Über die Eigenwerte von Matrizen

Von JAN AMBROSIEWICZ (Białystok)

Die vorliegende Arbeit besteht aus zwei Teilen. Im ersten Teil führe ich eine neue Definition für Matrizen ein und berechne ihre Determinante. Im folgenden beweise ich, dass die Determinante in einigen Fällen die gleiche Rolle wie die Resultante spielt. Im zweiten Teil beweise ich mit Hilfe der neuen Matrixdefinition einige Sätze, die den Eigenwert der Matrix betreffen.

I.

Wir betrachten die folgenderweise definierte Matrix.

Definition 1. Das Element r_{ij} $(i, j=1, 2, \ldots, n)$ ist ein algebraisches Komplement, das dem an der Stelle (i, j) der Matrix $f(A)g(B)-k_i E$ stehenden Element entspricht, wenn $f(x)$ und $g(y)$ beliebige Polynome, $k_i=f(x_i)g(y_i)$ sind, und x_i, y_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ die Eigenwerte der entsprechenden kommutativen Matrizen A bzw. B bedeuten.

Für diese Matrix führen wir das folgende Symbol ein:

$$R=\overline{f(A)g(B)-k_i E}. \tag{1}$$

Wir beweisen folgenden

Satz 1. *Sind $f(x)$, $g(y)$ beliebige Polynome und A und B kommutative Matrizen einfacher Struktur* (s. [1] S. 69), *so gilt*

$$\operatorname{Det} R = W\cdot \prod_{i=1}^{n} P_{ii}(\operatorname{Det} T)^{n-1},$$

wo

$$W=(-1)^{\frac{n}{2}(n-1)}[f(x_1)g(y_1)-f(x_2)g(y_2)]^2 \cdots [f(x_{n-1})g(y_{n-1})-f(x_n)g(y_n)],^2$$

x_i, y_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ Eigenwerte der entsprechenden Matrizen A und B sind; T bezeichnet eine Fundamentalmatrix der Matrix A (s. [1] S. 69) *und P_{ii} die Hauptunterdeterminante, die durch das Streichen der i-ten Zeile und der i-ten Spalte in der Matrix T^{-1} entsteht.*

Beweis. Nach der Voraussetzung sind A und B solche Matrizen, für welche eine reguläre Matrix existiert und TAT^{-1} und TBT^{-1} gleichzeitig Diagonalmatrizen sind, also

$$(2) \qquad TAT^{-1} = \mathrm{diag}\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \textit{und} \quad TBT^{-1} = \mathrm{diag}\,(y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Wir erhalten sofort aus (2) für die beliebigen Polynome $f(x)$ und $g(y)$

$$(3) \qquad \begin{aligned} Tf(A)T^{-1} &= \mathrm{diag}\big(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\big) = D_1, \\ Tg(B)T^{-1} &= \mathrm{diag}\big(g(y_1), g(y_2), \ldots, g(y_n)\big) = D_2. \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$f(A)g(B) = T^{-1} D_1 D_2 T.$$

Es gilt ebenfalls

$$f(A)g(B) - k_i E = T^{-1} D_1 D_2 T - k_i E,$$

oder

$$(4) \qquad f(A)g(B) - k_i E = T^{-1}(D_1 D_2 - k_i E)T,$$

wo k_i ein beliebiger Parameter ist. Aus (4) folgt, dass die Matrizen

$$(5) \qquad R = \overline{f(A)g(B) - k_i E},$$

und

$$(6) \qquad T^{-1}(D_1 D_2 - k_i E)T$$

gleich sind.

