi}| = |\mathbf{\Pi}'|$, построим (как ранее для $\mathbf{\Pi}$) элемент $\bar{u} = (u_i)$ так, что $\mathbf{u}(\mathbf{\Xi}) = \mathbf{\Pi}'$, $a \circ \mathbf{u} \in V_{nr}(\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Delta})$, $b \circ \mathbf{u} \in V_{nr}(\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Delta})$ и $(a \circ \mathbf{u}, b \circ \mathbf{u}) \in \boldsymbol{\sigma}_{nN}|_{v_\Delta}$. Но $|pr_v(b \circ \mathbf{u})| = |pr_v b|$, $|pr_v(a \circ \mathbf{u})| = |\mathbf{\Pi}''| < |pr_v b|$; следовательно, $\mathbf{v} > |pr_v b|$ (см. п. 4. 5), а значит и $|pr_v a| < \mathbf{v}$; таким образом, $(a, b) \in \boldsymbol{\sigma}_{nN}$. Теорема доказана.

4. 6. Пусть S, T — две алгебраические системы с частичными операциями; S^0 и T^0 — алгебры, полученные из S и T (как и в п. 3. 4) присоединением нуля O; $\boldsymbol{\varphi}_0$ — гомоморфизм алгебры S^0 в алгебру T^0. Ограничение $\boldsymbol{\varphi}$ гомоморфизма $\boldsymbol{\varphi}_0$ на множестве S называется *гомоморфизмом* алгебраической системы S. Гомоморфизм $\boldsymbol{\varphi}$ называется *сильным* [4], если $\boldsymbol{\varphi} S \subseteq T$. Как и для обычных алгебр, всякий гомоморфизм алгебраической системы S порождается некоторой ее конгруэнцией $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\forall_{x, y \in S} (x, y) \in \boldsymbol{\sigma} \leftrightarrow \boldsymbol{\varphi} x = \boldsymbol{\varphi} y. \tag{39}$$

Гомоморфизмы алгебры $P_A(\mathbf{\Omega})$ и ряда ее подалгебр при $|A| = 1$ рассмотрены в п. п. 4. 2—4. 5. 1. Легко проверить, что следующие два отношения на алгебре $P_{Ar\theta}(\Omega)$ являются ее конгруэнциями (O_m — нуль оператива $P_m(\Omega)$):

$$(x, y) \in \sigma_1 \leftrightarrow \exists_{n \in A} x \in P_n(\Omega) \wedge y \in P_n(\Omega),$$

$$(x, y) \in \sigma_2 \leftrightarrow x = y \vee \{x = O_k \wedge y = O_n\}.$$

При этом гомоморфизм алгебры $P_{Ar\theta}(\Omega)$, порожденный (в смысле соотношения (39)) эквивалентностью σ_1, является сильным.

Теорема. *Если* $|A| \neq 1$, *то алгебра* $X_{Ar\theta}(\Omega)$ *обладает тремя нетривиальными гомоморфизмами, порожденными конгруэнциями* σ_1, σ_2 *и* $\sigma_1 \cup \sigma_2$ ($X = P$ *или* W).

Доказательство. Пусть φ — произвольный собственный гомоморфизм алгебры $X_{Ar\theta}(\Omega)$. Допустим сначала, что существует хотя бы одна пара различных элементов x, x' в одном и том же оперативе $X_n = X_{nrt_n}(\Omega)$, для которых $\varphi x = \varphi x'$. Тогда найдется элемент $\bar{\xi} = (\xi_i) \in \Omega^n$ такой, что $x\langle\bar{\xi}\rangle \neq x'\langle\bar{\xi}\rangle$. Если k — произвольный индекс из A и

$$\bar{\zeta} \in \Omega^k, \quad \bar{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad y_k = (\xi_i, \bar{\zeta}) \in X_k \tag{40}$$

то в силу (32), $x *_n \bar{y}\langle\bar{\zeta}\rangle = x\langle\bar{\zeta}\rangle$, $x' *_n \bar{y}\langle\zeta\rangle = x'\langle\zeta\rangle$ и $x *_n \bar{y} \neq x' *_n \bar{y}$. В то же время оба эти элемента содержатся в X_k и $\varphi(x *_n \bar{y}) = \varphi x *_n \varphi\bar{y} = \varphi x' *_n \varphi\bar{y} = \varphi(x' *_n \bar{y})$. Из п. п. 4. 2, 4. 3 следует, что $\varphi X_n = \varphi O_n$ при $n \neq 1$.

