Метод подвижного репера в пространстве линейных элементов с общим законом преобразования

Н. И. КОВАНЦОВ (КИЕВ), ПЕТЕР НАДЬ (СЕГЕД)*

Содержание

§ 1. Введение

Пространство линейных элементов определяется как пространство пар (x^i, v^i) $i=1, \ldots, n$, где x^i — координаты точки (центра элемента), v^i — координаты вектора, ассоциированного с этой точкой. При преобразовании координат центра $\hat{x}^i = \hat{x}^i(x^1, \ldots, x^n)$ координаты вектора меняются по обычным формулам:

$$\hat{v}^i = \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^j} v^j.$$

Теории таких пространств посвящена довольно общирная литература, в рассмотрение которой мы сейчас входить не будем. Классическим примером пространства линейных элементов может служить пространтво Финслера [1], в котором в качестве координат вектора v^i берут дифференциалы координат точки пространства dx^i. Впрочем, часто под финслеровым пространством понимают любое пространство линейных элементов.

Э. Картан, вероятно, был первым, приложившим к исследованию финслерова пространства метод подвижного репера [2]. Впоследствии этот метод был использован О. Варгой для изучения геометрии произвольного пространства линейных элементов.

В работе [3] А. Моор рассмотрел теорию параллельного перенесения в пространстве линейных элементов (обозначаем $\mathfrak{M}_n$) с более общим, чем обычно, законом преобразования этих элементов. Именно, такое пространство

* Nagy Péter (Szeged)

определяется также как совокупность пар (x^i, v^i), однако при преобразовании координат центра

$$\hat{x}^i = \hat{x}^i(x^1, \ldots, x^n) \tag{1}$$

координаты вектора меняются уже по формулам

$$\hat{v}^i = \hat{v}^i(\bar{v}^1, \ldots, \bar{v}^n), \tag{2}$$

где

$$\bar{v}^i = \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^j} v^j,$$

а $\hat{v}^i$ — однородные функции первого измерения относительно своих аргументов. В указанной работе А. Моор ввел целый ряд понятий, из которых мы отметим следующие:

1. Обобщенный тензор как такая совокупность функций $T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}(x, v)$, которые при преобразовании координат (1) меняются по формулам

$$\hat{T}^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}(\hat{x}, \hat{v}) = \frac{\partial \hat{v}^{i_1}}{\partial v^{a_1}} \cdots \frac{\partial \hat{v}^{i_r}}{\partial v^{a_r}} \frac{\partial v^{b_1}}{\partial \hat{v}^{j_1}} \cdots \frac{\partial v^{b_s}}{\partial \hat{v}^{j_s}} T^{a_1 \ldots a_r}_{b_1 \ldots b_s}.$$

2. Псевдотензор как такая совокупность функций $F^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}(x, v)$, которые при преобразовании (1) меняются по формулам

$$\hat{F}^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}(\hat{x}, \hat{v}) = p^{i_1}_{a_1} \ldots p^{i_r}_{a_r} q^{b_1}_{j_1} \ldots q^{b_s}_{j_s} F^{a_1 \ldots a_r}_{b_1 \ldots b_s}(x, v), \tag{4}$$

где p^i_a и q^b_j есть производные $\dfrac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^a}, \dfrac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^a}$ и $\dfrac{\partial x^b}{\partial \hat{x}^j}, \dfrac{\partial v^b}{\partial \hat{v}^j}$, но при этом оба типа величин, содержащих ∂x и ∂v, в формулу (4) обязательно входят одновременно.

В частности имеют обобщенные контравариантные и ковариантные векторы. Псевдовекторы как таковые не существуют.