Betrachten wir die Matrix (6). Jedes Element der i-ten Zeile der Matrix (5) und demnach auch (6) besteht aus Minoren vom Grad $(n-1)$. Aus dem Satz von Binet—Cauchy (s. [1] S. 8) folgt eine Formel für jedes Element der i-ten Zeile der Matrix (6).

$$(7) \qquad \sum_{\substack{\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_p \\ \beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_p}} T^{-1} \begin{pmatrix} i_1 i_2 \ldots i_p \\ \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p \end{pmatrix} (D_1 D_2 - k_i E) \begin{pmatrix} \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p \\ \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_p \end{pmatrix} T \begin{pmatrix} \beta_1 \beta_2 \ldots B_p \\ j_1 j_2 \ldots j_p \end{pmatrix}.$$

Die Minoren des Grades $(n-1)$ der Matrix $D_1 D_2 - k_i E$ sind alle gleich Null, ausser dem Minor, der aus dieser Matrix durch das Streichen der i-ten Zeile und der i-ten Spalte entsteht. Diesen Minor bezeichnen wir mit L_{ii}. Demnach reduziert sich die Summe (7) auf den Ausdruck $P_{ii} L_{ii} T_{ij}$, wo T_{ij} das algebraische Komplement der Matrix T darstellt, das dem Element t_{ij} entspricht, und P_{ii} ist die Hauptunterdeterminante von T^{-1}, die durch das Streichen der i-ten Zeile und i-ten Spalte entsteht. So erhalten wir für die Matrizen (5) und (6) die Form:

$$(8) \qquad R = \overline{f(A)g(B) - k_i E} = (P_{ii} L_{ii} T_{ij}) \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Aus (8) bekommen wir jetzt

$$(9) \qquad \mathrm{Det}\, R = \prod_{i=1}^{n} P_{ii} \prod_{i=1}^{n} L_{ii}\, \mathrm{Det}\,(T^D),$$

wo T^D die adjungierte Matrix bezeichnet.

Wir können leicht einsehen, daß die Gleichheit

$$W = \prod_{i=1}^{n} L_{ii} = \tag{10}$$

$$= \operatorname{Det}\begin{bmatrix} f(x_2)g(y_2)-f(x_1)g(y_1) & & \\ & \vdots & \\ & & f(x_n)g(y_n)-f(x_1)g(y_1)\end{bmatrix} \dots \operatorname{Det}\begin{bmatrix} f(x_1)g(y_1)-f(x_n)g(y_n) & & \\ & \vdots & \\ & & f(x_{n-1})g(y_{n-1})-f(x_n)g(y_n)\end{bmatrix} =$$

$$= (-1)^{\frac{n}{2}(n-1)}[f(x_2)g(y_2)-f(x_1)g(y_1)]^2 \dots [f(x_{n-1})g(y_{n-1})-f(x_n)g(y_n)]^2$$

gilt.

Da $\operatorname{Det}(T^D) = (\operatorname{Det} T)^{n-1}$ (s. [2] S. 362), erhalten wir aus (9) und (10)

$$\operatorname{Det} R = \operatorname{Det}\overline{f(A)g(B)-k_iE} = \prod_{i=1}^{n} P_{ii}\cdot W\cdot(\operatorname{Det} T)^{n-1}, \tag{11}$$

was zu beweisen war.

Jedes Element der Hauptunterdeterminante P_{ii} ist durch Det T dividiert. Wenn wir mit K_{ii} die Hauptunterdeterminante der Matrix $(T^D)^T$ bezeichnen, erhalten wir

$$\prod_{i=1}^{n} P_{ii} = \prod_{i=1}^{n} K_{ii}(\operatorname{Det} T)^{-n(n-1)}. \tag{12}$$

Setzen wir (12) in (11) ein, so erhalten wir eine neue Formel:

$$\operatorname{Det} R = W\cdot \prod_{i=1}^{n} K_{ii}(\operatorname{Det} T)^{-(n-1)^2}. \tag{13}$$

Folgerung 1. Ist A eine Matrix einfacher Struktur und $f(x)$ ein beliebiges Polynom, so gilt

$$\operatorname{Det}\left(\overline{f(A)-k_iE}\right) = W_1 \prod_{i=1}^{n} K_{ii}(\operatorname{Det} T)^{-(n-1)^2},$$

wo

$$W_1 = (-1)^{\frac{n}{2}(n-1)}[f(x_1)-f(x_2)]^2 \dots [f(x_{n-1})-f(x_n)]^2. \tag{14}$$

Tatsächlich brauchen wir im Satz (1) nur anzunehmen, dass $g(y)=1$, $B=E$ ist.

