О мультипликативных группах модулярных групповых алгебр примарных абелевых групп произвольной мощности. I.

Т. Ж. МОЛЛОВ (Пловдив)

В [1] С. Д. Берман исследовал мультипликативную группу групповой алгебры KG счетной абелевой p-группы G над произвольным алгебраическим расширением K характеристики p простого поля Π.

В настоящей статье рассматривается мультипликативная группа $M(LG)$ группового кольца LG абелевой p-группы G произвольной мощности над коммутативным кольцом L с единицей характеристики p. Силовская p-подгруппа $S^*(LG)$ мультипликативной группы $M(LG)$ является прямым произведением своей подгруппы

$$S(LG) = \{x = \sum_{g \in G} \alpha_g g / \sum_{g \in G} \alpha_g = 1\}$$

и силовской p- подгруппой мультипликативной группы $\tilde{L}$ кольца L. Описывается группа $S(LG)$, когда G — прямое произведение циклических групп.

Укажем на некоторые *обозначения и понятия*, которые будем употреблять неизменно в статье.

G — абелева p-группа с мощностью μ;

L — ассоциативное коммутативное кольцо с единицей характеристики p с мощностью Λ; L_p-силовская p-подгруппа мультипликативной группы $\tilde{L}$ кольца L;

$S^*(LG)$ — силовская p-подгруппа мультипликативной группы $M(LG)$ группового кольца LG;

$G^{p^k}(L^{p^k})$, где $k=0, 1, 2, \ldots$ — множество p^k-ых степеней элементов группы G (кольца L), которое, очевидно, является группой (кольцом);

$N(H)$ — нижний слой абелевой p-группы H, т. е. множество всех ее элементов порядка p (вместе с единицей 1 группы H);

$|M|$ — мощность множества $M, \mu_i = |G^{p^i}|$ и $\Lambda_i = |L^{p^i}|$, $i=0, 1, 2, \ldots$ ($\Lambda_0 = \Lambda$, $\mu_0 = \mu$);

знак „Π", или „$\times$" — знак прямого произведения групп.

Терминология абелевых p-групп, которую будем употреблять, соответствует монографии [2], однако в отличии от [2] групповую операцию абелевых p-групп будем записывать мультипликативно.

Во многих утверждениях относительно группового кольца LH абелевой p-группы H, существенно используется следующая очевидная формула:

$$(1) \qquad (\sum_{h \in H} \alpha_h h)^{p^n} = \sum_{h \in H} \alpha_h^{p^n} h^{p^n} \qquad (\alpha_h \in L).$$

Пусть i и n — натуральные числа и $n \geqq i$, а $\gamma \neq 0$ — произвольное кардинальное число. Через $C_\gamma^{i,n}$ (соответственно через C_γ^i) обозначаем прямое произведение циклических p-групп порядков $p^i, p^{i+1}, \ldots, p^n$ (соответственно порядков $p^i, p^{i+1}, \ldots, p^{i+s}, \ldots$, где s — призвольное натуральное число), причем каждая из циклических групп порядка p^k, $i \leqq k \leqq n$ (соответственно каждая из циклических групп порядка p^l, $l \geqq i$) встречается γ раз. Кроме того положим $C_\gamma^{i+1,i} = 1$.

Предложение 1. *Произвольный элемент* $x = \sum_i \alpha_i g_i (\alpha_i \in L, g_i \in G)$ *группового кольца* LG *принадлежит группе* $M(LG)$ *тогда и только тогда, когда элемент* $\delta = \sum_i \alpha_i$ — *обратимый элемент кольца* L.

Доказательство. Пусть $x = \sum_i \alpha_i g_i$, $\alpha_i \in L$, $g_i \in G$ и $\sum_i \alpha_i = \delta$ — обратимый элемент кольца L. Пусть p^r — максимум порядков элементов g_i, которые входят в представление элемента x. Тогда $x^{p^r} = \delta^{p^r}$, следовательно $x \in M(LG)$.

Следствие. *Имеет место прямое разложение:*

$$M(LG) = S(LG) \times \tilde{L}, \tag{2}$$

где $\tilde{L}$ — *мультипликативная группа кольца* L, *а* $S(LG)$ — p-*подгруппа группы* $M(LG)$:

$$S(LG) = \{x = \sum_{g \in G} \alpha_g g / \sum_{g \in G} \alpha_g = 1\}.$$

Предложение 2. *Пусть* L — *ассоциативное коммутативное кольцо с единицей характеристики* p, *а* G — *абелева* p-*группа. Тогда*

1) силовская p-*подгруппа* L_p *мультипликативной группы* $\tilde{L}$ *кольца* L *состоит из всевозможных элементов вида* $1+\alpha$, *где* α — *нильпотентные элементы кольца* L;

2) для силовской p-*подгруппы* $S^*(LG)$ *мультипликативной группы* $M(LG)$ *имеет место* $S^*(LG) = S(LG) \times L_p$, *т. е.*

$$S^*(LG) = \{x = \sum_{g \in G} \alpha_g g / \sum_{g \in G} \alpha_g = 1+\alpha\}, \tag{3}$$

где α — *нильпотентный элемент кольца* L, *следовательно группа* $S^*(LG)$ *совпадает с группой* $S(LG)$ *тогда и только тогда, когда* L — *кольцо без нильпотентных элементов*.