3. Инвариантный дифференциал обощенного контравариантного вектора

$$DX^i = dX^i + M^i_{jk} X^j dv^k + L^i_{jk} X^j dx^k. \tag{5}$$

Из требования, что DX^i должен быть также обобщенным контравариантным вектором, следуют такие формулы преобразования коэффициентов M^i_{pq} и L^i_{pq}:

$$\begin{aligned} \hat{M}^i_{pq} &= M^s_{jk} \frac{\partial v^j}{\partial \hat{v}^p} \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^s} \frac{\partial v^k}{\partial \hat{v}^q} - \frac{\partial^2 \hat{v}^i}{\partial v^j \partial v^k} \frac{\partial v^j}{\partial \hat{v}^p} \frac{\partial v^k}{\partial \hat{v}^q}, \\ \hat{L}^i_{pq} &= L^t_{sr} \frac{\partial v^s}{\partial \hat{v}_p} \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^t} \frac{\partial x^r}{\partial \hat{x}^q} - \hat{M}^i_{pk} \frac{\partial \hat{v}^k}{\partial x^r} \frac{\partial x^r}{\partial \hat{x}^q} - \frac{\partial^2 \hat{v}^i}{\partial x^r \partial v^s} \frac{\partial x^r}{\partial \hat{x}^q} \frac{\partial v^s}{\partial \hat{v}^p}. \end{aligned} \tag{6}$$

Из требования, что равенство (5) должно быть инвариантным относительно замены v^i на pv^i, следует, что коэффициенты L^i_{jk} должны быть однородными функциями от v нулевого измерения, а M^i_{jk} — однородными функциями измерения -1 также относительно v. При этом эти фиункции могут зависеть также от x и, кроме того, выполняются следующие равенства:

$$M^i_{j0} \stackrel{\text{def}}{=} M^{i\,\cdot}_{jk} v^k = 0.$$

Понятие инвариантного дифференциала может быть перенесено на обобщенные тензоры, обычные векторы и псевдотензоры.

В настоящей заметке мы делаем попытку применить к изучению пространства $\mathfrak{M}_n$ метод подвижного репера и получить ряд формул, содержащихся в [3], из условой инвариантности уравнений движения репера.

§ 2. Аффинное пространство обобщенных векторов

Возьмем n — мерное аффинное пространство, отнесенное к подвижному реперу R, l_i $(i=1, \ldots, n)$. Пусть R — радиус-вектор текущей точки пространства. Мы предполагаем, что этот радиус-вектор зависит от переменных x^i, v^i. Деривационные уравнения пространства определим равенствами

$$\begin{aligned} dR &= \omega^i l_i, \\ dl_i &= \omega^j_i l_j, \end{aligned} \tag{7}$$

где

$$\begin{aligned} \omega^i &= dv^i + L^i_{0r}\, dx^r, \\ \omega^j_i &= M^j_{ik}\, dv^k + L^j_{ik}\, dx^k = M^j_{ik}\omega^k + (L^j_{ij} - M^j_{il} L^l_{0k})\, dx^k, \end{aligned} \tag{8}$$

причем, как это сделано А. Моором, мы полагаем

$$M^j_{ik} v^k = 0, \quad L^i_{0r} \stackrel{\text{def}}{=} L^i_{jr} v^j. \tag{9}$$

Пространство, деривационные уравнения которого имеют вид (7), назовем *аффинным пространством обобщенных векторов*.

При переходе от переменных x^i, v^j к переменным $\hat{x}^i$, $\hat{v}^j$ векторы и формы меняются по формулам:

$$\begin{aligned} \hat{\omega}^i &= \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^k}\, \omega^k, \\ \hat{l}_i &= \frac{\partial v^k}{\partial \hat{v}^i}\, l_k, \\ \hat{\omega}^j_i &= \frac{\partial \hat{v}^j}{\partial v^k} \frac{\partial v^l}{\partial \hat{v}^i}\, \omega^k_l + \frac{\partial \hat{v}^j}{\partial v^k} \frac{\partial^2 v^k}{\partial \hat{v}^i\, \partial \hat{v}^p}\, d\hat{v}^p + \frac{\partial \hat{v}^j}{\partial v^k} \frac{\partial^2 v^k}{\partial \hat{v}^i\, \partial \hat{x}^j}\, d\hat{x}^j. \end{aligned} \tag{10}$$

