Изоморфизм теорий относительности ньютона и эйнштейна для двумерного пространственно-временного континуума

Н. И. КОВАНЦОВ (Киев)

Теорию относительности Ньютона для двумерного пространственно-временного континуума математически можно определить как теорию инвариантов однопараметрической группы преобразований, которая в специальной системе координат может быть представлена с помощью уравнений

$$x' = x - vt, \qquad t' = t. \tag{1}$$

v — параметр. Истолковывая координату x как абсциссу точки на прямой, t — как время и v — как скорость движения точки по прямой, получают физическую интерпретацию этой теории. Равенства (1) носят название уравнений Галилея.

Подобным же образом для двумерного континуума теория относительности Эйнштейна есть теория инвариантов однопараметрической же группы преобразований, которую можно представить с помощью следующих уравнений:

$$X' = \frac{X - VT}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \qquad T' = \frac{T - \frac{V}{c^2}X}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \tag{2}$$

Здесь параметром является V, c — некоторая постоянная. Интерпретируя эту постоянную как скорость света, T — как время, X — как абсциссу точки на прямой и V — как скорость ее перемещения, получают физическое истолкование равенств (2). Эти равенства носят название уравнений Лоренца.

Примечание. Разумеется, говоря о том, что та или иная теория относительности есть теория инвариантов соответствующей группы преобразований, мы сознаем значительную долю условности в этом утверждении. Не каждую категорию теории относительности можно определить как групповой инвариант. Например, из равенств (1) и (2) не могут быть дедуцированы понятия силы или массы. Говоря о связи между теориями относительности и групп однопараметрических преобразований, мы имеем в виду лишь определенные аспекты первых.

Известен классический переход от формул (2) к формулам (1) — в формулах (2) полагают $c=\infty$, после чего большие буквы, входящие в них, отождествляют с малыми буквами, входящими в (1). (В физических терминах это означает, что в теории Ньютона скорость света бесконечна, в теории Эйнштейна — конечна.) Однако осуществить обратный переход от формул (1) к формулам (2) мы без привлечения определенных физических соображений не в состоянии. Точнее говоря, надо просто заново вывести формулы (2), исходя из постоянства скорости света в любой инерциальной системе и инвариантности физических законов при переходе от одной системы к другой. Никакого участия при этом формулы (1) принимать не будут.

Вообще говоря, из любой формулы теории относительности Эйнштейна мы можем получить соответствующую формулу теории Ньютона, положив в первой $c=\infty$. (Мы говорим «вообще говоря», учитывая то, что при выводе некоторых соотношений в геометрии группы, определяемой равенствами (2) — группы Лоренца — конечность скорости света может играть существенную роль, соотношение может потерять смысл, если в нем положить $c=\infty$). Однако мы просто не имеем правила, которое позволяло бы из каждой формулы теории относительности Ньютона получать соответствующую формулу теории Эйнштейна.

Между тем, если принять во внимание то, что обе группы (1) и (2) — однопараметрические, а следовательно, и изоморфные друг другу (обе они изоморфны группе параллельных переносов), мы можем всегда преобразованием координат перевести формулы (1) в формулы (2) и наоборот. Тем самым любое соотношение в одной теории относительности автоматически может быть перенесено с помощью соответствующего преобразования в другую теорию.

В настоящей заметке мы находим такие преобразования, пользуясь известными приемами теории групп.

Дифференцируя равенства (2) по параметру V, получаем

$$\frac{dX'}{dV} = -\frac{T'}{1-\dfrac{V}{c^2}}, \qquad \frac{dT'}{dV} = -\frac{1}{c^2}\,\frac{X'}{1-\dfrac{V}{c^2}}. \tag{3}$$