Доказательство. Если $\alpha \in L$ — произвольный нильпотентный элемент, то для некоторого натурального N имеет место $\alpha^{p^N} = 0$ и следовательно $(1+\alpha)^{p^N} = 1$ т. е. $1+\alpha \in L_p$. Обратно, если $x \in L_p$, то $x^{p^n} = 1$ для некоторого натурального n, следовательно $(x-1)^{p^n} = 0$, или $x-1 = \alpha$, где α — нильпотентный элемент кольца L, откуда получаем $x = 1+\alpha$.

Из формулы (2) и из первой части утверждения вытекает $S^*(LG) = S(LG) \times \times L_p$, откуда следует (3) и остальная часть предложения.

Куликов ([2], стр. 144) доказал, что абелева p-группа G разлагается в прямое произведение циклических групп тогда и только тогда, когда она является объединением возрастающей последовательности

$$G_1 \subseteqq G_2 \subseteqq \ldots \subseteqq G_n \subseteqq \ldots \tag{4}$$

таких своих подгрупп, что высоты элементов каждой из подгрупп G_n в группе G конечны и ограниченны в совокупности.

Используя этот критерий, докажем следующее утверждение.

Предложение 3. *Пусть G — абелева p-группа и L-коммутативное кольцо с единицей характеристики p. Тогда p-подгруппа $S(LG)$ мультипликативной группы $M(LG)$ группового кольца LG разлагается в прямое произведение циклических групп тогда и только тогда, когда группа G разлагается в прямое произведение циклических групп.*

Доказательство. Необходимость. Группа G разлагается в прямое произведение циклических групп, так как она является подгруппой группы $S(LG)$.

Достаточность. Группу G можно представить как объединение возрастающей последовательности (4) подгрупп G_n с вышеуказанным свойством. Тогда группу $S(LG)$ можно представить как объединение возрастающей последовательности

$$S(LG_1) \subseteqq S(LG_2) \subseteqq \ \ldots \ \subseteqq S(LG_n) \subseteqq \ \ldots \tag{5}$$

Высоты элементов каждой подгруппы $S(LG_n)$ в группе $S(LG)$ ограничены в совокупности. Действительно, высота произвольного элемента $x = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i g_i \in \in S(LG_n)$, $\alpha_i \in L$, $g_i \in G_n$, не превосходит минимум высот элементов $g_1, g_2, \ldots, g_s$ группы G_n. Следовательно высоты элементов группы $S(LG_n)$ не превосходят точную верхнюю грань высот элементов подгруппы G_n в группе G.

Итак, группа $S(LG)$ разлагается в прямое произведение цикчических групп.

Лемма 1. *Если* $|S(LG)| = v$, *то* $\mu = 1 + \log_A v$.

Доказательство. Очевидно число v элементов $x = \alpha_1 g_1 + \ldots + \alpha_\mu g_\mu$ группы $S(LG)$, ввиду того, что $\sum_{i=1}^{\mu} \alpha_i = 1$, равняется $A^{\mu-1}$, откуда следует искомая формула.

Теорема 1. *Пусть L — конечное коммутативное кольцо с единицей характеристики p. Конечная абелева p-группа G с точностью до изоморфизма определяет группу $S(LG)$ и обратно.*

Доказательство. Так как кольцо L — линейное пространство над простым полем Π с характеристикой p, то каждый элемент кольца L имеет вид $\pi_1 a_1 + \ldots \ldots + \pi_l a_l$, где $\pi_i = 0, 1, 2, \ldots, p-1$. Следовательно, число элементов кольца L равняется p^l.

Вводим следующие обозначения:

$$|L|=\Lambda=p^l,\quad U=\{z\in L,\ z^p=0\},\quad |U|=p^u,$$
$$|G|=\mu=p^n,\quad N=N(G),\quad |N|=p^t,\quad |G/N|=p^s=\mu',$$
$$S=S(LG),\quad |S|=\nu=p^v,\quad \tilde{N}=N[S(LG)],\quad |\tilde{N}|=r=p^w.$$

Очевидно $|U|=p^u$, так как U — подгруппа адитивной группы L.

При доказательстве используется теорема 1, 2 статьи [1]. Пусть p^α — показатель группы G, следовательно и группы S. Каждой элемент $x\in S(LG)$, как элемент группового кольца LG, можно записать в виде

$$x=\sum_{j=1}^{p^s} b_j \sum_{a\in N}\alpha_{ja}a,$$

где $b_1=1, b_2, \ldots, b_{\mu'}$ — система представителей смежных классов группы G по подгруппе N, $\alpha_{ja}\in L$ и $\sum\limits_{j,a}\alpha_{ja}=1$.