Полагая здесь

$$\hat{\omega}^j_i = \hat{M}^j_{ik}\, d\hat{v}^k + \hat{L}^j_{ik}\, d\hat{x}^k,$$

$$d\hat{x}^k = \frac{\partial \hat{x}^k}{\partial x^i}\, dx^i,$$

$$d\hat{v}^k = \frac{\partial \hat{v}^k}{\partial x^s}\, dx^s + \frac{\partial \hat{v}^k}{\partial v^t}\, dv^t$$

и сравнивая коэффициенты при dx^k, dv^k, мы придем к равенствам (6). Это и есть одна из целей, которые мы перед собой ставили.

Всякий обобщенный контравариантный вектор X может быть определен равенством

$$X = X^i l_i. \tag{11}$$

Условие его неподвижности имеет вид $d(X^i l_i) = 0$, откуда, в силу независимости координатных векторов l_i, получаем

$$DX^i = dX^i + (M^i_{jk}\, dv^k + L^i_{jk}\, dx^k) X^j = 0. \tag{12}$$

Слева, как видим, стоят координаты абсолютного дифференциала вектора X, которые мы, в соответствии с равенством (5), обозначили символом DX^i.

В произвольном пространстве $\mathfrak{M}_n$ уравнения (12) не являются вполне интегрируемыми. Поэтому на эти уравнения следует смотреть как на условия параллельного перенесения вектора, аналогичные условиям Леви-Чивита.

Продифференцируем внешним образом уравнения (12):

$$D(dX^i + M^i_{jk} X^j\, dv^k + L^i_{jk} X^j\, dx^k) = 0$$

(D-символ внешнего дифференцирования). Выполняя дифференцирования и приравнивая нулю коэффициентны при $[dx^l dx^k]$, $[dv^l dv^k]$, $[dx^l dv^k]$, мы, учитывая сами равенства (12) и то, что вектор X совершенно произволен, придем к соотношениям

$$\begin{aligned}
R^i_{pkl} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial L^i_{pk}}{\partial x^l} - \frac{\partial L^i_{pl}}{\partial x^k} + L^j_{pk} L^i_{jl} - L^j_{pl} L^i_{jk} = 0,\\
S^i_{pkl} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial M^i_{pk}}{\partial v^l} - \frac{\partial M^i_{pl}}{\partial v^k} + M^j_{pk} M^i_{jl} - M^j_{pl} M^i_{jk} = 0,\\
P^i_{pkl} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial M^i_{pk}}{\partial x^l} - \frac{\partial L^i_{pl}}{\partial v^k} + L^i_{jl} M^j_{pk} - L^j_{pl} M^i_{jk} = 0.
\end{aligned} \tag{13}$$

Выражения, стоящие в левых частях последних равенств, лишь несущественно отличаются от коэффициентов R^i_{pkl}, S^i_{pkl}, P^i_{pkl}, которые приведены в формулах (7.5) работы [3]. Мы имели бы совпадение, если бы записали уравнения (12) в виде

$$dX^i + M^i_{jk} X^j \omega^k + L^{*i}_{jk} X^j\, dx^k = 0,$$

где

$$L^{*i}_{jk} = L^i_{jk} - M^i_{jr} L^r_{0k}$$

(см. (4.4) и (4.5) работы [3]) и собрали бы после внешнего дифференцирования коэффициенты при $[dx^l dx^k]$, $[\omega^l \omega^k]$, $[dx^l \omega^k]$.

Условия (13) есть условия полной интегрируемости системы (12). Записывая уравнения последней системы в виде

$$dX^i + X^j \omega^i_j = 0,$$

мы видим, что условия (13) равносильны следующим

$$D\omega^j_i = [\omega^k_i \omega^j_k], \tag{14}$$

а это в свою очередь означает полную интегрируемость системы уравнений стоящей во второй строчке равенств (7).