Это — система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Ее первые интегралы есть

$$c_1 = c^2 T'^2 - X'^2, \qquad c_2 = (cT'+X')\sqrt{\frac{\dfrac{V}{c}+1}{-\dfrac{V}{c}+1}} \tag{4}$$

c_1, c_2 — произвольные постоянные. В качестве первых интегралов можно взять произвольные функции от c_1, c_2. Возьмем, в частности, такие:

$$C_1 = \sqrt{c_1}, \qquad C_2 = \ln\frac{c_2}{\sqrt{c_1}},$$

или

$$C_1 = \sqrt{c^2 T'^2 - X'^2}, \qquad C_2 = \ln\sqrt{\frac{cT'+X'}{cT'-X'}} + \ln\sqrt{\frac{1+\frac{V}{c}}{1-\frac{V}{c}}}. \tag{5}$$

Полагая здесь $V=0$ и решая относительно X', T' уравнения

$$\sqrt{c^2 T'^2 - X'^2} = \sqrt{c^2 T^2 - X^2}, \tag{6}$$

$$\ln\sqrt{\frac{cT'+X'}{cT'-X'}} + \ln\sqrt{\frac{1+\frac{V}{c}}{1-\frac{V}{c}}} = \ln\sqrt{\frac{cT+X}{cT-X}},$$

получим формулы Лоренца (уравнения Лоренца).

Перейдем к новой системе координат и к новому параметру, положив

$$t = \sqrt{c^2 T^2 - X^2}, \qquad x = \sqrt{c^2 T^2 - X^2}\ln\sqrt{\frac{cT+X}{cT-X}}, \tag{7}$$

$$v = \ln\sqrt{\frac{1+\frac{V}{c}}{1-\frac{V}{c}}}$$

и аналогично для t', x'.

В таком случае формулы (6) примут вид

$$\frac{x'}{t'} = \frac{x}{t} - v, \qquad t' = t,$$

или

$$x' = x - vt, \qquad t' = t.$$

Но это есть формулы Галилея (1).

Таким образом, равенства (7) осуществляют искомый переход от уравнений Галилея (1) к уравнениям Лоренца (2).

Решая уравнения (7) относительно X, T, V, получим равенства

$$X = t sh\frac{x}{t}, \qquad T = \frac{1}{c} t ch\frac{x}{t}, \qquad V = c\cdot thv \tag{8}$$

и аналогично для X', T', осуществляющие переход от уравнений Галилея к уравнениям Лоренца. Небезынтересно проследить, как это выглядит фактически. Внесем (8) в равенства (2):

$$t' sh \frac{x'}{t'} = \frac{tsh \frac{x}{t} - c \cdot thv \frac{1}{c} t \cdot ch \frac{x}{t}}{\sqrt{1 - th^2 v}} = tsh \left(\frac{x}{t} - v \right),$$

(9)

$$\frac{1}{c} t' ch \frac{x'}{t'} = \frac{\frac{1}{c} tch \frac{x}{t} - \frac{1}{c^2} c \cdot thv \cdot tsh \frac{x}{t}}{\sqrt{1 - th^2 v}} = \frac{1}{c} tch \left(\frac{x}{t} - v \right).$$

Деля первое равенство на второе, получим

$$th \frac{x'}{t'} = th \left(\frac{x}{t} - v \right).$$

Отсюда

$$\frac{x'}{t'} = \frac{x}{t} - v,$$

а в таком случае любое из равенств (9) дает

$$t' = t.$$

Получили уравнения Галилея (1).

Постоянное c, входящее в равенства (7) или (8), может быть совершенно произвольным. Переход от одних уравнений (1 или 2) к другим осуществляется без обращения этой постоянной в бесконечность.

Найдем, например, формулу сложения скоростей в специальной теории относительности Эйнштейна, пользуясь соответствующей формулой в теории Ньютона

(10) $$w' = w - v,$$

где

$$w' = \frac{dx'}{dt'}, \qquad w = \frac{dx}{dt}.$$

Из (7) находим

$$w = 2c \frac{TW - X}{c^2 T - XW} + \ln \sqrt{\frac{cT + X}{cT - X}},$$

(11)

$$w' = 2c \frac{T' W' - X'}{c^2 T' - X' W'} + \ln \sqrt{\frac{cT' + X'}{cT' - X'}},$$