Определим число различных элементов x, которые принадлежат группе $\tilde{N}$. Для этой цели принимаем, что α_{ja}, участвующие в выражении элемента x, являются неизвестными. Если $x\in\tilde{N}$, то

$$x^p=\sum_{j=1}^{p^s} b_j^p \sum_{a\in N}\alpha_{ja}^p=1. \tag{6}$$

Равенство $b_k^p=b_l^p$ (k и l различные натуральные числа) невозможно, так как тогда $(b_kb_l^{-1})^p=1$, или $b_k\in b_lN$, что является противоречием. Следовательно, из (6) получаем систему

$$(\sum_{a\in N}\alpha_{1a})^p=1,\quad (\sum_{a\in N}\alpha_{ja})^p=0,$$

или

$$(\sum_{a\in N}\alpha_{1a}-1)^p=0,\quad (\sum_{a\in N}\alpha_{ja})^p=0,\qquad j=2, 3, \ldots, p^s=\mu' \tag{7}$$

Мощность $|U|$ известна, так как U определяется инвариантным способом в кольце L. Если считаем, что $\alpha_{ja}(j=1, 2, \ldots, p^s; a\in N)$ — неизвестные, то уравнения (7) показывают, что элементы $\sum\limits_{a\in N}\alpha_{1a}-1$ и $\sum\limits_{a\in N}\alpha_{ja}$ $(j=2, 3, \ldots, p^s)$ могут быть произвольными элементами из U, если только они удовлетворяют условию $\sum\limits_{j,a}\alpha_{ja}=1$.

Из (7) получаем систему

$$\begin{aligned}
&\sum_{a\in N}\alpha_{1a}=1+\lambda_1\\
&\sum_{a\in N}\alpha_{2a}=\lambda_2\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\sum_{a\in N}\alpha_{\mu',a}=\lambda_{\mu'},
\end{aligned}\tag{8}$$

где $\lambda_i\in U$ $(i=1, 2, \ldots, \mu')$; следовательно $\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{\mu'}=0$.

Число решений каждого из уравнений (8) при фиксированных элементах $\lambda_i \in U$ равняется $\Lambda^{p^t-1} = p^{l(p^t-1)}$. Можем предполагать, что первые $\mu'-1$ элементы λ_i в (8) — произвольные элементы U, а последний элемент $\lambda_{\mu'}$ определяется однозначно. Следовательно система (5) имеет $p^{[u+l(p^t-1)](\mu'-1)} \cdot p^{l(p^t-1)}$ решений, откуда

$$r = p^w = p^{[u+l(p^t-)]p^s-u}. \tag{9}$$

1. При данном кольце L, группа G определяет однозначно порядок нижнего слоя $\tilde{N}$ группы S. Действительно, нам известны числа u и l, а также s и t. Тогда r можно найти по формуле (9).

2. При данном кольце L, группа $S(LG)$ определяет однозначно порядок нижнего слоя группы G. В самом деле, известны числа u, l, Λ, w, v, а надо определить t. Из (9) имеем $u+w = [u+l(p^t-1)]p^s$. Однако $p^s = \dfrac{\mu}{p^t}$, где по лемме 1 определяем $\mu = 1+\log_\Lambda v$, или

$$p^t = \frac{u-l}{u+w-l(1+\log_\Lambda v)}(1+\log_\Lambda v). \tag{10}$$

Учитывая 1., нетрудно показать, что группа G^{p^i}, т. е. группа G, определяет однозначно порядок нижнего слоя $\tilde{N}_i$ группы $S(L^{p^i}G^{p^i}) = S^{p^i}(LG)$, $i=0, 1, 2, \ldots, \alpha-1$.

Аналогично рассуждению 2., группа $S^{p^i}(LG) = S(L^{p^i}G^{p^i})$' т. е. группа $S(LG)$ определяет однозначно порядок нижнего слоя N_i группы $G^{p^i} (i=0, 1, 2, \ldots, \alpha-1)$.

Так как порядки нижних слоев N_i и $\tilde{N}_i$ $(i=0, 1, \ldots, \alpha-1)$ групп G и S определяют соответственно группы G и S с точностью до изоморфизма, то этим теорема доказана.

Для точного описания группы $S(LG)$ при заданных группе G и кольце L, а также для описания группы G при заданных кольце L и группе $S(LG)$, дополнительно вводим следующие обозначения:

$$|L^{p^i}| = \Lambda_i = p^{l_i} \quad U^{(i)} = \{z \in L^{p^i}, z^p = 0\} \quad |U^{(i)}| = p^{u_i}$$
$$|G^{p^i}| = \mu_i = p^{n_i} \quad N_i = N(G^{p^i}), \quad |N_i| = p^{t_i} \quad |G^{p^i}/N_i| = p^{s_i} = \mu_i'$$
$$|S(L^{p^i}G^{p^i})| = v_i = p^{\vartheta_i} \quad \tilde{N}_i = N[S(L^{p^i}G^{p^i})] \quad |\tilde{N}_i| = r_i = p^{w_i}$$
$$i = 0, 1, \ldots, \alpha; \quad \Lambda_0 = \Lambda, \quad l_0 = l, \quad u_0 = u, \quad \mu_0 = \mu$$
$$n_0 = n, \quad t_0 = t, \quad s_0 = s, \quad v_0 = v, \quad \vartheta_0 = \vartheta, \quad r_0 = r, \quad w_0 = w$$

Эти обозначения используем для формулировки следующего утверждения.