Если $1 \notin A$ и A содержит хотя бы один элемент $n \neq 1$, то как и выше, $\varphi X_n = \varphi O_n$. Если $r \leqq t_n$, то поступаем с X_1 так же, как и в п. 4. 3. Пусть z — произвольный элемент из X_1, $\eta \in \Omega$, $w \in W_{nrt_n}(\Omega)$, $a \in W_{1rt_1}(\Omega)$, $pr_v a = pr_v z$, $a\bar{\xi} = \eta$ для любого $\bar{\xi} \in pr_v x$; $pr_v w = pr_s z \times \{\eta\}^{n-1}$, $w\bar{\xi} = \xi_1$, для любого $\bar{\xi} = (\xi_i) \in pr_v w$; $\bar{a} = (z, a, a, \ldots, a)$. Тогда $w *_n \bar{a} = x$, $w \in W_{nrt_n}(\Omega)$, $\varphi x = \varphi(w *_n \bar{a}) = \varphi w *_n \varphi\bar{a} = \varphi O_n *_n \varphi\bar{a} = \varphi(O_n *_n \bar{a}) = \varphi O_1$.

Если же $r \geqq t_n$, то выберем элементы $u \in X_n(\Omega)$, $c \in X_1(\Omega)$ так, что $pr_v u = pr_v z \times \{\eta\}^{n-1}$, $pr_v c = pr_v z$ и для всякого $\xi \in pr_v z$ (обозначая $\bar{\xi} = (\xi, \eta, \eta, \ldots, \eta)$, $\bar{c} = (c, a, a, \ldots, a)$) $c\bar{\xi} = \xi$, $u\bar{\xi} = z\bar{\xi}$. Тогда $u *_n \bar{c} = z$ и снова $\varphi z = \varphi u *_n \bar{c} = \varphi O_n *_n \varphi\bar{c} = \varphi(O_n *_n \bar{c}) = \varphi O_1$.

Если $\varphi x \neq \varphi z$ при любых x, z из различных X_n, X_k, то гомоморфизм φ порождается конгруэнцией σ_1. Пусть теперь $\varphi x = \varphi z$, $x \in X_n$, $z \in X_k$, $k \neq n$; $\bar{y} = (y_i) \in X_k^n$ (см. (40)). Тогда из п. 4. 3 следует, что $z_k = x *_n \bar{y} \in X_k$ и

$$\varphi z_k = \varphi(x *_n \bar{y}) = \varphi x *_n \varphi\bar{y} = \varphi z *_n \varphi\bar{y} = \varphi(z *_n \bar{y}) = \varphi O \tag{41}$$

В силу п. 4. 3 элемент O является нулем оператива $P_{nrt_n}(\Omega)$; из п. 4. 1 и (43) следует, что при любом $k \in A$ множество I_k всех элементов $z_k \in X_k$ таких, что $\varphi z_k = \varphi O$, является sl-идеалом оператива X_k. Из п. п. 1. 11, 1 и 4. 3 следует, что при $k \neq 1$ либо $I_k = \{O_k\}$ либо $I_k = X_k$.

Пусть $I_n \neq \{O_n\}$ хотя бы при одном $n \in A$; например, элемент x в (41) отличен от O_n. Тогда из (40), (41) следует, что $z_k \in I_k \setminus \{O\}$ при любом $k \in A$, и $I_k = X_k$ при $k \neq 1$. Кроме того, $\varphi z_1 = \varphi O_1$, $z_1 \neq O_1$; как и выше, в силу $|A| \neq 1$ отсюда следует $\varphi X_1 = \varphi O_1$. В этом случае $\varphi X_{Ar\theta}(\Omega) = \varphi O$.