где

$$W = \frac{dX}{dT}, \qquad W' = \frac{dX'}{dT'}.$$

Внося это в (10), где вместо v следует подставить его значение по формулам (7), будем иметь

$$2c\,\frac{T'W'-X'}{c^2T'-X'W'}+\ln\sqrt{\frac{cT'+X'}{cT'-X'}}=2c\,\frac{TW-X}{c^2T-XW}+\ln\sqrt{\frac{cT+X}{cT-X}}-\ln\sqrt{\frac{1+\frac{V}{c}}{1-\frac{V}{c}}}.$$

Принимая во внимание (6), мы приведем это равенство к виду

$$\frac{T'W'-X'}{c^2T'-X'W'}=\frac{TW-X}{c^2T-XW}. \tag{12}$$

Решая это относительно W', получим

$$W'=\frac{(c^2TT'-XX')W+c^2(TX'-XT')}{(TX'-XT')W+(c^2TT'-XX')}. \tag{13}$$

Если внести сюда значения X', T' по формулам (2), то будем иметь окончательно

$$W'=\frac{W-V}{1-\frac{VW}{c^2}}. \tag{14}$$

Это и есть известная формула сложения скоростей в теории Эйнштейна.

Замечание. Формулы сложения скоростей как в теории Ньютона (см. (10)), так и в теории Эйнштейна (см. (14)) записаны в виде, не дающем основания говорить об их инвариантности при переходе от одной инерциальной системы координат к другой — и в ту, и в другую формулы входит скорость движения одной инерциальной системы относительно другой. Более корректной была бы, очевидно, следующая запись

$$w''=w'+w \tag{15}$$

(для теории Ньютона) и

$$W''=\frac{W'+W}{1+\frac{W\cdot W'}{c^2}} \tag{16}$$

(для теории Эйнштейна). Здесь $w(W)$ — скорость движения какой-либо точки M относительно некоторой инерциальной системы I, $w'(W')$ — скорость движения точки M' относительно точки M, $w''(W'')$ — результирующая скорость движения точки M' относительно системы I. Если система I движется относительно какой-либо другой инерциальной системы I_0 со скоростью v, то, очевидно,

$$\begin{aligned}\bar{w}&=w+v,\\ \bar{w}'&=w',\\ \bar{w}''&=w''+v\end{aligned} \tag{17}$$

— в случае теории Ньютона. Здесь $\overline{w}$ — скорость движения точки M относительно I_0, $\overline{w}''$ — скорость движения точки M' относительно этой же системы. Ради единства мы обозначили относительную скорость точки M' относительно M буквой $\overline{w}'$. Из (17) немедленно следует

$$\overline{w}'' = \overline{w}' + \overline{w}, \tag{18}$$

что доказывает инвариантность формулы сложения скоростей относительно преобразования инерциальной системы.

В случае теории Эйнштейна мы имеем

$$\begin{gathered} \overline{W} = \frac{W+V}{1+\dfrac{WV}{c^2}}, \\ \overline{W}' = W', \\ \overline{W}'' = \frac{W''\,V}{1+\dfrac{W''\,V}{c^2}}. \end{gathered} \tag{19}$$

Внося значения $\overline{W}, \overline{W}', \overline{W}''$ в формулу

$$\overline{W}'' = \frac{\overline{W}'+\overline{W}}{1+\dfrac{\overline{W}\,\overline{W}'}{c^2}}, \tag{20}$$

мы придем к формуле (16), что и доказывает инвариантность последней относительно преобразования инерциальной системы. В частности, если точка M неподвижна относительно системы I, то равенства (18) и (20) совпадут соответственно с (10) и (14) (при соответствующей замене обозначений).