Следствие. *Если обозначим* $w_i = [u_i + l_i(p^{t_i}-1)]p^{s_i} - u_i$, $i = 0, 1, \ldots, \alpha$; $\delta_{i+1} = w_i - w_{i+1}$, $i=0, 1, \ldots, \alpha-1$, *то группа* G *и кольцо* L *определяют группу* $S(LG)$ *следующим образом:*

$$S(LG) \cong \prod_{i=1}^{\alpha} C_{\delta_i}^{i,i}. \tag{11}$$

И наоборот, если обозначим

$$p^{t_i} = \frac{u_i - l_i}{u_i + w_i - l_i(1 + \log_{A_i} v_i)}(1 + \log_{A_i} v_i), \qquad i = 0, 1, \dots, \alpha$$

$\varepsilon_{i+1} = t_i - t_{i-1} v$, $i = 0, 1, \dots, \alpha - 1$, *то кольцо* L *и группа* $S(LG)$ *определяют группу* G *следующим образом;*

$$G \cong \prod_{i=1}^{\alpha} C_{\varepsilon_i}^{i,i}. \tag{12}$$

Доказательство. Следуя теореме 1, получаем формулы, которые аналогичны формулам (9) и (10): (в них буквы w, u, l, t, s и μ занумерованы буквами i, $i = 0, 1, \dots, \alpha$) в которых w_i и t_i определены в зависимости от характеристик соответственно групп G и S, и разумеется, от характеристик кольца L.

Так как w_i и w_{i+1} — числа прямых множетелей в прямом разложении соотвественно групп $\tilde{N}_i$ и $\tilde{N}_{i+1}$ на циклические группы, то число прямых множителей порядка p^{i+1} в прямом разложении группы $S(LG)$ на циклические группы равняется числу δ_{i+1} и следовательно, имеет место формула (11); аналогично получается формула (12).

Определение 1. Пусть бесконечная абелева p-группа G разлагается в прямое произведение циклических групп таким способом, что в этом разложении мощность множества прямых множителей порядка p^n (n натуральное) — число τ_n. Говорят, что последовательнотсь

$$\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \dots, \tag{13}$$

образованная для группы G, — последовательность первого рода, если

1. в случае, когда порядки элементов группы G неограниченны в совокупности, то или

1.1. $\mu > \tau_n$ для каждого натурального n, или

1.2. $\mu = \tau_n$ для бесконечно многих индексов n, т. е. для каждого натурального i существует натуральное n, так что $n > i$ и $\mu = \tau_n$.

2. В случае, когда p^α показатель группы G, то $\mu = \tau_\alpha$.

В противном случае последовательность (13) будем называть последовательностью второго рода.

Ясно, что когда (13) — последовательность второго рода, она содержит обязательно и бесконечные кардинальные числа. В этом случае

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n = \max(\tau_1, \dots, \tau_n, \dots), \tag{14}$$

если порядки элементов группы G неограничены в совокупности, и

$$\mu = \sum_{n=1}^{\alpha} \tau_n = \max(\tau_1, \dots, \tau_\alpha) \tag{14'}$$

если p^α показатель группы G.

Лемма 2. *Если бесконечная абелева p-группа G — прямое произведение циклических групп и последовательность (13), образованная для нее — после-*

довательность первого года, то $|G^{p^i}|=\mu$, *где* $i=0, 1, \ldots, n, \ldots$, *если порядки элементов группы* G *неограничены в совокупности и* $i=0, 1, 2, \ldots, \alpha-1$, *если* p^α — *показатель группы* G.

Доказательство. Интересным является только случай, когда порядки элементов группы G — неограничены в совокупности. Последовательность (13), образованная для группы G^{p^i}, получается после отбрасывания первых i членов последовательности (13), образованной для группы G; ясно, что после их отбасывания остается последовательность первого рода с той же суммой μ.

Лемма 3. *Если бесконечная абелева p-группа* G — *прямое произведение циклических групп и последовательность (13) образованная для нее — последовательность второго рода, то существует конечная подпоследовательность последовательности (13), состоящая из бесконечных кардинальных чисел, а именно*

$$\tau_{\alpha_1}=\mu, \tau_{\alpha_2}, \ldots, \tau_{\alpha_s}, \tag{15}$$

где $\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_s$, *со следующими свойствами*

$$\begin{cases} \tau_{\alpha_1}>\tau_{\alpha_2}>\cdots>\tau_{\alpha_s} \\ \tau_{\alpha_1}=\max\limits_{1\leqq i}\tau_i \quad \text{и} \quad \tau_i<\tau_{\alpha_1}, \quad \text{если} \quad i>\alpha_1, \\ \tau_{\alpha_2}=\max\limits_{\alpha_1<i}\tau_i \quad \text{и} \quad \tau_i<\tau_{\alpha_2}, \quad \text{если} \quad i>\alpha_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \tau_{\alpha_s}=\max\limits_{\alpha_{s-1}<i}\tau_i \quad \text{и} \quad \tau_t<\tau_{\alpha_s}, \quad \text{если} \quad i>\alpha_s. \end{cases} \tag{15'}$$