Um die kommutativen Matrizen A und B, die eine einfache Struktur besitzen, in die Diagonalform umzuformen, kann eine solche Matrix F benutzt werden, mit $F^{-1}AF = \operatorname{diag}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ und $F^{-1}BF = \operatorname{diag}(y_1, y_2, \dots, y_n)$, wobei die Ordung der Eigenwerte die gleiche bleibt, wie bei (2). Dann erhalten wir aus (9)

$$\operatorname{Det} R = \operatorname{Det}\overline{f(A)g(B)-k_iE} = W\prod_{i=1}^{n} N_{ii}(\operatorname{Det} F)^{-(n-1)} = W\cdot N(\operatorname{Det} F)^{-(n-1)}, \tag{15}$$

wo $N = \prod_{i=1}^{n} N_{ii}$ das Produkt der Hauptunterdeterminanten bezeichnet, die aus der Matrix F durch das Streichen der i-ten Zeile und i-ten Spalte $(i=1, 2, \dots, n)$ entstanden sind. Die weiteren Bezeichnungen sind die gleichen, wie im Satz (1).

Setzen wir in (15) $g(y)=1$ und $B=E$, so erhalten wir

$$\text{Det}\,\overline{f(A)-k_i E} = W_1 (\text{Det}\,F)^{-(n-1)} \cdot \prod_{i=1}^{n} N_{ii}. \tag{16}$$

Nun ergibt sich die aus Formel (15)

Folgerung 2. Sind einige Eigenwerte der entsprechenden kommutativen Matrizen A und B gleich, d.h. $x_k=x_p$ und $y_k=y_p$, so ist

$$\text{Det}\,\overline{(f(A)g(B)-k_i E)} = 0.$$

Aus den Formeln (11) und (16) erhalten wir

$$N \cdot W \cdot (\text{Det}\,F)^{1-n} = P \cdot W (\text{Det}\,T)^{n-1}, \tag{17}$$

wo N und P die entspechenden Produkte der Hauptunterdeterminanten der Matrizen F und T^{-1} bezeichnen. Unter der Voraussetzung, dass $W \neq 0$, erhalten wir

$$N = [(\text{Det}\,F) \cdot (\text{Det}\,T)]^{n-1} \cdot P. \tag{18}$$

Folgerung 3. Sind die Wurzeln des Polynoms $f(x) = x^n - x^{n-1} - \cdots - a_n$ paarweise verschieden, so ist Det $\overline{(C-k_i E)} \neq 0$ und die Determinante hängt nur von den Wurzeln des Polynoms *ab*, wobei C die Begleitmatrix von $f(x)$ ist.

Tatsächlich, wie bekannt (s. [3] S. 253), gilt

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & & & \\ & x_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}^{-1}.$$

Also, die 3. Folgerung folgt aus (17), wenn wir annehmen, dass $f(x)=x$, $A=C$.

Wenn wir in (15) annehmen, dass $f(x)=x$, $g(y)=1$, erhalten wir

$$\text{Det}\,\overline{(A-k_i E)} = W \cdot N \cdot (\text{Det}\,F)^{1-n}. \tag{19}$$

Bezeichnen wir mit f das charakteristische Polynom der Matrix A, und mit f' die Ableitung dieses Polynoms, so drückt sich die Resultante $R(f,f')$ durch folgende Formel aus

$$R(f,f') = a_0 W, \qquad a_0 = 1. \tag{20}$$

Aus (19) und (20) erhalten wir

$$\text{Det}\,\overline{(A-k_i E)} = N R(f,f') (\text{Det}\,F)^{1-n}. \tag{21}$$

II.

Wir beweisen jetzt einige Sätze, die die Struktur der Fundamentalmatrix betreffen.