Если же все $I_k = \{O_k\}$ (из (41) следует, что все I_k в рассматриваемом случае непусты), то гомоморфизм φ порождается конгруэнцией σ_2 или $\sigma_1 \cup \sigma_2$.

4. 6. 1. Аналогично доказывается следующая теорема:

Теорема. *Если $|A| \neq 1$, $r > 2$, то единственным нетривиальным гомоморфизмом алгебры $Y_{Ar}(\Omega)$ ($Y = F$ или $Y = S$) является гомоморфизм, порожденный конгруэнцией σ_1.*

4. 6. 2. Пусть σ — произвольная эквивалентность на множестве Ω. Отношение σ_{AS} на алгебре $S_{A2}(\Omega) = F_{A2}(\Omega)$

$$(x, y) \in \sigma_{AS} \leftrightarrow \underset{n \in A}{\exists}\, x \in S_{n2} \wedge y \in S_{n2} \wedge (x\langle\Omega^n\rangle, y\langle\Omega^n\rangle) \in \sigma$$

является ее конгруэнцией, порождающей сильный гомоморфизм.

Теорема. *Всякий нетривиальный гомоморфизм алгебры $S_{A2}(\Omega)$ порождается одной из конгруэнций σ_{AS}.*

Доказательство. Пусть φ — произвольный гомоморфизм алгебры $S_{A2}(\Omega)$. Для каждого $n \in A$ φ индуцирует эквивалентность ϱ_n на множестве Ω: $(\xi, \eta) \in \varrho_n \leftrightarrow \varphi c_{\xi n} = \varphi c_{\eta n}$, где $c_{\xi n}$ — отображение Ω^n на $\{\xi\}$. Если $\varphi c_{\xi n} = \varphi c_{\eta n}$, то для любого $k \in A$ имеем, обозначая $c = c_{\xi k}$,

$$\varphi c_{\xi k} = \varphi(c_{\xi n} *_n c^n) = \varphi c_{\xi n} *_n \varphi c^n = \varphi c_{\eta n} *_n \varphi c^n = \varphi(c_{\eta n} * c^n) = \varphi c_{\eta k}.$$

Таким образом $\varrho_n = \varrho_k (= \sigma)$ для любого $k \in A$.

Из п. 1. 12, как и в п. 4. 6, следует, что для нетривиального гомоморфизма алгебры $S_{A2}(\Omega)$ $\varphi S_{n2}(\Omega) \cap \varphi S_{k2}(\Omega) = \emptyset$ при $k \neq n$.

4. 7. Каждая из эквивалентностей на алгебре $V_{Ar}(\Omega)$ (см. п. п. 3. 4, 4. 5).

(42)
$$(x, y) \in \sigma_{AN} \leftrightarrow \{\underset{n \in A}{\mathrm{E}}\, x \in V_n \wedge y \in V_n \wedge (x, y) \in \sigma_{nN}\},$$

$$(x, y) \in \sigma_{A\theta} \leftrightarrow \{\underset{n \in A}{\exists}\, x \in V_n \wedge y \in V_n \wedge (x, y) \in \sigma_{n\theta}\},$$

$$(x, y) \in \sigma^{\circ}_{AZ} \leftrightarrow (x, y) \in \sigma_{AZ} \vee \{|\mathrm{pr}_s\, x| < \nu \wedge |\mathrm{pr}_s\, y| < \nu\}.$$

(где $V_n = V_n(\Omega)$, $Z = N$ или $Z = \theta$), является, как нетрудно проверить, ее конгруэнцией; σ_{AN} и $\sigma_{A\theta}$ порождают сильный гомоморфизм алгебры $V_{Ar}(\Omega)$.

Teopema. *Всякий гомоморфизм алгебры $V_{Ar}(\Omega)$ порождается одной из конгруэнций* (42).

Доказательство. Гомоморфизм φ алгебры $V_{Ar}(\Omega)$ при любом $n \in A$ индуцирует на $V_{nr}(\Omega)$ гомоморфизм, порожденный конгруэнцией σ_n. Из п. 4. 5 следует, что $\sigma_n = \sigma_{nN}$ или $\sigma_n = \sigma_{n\theta}$.