При этом, если порядки элементов группы G *неограничены в совокупности, то последовательность* $\tau_{\alpha_s+1}, \tau_{\alpha_s+2}, \ldots$ — *последовательность первого рода, а если* p^α— *показатель группы* G, *то последовательность* $\tau_{\alpha_s+1}, \tau_{\alpha_s+2}, \ldots, \tau_\alpha$ *(при положении, что вообще существует) состоит из конечных кардинальных чисел.*

Для групп G^{p^r} *имеем* $|G^{p^r}|=\tau_{\alpha_i}$, $\alpha_{i-1}\leqq r\leqq\alpha_i-1$ $(i=1, 2, \ldots, s;\ \alpha_0=1)$, r — *натуральное и, кроме того, если порядки элементов группы* G *неограничены в совокупности, то* $|G^{p^r}|=\mu_{\alpha_s}$ *для* $\alpha_s\leqq r$, r — *натуральное число.*

Доказательство. Для доказательства первой части леммы используем утверждение: любая строго монотонно убывающая последовательность бесконечных кардинальных чисел обрывается на конечном месте.

Пусть порядки элементов группы G неограничены в совокупности. Очевидно, что существует кардинальное число τ_{α_1} с вышеуказанным свойством. Если последовательность $\tau_{\alpha_1+1}, \tau_{\alpha_2+2}, \ldots, \tau_{\alpha_1+n}, \ldots$ является последовательностью первого рода, то этим первая часть леммы доказана. Если же эта последовательность—второго рода, то существует кардинальное число τ_{α_2}, $\tau_{\alpha_2}<\tau_{\alpha_1}$, с вышеуказанным свойством. Если всегда при этом процессе выбора бесконечных кардинальных чисел τ_{α_i}, $i=1, 2, \ldots$ последовательность, состоящая из элементов, находящихся после τ_{α_i}, является последовательностью второго рода, то мы получим строго монотонно убывающую последовательность бесконечных кардинальных чисел, не обрывающуюся на конечном месте, что является противоречием. Следовательно, для некоторого натурального s, последовательность τ_{α_s+1}, $\tau_{\alpha_s+2}, \ldots$ будет последовательностью первого рода.

Случай, когда группа G имеет показатель p^α, не стоит рассматривать подробно, так как он почти тривиальный.

Вторая часть леммы следует из формул (14) и (14′), из леммы 2 и из первой части леммы.

Определение 2. Критическими числами абелевой p-группы G, которая разлагается в прямое произведение циклических групп называем

а) кардинальные числа $\tau_{\alpha_1}, \tau_{\alpha_2}, \ldots, \tau_{\alpha_s}$, определенные в формулировке леммы 3 для абелевой p-группы G с последовательностью (13) второго рода;

б) τ_α, если показатель группы G равняется p_α и $\mu = \tau_\alpha$.

Следующая лемма и следствие 1 хорошо известны.

Лемма 4. *Пусть существует „α" множеств M_λ, $\lambda \in A$ (α — кардинальное число) с соответствующими мощностями β_λ и F — множество всевозможных конечномерных векторов $(\gamma_{\lambda_1}, \ldots, \gamma_{\lambda_n})$, где $\gamma_{\lambda_i} \in M_{\lambda_i}$ (λ_i — произвольный индекс множества A и, кроме того $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$). Тогда, если по крайней мере одно из кардинальных чисел α и β_λ, $\lambda \in A$, является бесконечным, то множество F имеет мощность* $\sup(\alpha, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\lambda, \ldots)$, *где $\lambda \in A$.*

Следствие 1. *Пусть множество F имеет бесконечную мощность $\varkappa$. Если α — конечное кардинальное число, то существует по крайней мере один индекс $\lambda \in A$, так что $\beta_\lambda = \varkappa$, а если все β_λ — конечные кардинальные числа, то $\alpha = \varkappa$.*

Непосредственно из леммы 4 и из следствия 1 получается следующее утверждение.

Следствие 2. *Если по крайней мере одно из кардинальных чисел Λ и μ бесконечно, то* $|S(LG)| = \max(\Lambda, \mu)$, $(|G| = \mu$, $|L| = \Lambda)$ *и наоборот если* $|S(LG)| = \varkappa$, *то или $\Lambda = \varkappa$, или $\mu = \varkappa$.*

Если абелева p-группа G — прямое произведение циклических групп, то по предложению 2 группа $S(LG)$ также прямое произведение циклических групп. Этот факт используется при формулировке следующей леммы.

Лемма 5. *Пусть абелева p-группа G — прямое призведение циклических групп. Если $G^{p^k} \neq 1$ для некоторого k $(k = 0, 1, 2, \ldots,)$ и по крайней мере одно из кардинальных чисел $\mu_k = |G^{p^k}|$ и $\Lambda_k = |L^{p^k}|$ бесконечное, то число прямых множителей порядка p^{k+1} в прямом разложении группы $S(LG)$ на циклические группы равняется* $\max(\Lambda_k, \mu_k)$.

Доказательство. Обозначим $L^{p^k} = L^*$, $G^{p^k} = G^*$, $S(L^*G^*) = S^*$. Различаем следующие случаи.