Вернемся к формулам (8). Эти формулы — не единственные из тех, что переводят уравнения Лоренца в уравнения Галилея. В самом деле, мы получили эти формулы, решая уравнения (7) относительно X, T, V. Мы можем, однако, систему координат x, t и параметр v определить не с помощью равеств (7), а с помощью, например, таких равенств

$$\begin{gathered} t = \sqrt{c^2T^2 - X^2}, \qquad \alpha t + \beta x = \sqrt{c^2T^2-X^2}\,\ln\sqrt{\frac{cT+X}{cT-X}}, \\ \beta v = \ln\sqrt{\frac{1+\dfrac{V}{c}}{1-\dfrac{V}{c}}}, \end{gathered} \tag{21}$$

где α, β — произвольные константы. Тогда, решая (21) относительно X, T, V, будем иметь

$$X = t\,sh\left(\alpha+\beta\frac{x}{t}\right), \qquad T = \frac{1}{c}\,t\,ch\left(\alpha+\beta\frac{x}{t}\right), \qquad V = c\cdot th\beta v. \tag{22}$$

Равенства (9) запишутся теперь в виде

$$t' sh\left(\alpha+\beta\frac{x'}{t'}\right) = t sh\left(\alpha+\beta\frac{x}{t}-\beta v\right),$$

$$\frac{1}{c}t' ch\left(\alpha+\beta\frac{x'}{t'}\right) = \frac{1}{c}t ch\left(\alpha+\beta\frac{x}{t}-\beta v\right).$$

Отсюда, как и прежде, заключаем о справедливости равенств

$$x' = x - vt, \qquad t' = t,$$

т. е. с помощью преобразования (22) формулы Лоренца переводятся в формулы Галилея.

Общеизвестна связь между формулами Лоренца и формулами вращения осей координат в псевдоевклидовой плоскости. Не лишено интереса обратить внимание и на формулы вращения собственно евклидовой плоскости

$$\begin{aligned}\overline{X}' &= \overline{X}\cos\alpha - \overline{Y}\sin\alpha,\\ \overline{Y}' &= \overline{X}\sin\alpha + \overline{Y}\cos\alpha.\end{aligned} \tag{23}$$

Если положить в этих формулах

$$\overline{Y} = c\overline{T}, \qquad \overline{Y}' = c\overline{T}', \tag{24}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\overline{V}^2}{c^2}}}, \qquad \sin\alpha = \frac{\frac{\overline{V}}{c}}{\sqrt{1+\frac{\overline{V}^2}{c^2}}},$$

то они примут следующий вид

$$\overline{X}' = \frac{\overline{X}-\overline{V}\overline{T}}{\sqrt{1+\frac{\overline{V}^2}{c^2}}}, \qquad \overline{T}' = \frac{\overline{T}+\frac{\overline{V}}{c^2}\overline{X}}{\sqrt{1+\frac{\overline{V}^2}{c^2}}}, \tag{25}$$

делающий их похожими на формулы Лоренца и сводящий их к последним, если заменить действительную скорость света мнимой. Однако переход от одних формул к другим может быть осуществлен и в самой действительной области с помощью, например, следующих равенств

$$\begin{aligned} X &= \sqrt{c^2\overline{T}^2+\overline{X}^2}\; sh \arcsin\frac{\overline{X}}{\sqrt{c^2\overline{T}^2+\overline{X}^2}},\\ T &= \frac{1}{c}\sqrt{c^2\overline{T}^2+\overline{X}^2}\; ch \arccos\frac{c\overline{T}}{\sqrt{c^2\overline{T}^2+\overline{X}^2}},\\ V &= c\cdot th \operatorname{arc\,tg}\frac{\overline{V}}{c}.\end{aligned} \tag{26}$$

В самом деле, переход от формул (25) к формулам Галилея можно осуществить при помощи таких равенств

$$\overline{X} = t \sin \frac{x}{t}, \qquad \overline{T} = \frac{1}{c} t \cos \frac{x}{t}, \qquad \overline{V} = c \cdot \operatorname{tg} v, \tag{27}$$

вывод которых совершенно аналогичен выводу равенств (8). Сопоставляя равенства (27) и (8), мы и придем к (26).

Не исключена возможность физического истолкования формул (25), однако попытки такого истолкования нам неизвестны.

(Поступило 10. IX. 1968 г.)