Es sei $T^{-1}=F$ gegeben, so nimmt (8) folgende Form an:

$$R = \overline{f(A)g(B)-k_i E} = \overline{F(D_1 D_2 - k_i E) F^{-1}} = (N_{ii} L_{ii} F_{ij}^{-1}) \quad i,j = 1,2,\dots,n. \tag{22}$$

Satz 2. *Sind A und B kommutative Matrizen einfacher Struktur und sind k der entsprechenden Eigenwerte gleich, d.h. $x_i = x_{i+j}$ und $y_i = y_{i+j}$ $(j = 1, 2, \ldots, k-1)$, so hat die Matrix (22) mindestens k Zeilen, die aus lauter Nullen bestehen.*

Beweis. Aus der Voraussetzung folgt:

$$f(x_i) = f(x_{i+j}) \quad \text{und} \quad g(y_i) = g(y_{i+j}) \qquad (j = 1, 2, \ldots, k-1).$$

Demnach

$$L_{i+j,i+j} = \mathrm{Det} \begin{bmatrix} f(x_1)g(y_1) - f(x_{i+j})g(y_{i+j}) & & \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ & f(x_{i+j-1})g(y_{i+j-1}) - f(x_{i+j})g(y_{i+j}) & \\ & & f(x_{i+j+1})g(y_{i+j+1}) - f(x_{i+j})g(y_{i+j}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ & & f(x_n)g(y_n) - f(x_{i+j})g(y_{i+j}) \end{bmatrix} = 0,$$

was zu beweisen war.

Satz 3. *Sind die kommutativen Matrizen A und B einfacher Struktur und hat die Fundamentalmatrix F k Hauptunterdeterminanten $N_{i+1,i+1}, \ldots, N_{i+k,i+k}$, die gleich Null sind, so hat die Matrix (22) mindestens k Zeilen, die aus lauter Nullen bestehen.*

Der Beweis dieses Satzes folgt daraus, dass in k Zeilen der Matrix (22) in jedem Element der Faktor Null vorkommt.

Aus den Sätzen (2) und (3) und der Formel (22) folgt:

Folgerung 4. Ist A eine Matrix einfacher Struktur und hat A eine k-fache Wurzel, so hat die Matrix $\overline{A - k_i E}$ mindestens k Zeilen, die aus lauter Nullen bestehen.

Folgerung 5. Ist A eine Matrix einfacher Struktur, und hat die Fundamentalmatrix Fk Hauptunterdeterminanten $N_{i+1,i+1}, \ldots, N_{i+k,i+k}$, die gleich Null sind, so hat die Matrix $\overline{A - k_i E}$ mindestens k Zeilen, die aus lauter Nullen bestehen.

Weil die i-te Zeile der Matrix $\overline{A - k_i E}$ aus Unterdeterminanten der i-ten Zeile der Matrix $A - xE$ besteht, wenn wir in der letzten Matrix annehmen, dass $x = x_i$, so erhalten wir aus den Folgerungen (1) und (2):

Folgerung 6. Ist A eine Matrix einfacher Struktur, und hat A einen k-fachen Eigenwert x_0, so existieren k Zeilen in der Matrix $A - xE$, all deren Unterdeterminanten die gleiche gemeinsame Wurzel x_0 haben.

Folgerung 7. Ist A eine Matrix einfacher Struktur und hat die Fundamentalmatrix Fk Hauptunterdeterminanten $N_{i+1,i+1}, \ldots, N_{i+k,i+k}$, die gleich Null sind, so bestehen k Zeilen in der Matrix $A - xE$, von denen jede Unterdeterminanten besitzt und deren gemeinsame Wurzel einer der Eigenwerte der Matrix ist.

Unter dem Begriff der Unterdeterminante einer Zeile verstehen wir die algebraischen Komplemente aller Elemente dieser Zeile.

Satz 4. *Ist A eine Matrix einfacher Struktur, $x_i \neq x_j$ für $j \neq i$, und besitzt die Fundamentalmatrix F bei einer gewissen Permutation der Spalten k Hauptunter-*

determinanten, die gleich Null sind, so bestehen genau k Zeilen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ *der Matrix* $A-xE$, *deren Unterdeterminanten als Wurzeln entsprechende Eigenwerte* $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_k}$ *der Matrix A haben.*

BEWEIS. Aus (22) haben wir

$$R = \overline{A-x_i E} = (N_{ii} L_{ii} F_{ij}^{-1}) \qquad i,j = 1, 2, \ldots, n. \tag{23}$$