1. $G^{*p} = 1$. Согласно следствию 2 леммы 4 получаем $|S^*| = \max(\Lambda_k, \mu_k)$. Так как группа S^* разлагается в прямое произведение циклических групп порядка p, то по следствию 1 леммы 4 вытекает, что число прямых множителей в этом разложении равняется $\max(\Lambda_k, \mu_k)$, т. е. число прямых множителей порядка p^{k+1} в прямом разложении группы $S(LG)$ на циклические группы равняется $\max(\Lambda_k, \mu_k)$.

2. $G^{*p} \neq 1$. Обозначим $N(S^{*p^i}) = \tilde{N}'_i$. Если

$$G^* = \prod_{\lambda \in A} (b_\lambda),$$

то с соответствующей пренумерацией можно предполагать, что (b_1) — прямой множитель в этом разложении порядка p^m, $m > 1$, т. е. $b_1^{p^{m-1}} \neq 1$.

2.1. Пусть $\mu_k \leqq \Lambda_k$. Образуем элементы

$$A_\beta = 1 + \beta b_1 - \beta b_1^{1+p^{m-1}} \quad (B \in L^*). \tag{16}$$

Так как $A_\beta \in S^*$ и $A_\beta^p = 1$, то $A_\beta \in \tilde{N}'_0$. При $\beta \neq \gamma$ $(\gamma \in L^*)$ элементы A_β и A_γ лежат в разных смежных классах по подгруппе $\tilde{N}'_1$. В противном случае

$$1 + \beta b_1 - \beta b_1^{1+p^{m-1}} = \left(1 + \gamma b_1 - \gamma b_1^{1+p^{m-1}}\right) \sum_{i_1, \ldots, i_s} \lambda_{i_1, \ldots, i_s} b_{i_1}^{p\delta_{i_1}} \ldots b_{i_s}^{p\delta_{i_s}}. \tag{17}$$

В правой части этого равентсва при умножении элементов суммы Σ с 1 получаются всегда степени элемента b_1, показатели которого кратны числу p, а при умножении этих элементов на γb_1 и $-\gamma b_1^{1+p^{m-1}}$, ввиду

$$1 + lp \not\equiv 0 \pmod p$$

и

$$1 + p^{m-1} + lp \not\equiv 0 \pmod p \quad \text{при} \quad m-1 \geqq 1,$$

(l — целое число), такие степени не появляются. Следовательно,

$$\sum_{i_1, \ldots, i_s} \lambda_{i_1, \ldots, i_s} b_{i_1}^{p\delta_{i_1}} \ldots b_{i_s}^{p\delta_{i_s}} = 1,$$

что ведет к противоречию с равенством (17), так как $\beta \neq \gamma$. Получаем $|\tilde{N}'_0/\tilde{N}'_1| \geqq \Lambda_k$; однако $|S^*| = \Lambda_k$, откуда $|\tilde{N}'_0/\tilde{N}'_1| = \Lambda_k$. Согласно следствию 1 леммы 4 получаем, что число прямых множителей порядка p^{k+1} в прямом разложении группы $S(LG)$ на циклические руппы равняется $\Lambda_k = \max(\Lambda_k, \mu_k)$.

2.2. Пусть $\Lambda_k < \mu_k$. Образуем элементы

$$A_s = 1 + b_s\left(b_1^{p^{m-1}} - 1\right), \tag{18}$$

где $s \in \Lambda$. Так как $A_s \in S^*$ и $A_s^p = 1$, то $A_s \in \tilde{N}'_0$. Покажем, что элементы A_i и A_j, $i, j \in A$, образованные по закону (18), при $i \neq j$, лежат в разных смежных классах группы $\tilde{N}'_0$ по подгруппе $\tilde{N}'_1$. Действительно, в противном случае

$$1 + b_i\left(b_1^{p^{m-1}} - 1\right) = \left[1 + b_j\left(b_1^{p^{m-1}} - 1\right)\right] \sum_{i_1, \ldots, i_s} \lambda_{i_1, \ldots, i_s} b_{i_1}^{p\beta_{i_1}} \ldots b_{i_s}^{p\beta_{i_s}},$$

$i_1, i_2, \ldots, i_s \in A$, откуда получаем, или

а) $$b_\iota = b_i^{p\beta} b_{l_1}^{p\beta_{l_1}} \ldots b_{l_s}^{p\beta_{l_s}},$$

или

б) $$b_i = b_i^{p\beta} b_j^{1+p\beta'} b_{l_1}^{p\beta_{l_1}} \ldots b_{l_s}^{p\beta_{l_s}},$$

или

в) $$b_i = b_i^{p^{m-1}+p\beta} b_j^{1+p\beta'} b_{l_1}^{p\beta_{l_1}} \ldots b_{l_s}^{p\beta_{l_s}},$$

что невозможно, так как $m-1 \geqq 1$. Дальше, аналогично случаю 2.1., заключаем, что число прямых множителей порядка p^{k+1} в прямом разложении группы $S(LG)$ на циклические группы равняется $\mu_k = \max(\Lambda_k, \mu_k)$.