Пусть $k, n \in A$, $k < n$, $x, y \in V_{nr}(\Omega)$, $(x, y) \in \sigma_n$. Тогда при любом $u \in V_{kr}(\Omega)$, в силу (32), $x *_n u^n, y *_n u^n \in V_{kr}(\Omega)$ и $(x *_n u^n, y *_n u^n) \in \sigma_k$. Выбирая подходящим образом элементы $u \in V_{kr}(\Omega)$, как и в п. 4. 5. 1, можно показать, что $\sigma_n = \sigma_{nN} \to \sigma_k = \sigma_{kN}$ (при одном и том же выборе N и ν) и аналогично $\sigma_n = \sigma_{n\theta} \to \sigma_k = \sigma_{k\theta}$.

Если $\varphi V_{nr}(\Omega) \cap \varphi V_{kr}(\Omega) = \emptyset$ при любых $k, n \in A$, $k \neq n$ то гомоморфизм φ порождается одной из конгруэнций σ_{AZ}, где $Z = N$ или $Z = \theta$. В противном случае, как и в доказательстве теоремы п. 4. 6, покажем, что все идеалы I_k, где $\varphi I_k = \varphi O$, не пусты. Из строения конгруэнций σ_n вытекает только одна возможность — $I_k = V_{kv}(\Omega)$, и тогда гомоморфизм φ порождается одной из конгруэнций φ^0_{AZ}, где $Z = N$ или $Z = \theta$.

Литература

[1] K. Menger, The algebra of functions: past, present, future. *Rendiconti di mathematica*, **20** (1961), 409—430.

[2] H. I. Whitlock, A composition algebra for multiplace functions. *Math. Ann.*, **157** (1964), 167—168.

[3] R. Dicker, The substitutive law. *Proc. London Math. Soc.*, **13** (1963), 493—510.

[4] В. В. Вагнер, Теория отношений и алгебра частичных отображений. В сб. «Теория полугрупп и ее приложения», вып. I, 3—178. *Саратов*, 1965.

[5] Б. М. Шайн, Теория полугрупп как теория суперпозиции многоместных функций. В сб. «Межвузовский симпозиум по общей алгебре». Тарту, 1966, стр. 169—190.

[6] Л. М. Глускин, Алгебры многоместных функций. В сб. «Межвузовский научный симпозиум по общей алгебре». Тарту, 1966, стр. 32—37.

[7] А. И. Мальцев, Симметрические группоиды. *Матем. сб.*, **31** (73), № 1, (1952), 136—151.

[8] Э. Г. Шутов, Гомоморфизмы полугруппы всех частичных преобразований. Известия вузов, *Математика*, № 3 (22), (1961), 177—184.

[9] Л. М. Глускин, О плотных вложениях. *Матем. сб.*, **61** (103), № 2, 175—206.

[10] Е. С. Ляпин, Ассотиацивные системы всех частичных преобразований. ДАН СССР, **88**, № 1, (1953), 13—16.

[11] Л. М. Глускин, Идеалы полугрупп преобразований. Матем. сб., **47** (89), № 1, (1959), 111—130.

[12] Л. М. Глускин, Идеалы полугрупп. Матем. сб. **55** (97), № 4, (1961), 421—448.

[13] Л. М. Глускин, Идеалы полугруд. В сб. «Теория полугрупп и ее приложения», вып. I. *Саратов*, 1965, стр. 198—228.

[14] Я. В. Хион, Ω-системы. В сб. «Межвузовский нучный симпозиум по общей алгебре». Тарту, 1966, стр. 123—130.

[15] А. Е. Либер, О симметрических обобщенных группах. *Матем. сб.*, 33 (75), № 3, (1953), 531—544.

[16] Л. М. Глускин, Автоморфизмы полугрупп бинарных отношений. Математические записки Уральского госуниверситета им. Горького, **6**, № 1, (1967), 44—54.

[17] В. В. Вагнер, Теория обобщенных груд и обобщенных групп. *Матем. сб.*, **32** (74), № 3, (1953), 545—632.

(Поступило 24. IV. 1968 г.)