Nach der Voraussetzung sind die L_{ii} $(i=1, 2, \ldots, n)$ verschieden von Null. Jede Zeile der Matrix $(F^{-1})^D$ ist ebenfalls verschieden von Null, weil die Matrix F nach der Voraussetzung regulär ist. Wenn also $N_{\alpha_i \alpha_i}=0$ $(i=1, 2, \ldots, k)$, so hat die Matrix (23) k Zeilen gleich Null. Dies bedeutet, mit Rücksicht auf die Bezeichnung der Matrix R, dass die Matrix $A-xE$ k Zeilen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ hat, deren Unterdeterminanten für $x=x_{\alpha_i}$ $(i=1, 2, \ldots, k)$ gleich Null sind. Die übrigen Unterdeterminanten der Zaile α_i haben als gemeinsame Wurzel die Zahl x_{α_i}.

Satz 5. *Ist die Matrix A eine Matrix einfacher Struktur, und hat die Fundamentalmatrix F auf der Hauptdiagonale k* $(k=1, 2, \ldots, n)$ *Nullen, die in den Zeilen* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ $\ldots, \alpha_k$ *lokalisiert sind, so bestehen in der Matrix* $A-xE$ *k Spalten* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, *deren Unterdeterminanten als Wurzeln entsprechende Eigenwerte* $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_k}$ *der Matrix A haben.*

BEWEIS. Auf Grund der Voraussetzung ist F eine reguläre Matrix n-ten Grades und hat k Nullen auf der Hauptdiagonale. Wir betrachten den Fall, dass die Nullen in den ersten k Zeilen liegen. Die Matrix F^{-1} hat dann k Hauptunterdeterminanten gleich Null, d.h. $J_{jj}=0$ $(j=1, 2, \ldots, k)$, die durch das Streichen der j-ten Zeile und der j-ten Spalte entstehen. Das folgt aus der Definition dieser Matrix. Weiter bilden wir eine zu R analoge Matrix.

Definition 2. Das Element r_{ij} $(i, j=1, 2, \ldots, n)$ ist ein algebraisches Komplement, das dem an der Stelle (i, j) der Matrix $f(A)g(B)-k_j E$ stehenden Element entspricht, wenn $k_j=f(x)g(y)$ für $j=1, 2, \ldots, n$; $f(x)$, $g(y)$ beliebige Polynome und x_j und y_j für die kommutativen Matrizen A und B entsprechende Eigenwerte sind. Diese Matrix bezeichnen wir durch $\bar{R}$. Die Rolle der Zeilen der Matrix R^T spielen hier die Spalten. Es ist aber keine transponierte Matrix R. Wenn wir die gleiche Überlegung, wie für die Matrix R, weiterführen und den Satz von Binet—Cauchy für die Determinante der Spalten der Matrix $\bar{R}$ anwenden, erhalten wir die Form

$$\bar{R}=(J_{jj} D_{jj} F_{ij}) \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n, \tag{24}$$

wo J_{jj} durch das Streichen der j-ten Spalte und der j-ten Zeile in der Matrix $(F^{-1})^T$ entsteht. D_{jj} ist gleich L_{jj}.

Die Matrix (F_{ij}) ist eine zu F^T adjungierte Matrix. Wie gezeigt wurde, folgt aus der Tatsache, dass in der Matrix Fk Nullen stehen, dass die Matrix $(F^{-1})^T k$ Hauptunterdeterminanten, die gleich Null sind, hat. Demnach erhalten wir aus (24), dass die Matrix $\bar{R}k$ erste Spalten gleich Null hat, was den Satz in dem Falle beweist, wenn die Nullen auf der Hauptdiagonale in den ersten Zeilen lokalisiert sind. Im Falle, wenn die Nullen in nicht aufeinanderfolgenden Zeilen liegen, ist der Beweis der gleiche.