Теорема А. *Пусть абелева p-группа G — прямое произведение*

$$G = \prod_{\lambda \in \Lambda} (a_\lambda) \tag{19}$$

циклических групп, при котором мощность множества прямых множителей порядка p^i равняется числу τ_i. Пусть L — коммутативное кольцо с единицей характеристики p. Тогда группа $S = S(LG)$ разлагается в прямое произведение циклических групп, причем различаем следующие случаи.

1. Группа G — конечная и L — конечное кольцо. Тогда описание группы $S(LG)$ дано в следствии теоремы **1**.

2. Группа G — конечная с показателем p^α и L — бесконечное кольцо. Тогда

2.1. если $\Lambda_{\alpha-1}$ — бесконечное кардинальное число, то

$$S \cong \prod_{i=1}^{\alpha} C^{i,i}_{\Lambda_{i-1}};$$

2.2. Если Λ_{s-1} бесконечное число, а Λ_s конечное, $1 \leqq s \leqq \alpha-1$ и конечная группа $S(L^{p^s}G^{p^s}) \cong \prod_{i=1}^{\alpha-s} C^{i,i}_{\delta_i}$, то

$$S \cong \prod_{i=1}^{s} C^{i,i}_{\Lambda_{i-1}} \times \prod_{i=s+1}^{\alpha} C^{i,i}_{\delta_{i-s}}.$$

3. Группа G — бесконечная с показателем p^α и L — конечное кольцо. Пусть $\tau_{\alpha_1}, \ldots, \tau_{\alpha_s}$ — критические числа группы G. Тогда

$$S \cong C^{1,\alpha_1}_{\tau_{\alpha_1}} \times \ldots \times C^{\alpha_{s-1}+1,\alpha_s}_{\tau_{\alpha_s}} \times B,$$

где группа B характеризуется тем же самым способом, как множитель $\prod_{i=s+1}^{\alpha} C^{i,i}_{\delta_{i-s}}$ в случае 2. 2. (эвентуално $B=1$), причем s заменяем числом α_s.

4. Порядки элементов группы G неограничены в совокупности и L — конечное кольцо. Тогда

4.1. если последовательность (13) группы G — последовательность первого рода, то

$$S \cong C^1_\mu;$$

4.2. Если последовательность (13) группы G — последовательность второго рода с критическими числами $\tau_{\alpha_1}, \ldots, \tau_{\alpha_s}$, то

$$S \cong C^{1,\alpha_1}_{\tau_{\alpha_1}} \times \ldots \times C^{\alpha_{s-1}+1,\alpha_s}_{\tau_{\alpha_s}} \times C^{\alpha_s+1}_{\mu_{\alpha_s}}.$$

5. Группа G — бесконечная с показателем p^α и L — бесконечное кольцо. Пусть $\tau_{\alpha_1}, \ldots, \tau_{\alpha_s}$ — критические числа группы G. Тогда

$$S \cong \left(\prod_{i=1}^{s} B_i\right) \times S'.$$

Группы $B_i (i=1, 2, \dots, s)$ *описываются следующим образом. Обозначим* $\max(\tau_{\alpha_i}, \Lambda_k)=\omega_{i,k}$, $i=1, \dots, s$; $k=0, 1, \dots, \alpha_s-1$; $\alpha_0=0$. *Тогда*

$$B_i \cong C^{\alpha_{i-1}+1, \alpha_{i-1}+1}_{\omega_i, \alpha_{i-1}} \times \dots \times C^{\alpha_i, \alpha_i}_{\omega_i, \alpha_i-1}. \tag{20}$$

Группа S' *характеризуется следующим образом.* $S'=1$, *если последовательность (13) группы* G — *последовательность первого рода (тогда* $s=1$, $\tau_{\alpha_1}=\mu$). *Пусть последовательность (13) группы* G — *последовательность второго рода. Тогда*

а) если $\Lambda_{\alpha-1}$ — *бесконечное кардинальное число, то*

$$S' \cong C^{\alpha_s+1, \alpha_s+1}_{\Lambda_{\alpha_s}} \times \dots \times C^{\alpha, \alpha}_{\Lambda_{\alpha-1}};$$

б) если Λ_{k-1} $(\alpha_s \leqq k-1 < \alpha-1)$ — *бесконечное, а* Λ_k — *конечное и конечная группа* $S(L^{p^k} G^{p^k}) \cong \prod_{i=1}^{\alpha-k} C^{i,i}_{\delta_i}$, *то*

$$S' \cong C^{\alpha_s+1, \alpha_s+1}_{\Lambda_{\alpha_s}} \times \dots \times C^{k,k}_{\Lambda_{k-1}} \times \prod_{i=k+1}^{\alpha} C^{i,i}_{\delta_{i-k}};$$

в) если Λ_{α_s} — *конечное и конечная группа* $S(L^{p^{\alpha_s}} G^{p^{\alpha_s}}) \cong \prod_{i=1}^{\alpha-\alpha_s} C^{i,i}_{\delta_i}$, *то*

$$S' \cong \prod_{i=\alpha_s+1}^{\alpha} C^{i,i}_{\delta_{i-\alpha_s}}.$$

6. Порядки элементов группы G — *неограничены в совокупности и* L — *бесконечное кольцо. Тогда*