Satz 6. *Ist A eine Matrix einfacher Struktur und hat die Fundamentalmatrix F in k ($k=1, 2, \ldots, n$) Zeilen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ wenigstens je eine Null, wobei die Nullen nicht in einer Spalte liegen, so bestehen in der Matrix $A-xE$ k Spalten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ deren Unterdeterminanten als Wurzeln entsprechende Eigenwerte $x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \ldots, x_{\beta_k}$ der Matrix A haben.*

BEWEIS. Das Vertauschen der Spalten in der Matrix F hat ein entsprechendes Vertauschen der Eigenwerte in der Matrix $F^{-1}AF=\operatorname{diag}(x_1, \ldots, x_n)$ zur Folge. Wir vertauschen also die Spalten in der Matrix F so, dass die Nullen sich auf der Hauptdiagonale befinden. Dieses determiniert uns die Anordnung $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$. Der weitere Beweis des Satzes (6) folgt aus dem Satz (5).

Als Anwendung des Satzes betrachten wir eine doppelt symmetrische Matrix. Die Umformung

$$(25) \qquad T=\begin{bmatrix} E & 0 & J \\ 0 & 1 & 0 \\ J & 0 & -E \end{bmatrix}, \qquad J=\begin{pmatrix} 0 \ldots & & 1 \\ 0 \ldots & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 \ldots & & 0 \end{pmatrix}$$

formt die doppelt symmetrische Matrix A ungleichen Grades in die Form

$$(23) \qquad M=T^{-1}AT=\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

wo B und C entsprechend den Grad $\frac{n+1}{2}$ und $\frac{n-1}{2}$ haben. Die Matrix A ist eine symmetrische Matrix. Sie ist also einer Diagonalmatrix ähnlich. Demnach also ist die Matrix M auch einer Diagonalmatrix ähnlich. Es existiert also eine solche Umformung $V=\operatorname{diag}(V_1, V_2)$, mit

$$(27) \qquad V^{-1}MV=\operatorname{diag}(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Indem wir (26) und (27) beachten, haben wir

$$(28) \qquad (TV)^{-1}A(TV)=\operatorname{diag}(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Es sei

$$V=\begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} & 0 \\ V_{21} & c & 0 \\ 0 & 0 & V_{33} \end{pmatrix},$$

dann stellen wir leicht fest, dass in der Zeile mit dem Index $i=\frac{n+1}{2}$ der Matrix $U=TV$ die letzten $\frac{n-1}{2}$ Elemente gleich Null sind. Nach dem Satz 6 haben die Unterdeterminanten der Spalte mit dem Index $j=\frac{n+1}{2}$ der Matrix $A-xE$ als Wurzeln die Eigenwerte $X_{n+1/2}$ der Matrix A. Für Berechnung dieser Wurzeln wird durch eine Gleichung des Grades $(n-2)$ gelöst.

Aus (8) und (24) erhalten wir

Satz 7. *Ist A eine Matrix einfacher Struktur und hat sie eine vielfache Wurzel x_0, so hat jede der Unterdeterminanten des Grades $(n-1)$ der Matrix $A-xE$ eine Wurzel x_0.*

Aus dem Beweis der Satze (5) und (6) folgt, dass diese Sätze wahr bleiben, wenn wir die Matrix A durch die Matrix $f(A)g(B)$ ersetzen, wo die Matrizen A und B kommutativ sind und eine einfache Struktur besitzen, und $f(x)$ sowie $g(y)$ beliebige Polynome sind. Das berücksichtigend, kommen wir zu folgendem

Satz 8. *Sind die kommutativen Matrizen A und B einfacher Struktur und hat die Fundamental matrix F in k Zeilen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ wenigstens je eine Null, wobei diese Nullen nicht in einer Spalte liegen, so bestehen k Spalten $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ in der Matrix $A-xE$ und $B-yE$; deren entsprechenden Eigenwerte*

$$x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \ldots, x_{\beta_k},$$

$$y_{\beta_1}, y_{\beta_2}, \ldots, y_{\beta_k},$$

die Wurzeln von Gleichungen höchstens $(n-2)$. — Grades sind.

Literatur

[1] F. R. GANTMACHER, Matrizenrechnung I, *Berlin* 1958.
[2] A. MOSTOWSKI—M. STARK, Elementy algebry wyższej, *Warszawa* 1965 (polnisch).
[3] A. MOSTOWSKI—M. STARK, Algebra wyższa, cz. III, *Warszawa* 1966 (polnisch).

(Eingegangen am 9. April 1968., revidiert am 29. Sept. 1970.)