6.1. если последовательность (13) группы G — *последовательность первого рода, и* $\max(\Lambda_i, \mu)=\omega_i$, $i=0, 1, 2, \dots$; *то*

$$S \cong \prod_{i=1}^{\infty} C^{i,i}_{\omega_{i-1}};$$

6.2. если последовательность (13) группы G — *последовательность второго рода с критическими числами* $\tau_{\alpha_1}, \tau_{\alpha_2}, \dots, \tau_{\alpha_s}$, *то*

$$S \cong \left(\prod_{i=1}^{s} B_i\right) \times S',$$

где описание групп B_i — *как в случае 5. дается формулой (20).*

Группа S' *характеризуется следующим способом. Обозначим* $\varepsilon_i=\max(\mu_{\alpha_s}, \Lambda_i)$, $i=\alpha_s, \alpha_s+1, \dots$. *Тогда*

$$S' \cong \prod_{i=\alpha_s+1}^{\infty} C^{i,i}_{\varepsilon_{i-1}}.$$

Доказательство. Теорема следует из предложения 3, лемм 2, 3 и 5.

Из теоремы А получаем:

Теорема А*. *Пусть абелева p-группа G — прямое произведение*

$$G = \prod_{\lambda \in A} (A_\lambda) \tag{21}$$

циклических групп, при котором мощность множества прямых множителей порядка p^i равняется числу τ_i, а L — поле характеристики p.

Тогда группа $S = S(LG)$ разлагается в прямое произведение циклических групп, причем

1. если Λ и μ — конечные кардинальные числа, то описание группы $S(LG)$ дано в следствие теоремы 1.

Предположим, что по крайней мере одно из кардинальных чисел Λ и μ — бесконечное. Тогда

2. если $\mu \leqq \Lambda$ и

2.1. порядки элементов группы G неограничены в совокупности, то

$$S(LG) \cong C^1_\Lambda;$$

2.2. если показатель группы G равняется числу p^α, то

$$S(LG) \cong C^{1,\alpha}_\Lambda.$$

3. Если $\Lambda < \mu$ и

3.1. последовательность (13) группы G — последовательность первого рода, то

$$S \cong C^1_\mu, \quad \text{или} \quad S \cong C^{1,\alpha}_\mu$$

в зависимости от того, являются ли порядки элементов группы G неограниченными в совокупности, или показатель этой группы равняется числу p^α;

3.2. если последовательность (13) группы G — последовательность второго рода с критическими числами $\tau_{\alpha_1}, \tau_{\alpha_2}, \ldots, \tau_{\alpha_s}$ и

3.2.1. если L — конечное поле, то

$$S \cong C^{1,\alpha_1}_{\tau_{\alpha_1}} \times \ldots \times C^{\alpha_{s-1}+1,\alpha_s}_{\tau_{\alpha_s}} \times B,$$

где для группы B имеем следующее:

а) если порядки элементов группы G неограничены в совокупности, то

$$B \cong C^{\alpha_s+1}_{\mu_{\alpha_s}};$$

б) если показатель группы G равняется числу p^α и конечная группа $S(L^{p^{\alpha_s}} G^{p^{\alpha_s}}) \cong \prod_{i=1}^{\alpha-\alpha_s} C^{i,i}_{\delta_i}$, то

$$B \cong \prod_{i=\alpha_s+1}^{\alpha} C^{i,i}_{\delta_{i-\alpha_s}};$$

3.2.2. если L — бесконечное поле и

3.2.2.1. $\tau_{\alpha_s} > \Lambda$, то

$$S \cong C^{1,\alpha_1}_{\tau_{\alpha_1}} \times \ldots \times C^{\alpha_{s-1}+1,\alpha_s}_{\tau_\alpha} \times B,$$

где группа B характеризуется следующим образом:

а) если порядки элементов группы G *неограничены в совокупности, и* $\omega = \max(\Lambda, \mu_{\alpha_s})$, *то*

$$B \cong C_{\omega}^{\alpha_s+1};$$

б) если показатель группы G *равняется* p^{α}, *то*

$$B \cong C_{\Lambda}^{\alpha_s+1,\alpha};$$

3.2.2.2. Если $\tau_{\alpha_r} > \Lambda$, $1 \leqq r < s$ *(*r *— натуральное число), а* $\tau_{\alpha_{r+1}} \leqq \Lambda$, *то*

$$S \cong C_{\tau_{\alpha_1}}^{1,\alpha_1} \times \ldots \times C_{\tau_{\alpha_r}}^{\alpha_{r-1}+1,\alpha_r} \times B,$$

где $B \cong C_{\Lambda}^{\alpha_r+1}$, *если порядки элементов группы* G *неограничены в совокупности, и* $B \cong C_{\Lambda}^{\alpha_r+1,\alpha}$, *если показатель группы* G *равняется* p^{α}.

Автор выражает глубокую благодарность проф. С. Д. Берману за руководство настоящей работой.

Литература

[1] С. Д. Берман, Групповые алгебры счетных абелевых p-групп. *Publ. Math., Debrecen*, **14**, (1967) 365-405.
[2] А. Г. Курош, Теория групп, Москва, 1967.

(Поступило 25. III. 1969.)