Входящие в уравнения (12) функции M^i_{jk} вообще говоря не симметричны относительно индексов j, k. Условие $M^i_{jk}v^k=0$, которому подчиняются эти функции, имеют ту особенность, что суммирование производится по второму индексу. Лишь в этом случае абсолютный дифференциал (см. (5)) будет сохранять свое значение при замене v^k на ϱv^k.

В статье [3], в равенстве (4.2), допущена описка, в соответствии с которой суммирование берется по первому индексу. Пиcки не было бы лишь в том случае, когда функции M^i_{jk} симметричны по нижним индексам.

Покажем, что условий (13) не достаточно для того, чтобы система (7) была вполне интегрируема — необходимым и достаточным условием полной интегрируемости этой системы являются равенства (13) вместе с дополнительным условием

$$M^i_{jk}=M^i_{kj}. \tag{15}$$

Действительно, дифференцируя равенство $M^i_{jk}v^k=0$ по x^l и v^l, будем иметь

$$v^k\frac{\partial M^i_{jk}}{\partial x^l}=0, \tag{16}$$

$$M^i_{jl}+v^k\frac{\partial M^i_{jk}}{\partial v^l}=0. \tag{17}$$

Дифференцируя внешним образом систему (7), мы, кроме (14), получим еще равентсва

$$D\omega^i=[\omega^k\omega^i_k]. \tag{18}$$

Равенства (14) выполнены в силу (13). Что же касается равенств (18), то, принимая во внимание (13), мы сведем эти равенства к следующим

$$M^i_{jk}=M^i_{kj},$$

$$v^j\left(\frac{\partial L^i_{jr}}{\partial v^l}+M^i_{kl}L^k_{jr}\right)=0.$$

Учитывая (15) и (9), последнее равенство можно записать в виде:

$$v^j\left(\frac{\partial L^i_{jr}}{\partial v^l}-\frac{\partial M^i_{jl}}{\partial x^r}+L^k_{jr}M^i_{kl}-L^i_{kr}M^k_{jl}\right)=0.$$

Но это соотношение выполнено в силу третьего равенства (13). Остается, таким образом, лишь равенство (15), а это и доказывает утверждение.

Интегрируя уравнения (7) в случае, когда система вполне интегрируема, получаем радиус-вектор текущей точки аффинного пространства вместе с сопровождающим репером:

$$R=R(x^i,v^i),$$

$$l_i=l_i(x^i,v^i).$$

Все функции зависят от $2n$ переменных x^i, v^i.

Примечание: Можно было бы получить все соотношения, рассматриваемые в работе [3], взяв не аффинное, а проективное пространство P_{n-1}, отнесенное к подвижному реперу $l_1, \ldots, l_n$. В этом случае достаточно было бы ограничиться лишь второй строчкой системы (7), для полной интегрируемости которой равенства $M^i_{jk}=M^i_{kj}$ не были бы необходимыми.

При $M^i_{jk}\neq M^i_{kj}$ разности $M^i_{jk}-M^i_{kj}$ образуют тензор, который было бы естественно назвать тензором кручения.

§ 3. **Метрическое пространство обобщенных векторов**

Полагая

$$l_i l_j = g_{ij},$$

где g_{ij} — функции от x^i, v^i, получим метрическое пространство обобщенных векторов. Дифференцируя последнее равенство и принимая во внимание соотношения (7), будем иметь

$$dg_{ij} = \omega^k_i g_{kj} + \omega^k_j g_{ik},$$

или

$$dg_{ij} = g_{kj}(M^k_{ip} dv^p + L^k_{ip}\, dx^p) + g_{ik}(M^k_{jp}\, dv^p + L^k_{jp}\, dx^p).$$

Отсюда находим

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial v^p} = g_{kj} M^k_{ip} + g_{ik} M^k_{jp},$$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^p} = g_{kj} L^k_{ip} + g_{ik} L^k_{jp}.$$

Если $M^l_{jk}=M^l_{kj}$ и $L^l_{jk}=L^l_{kj}$, то из последних равенств получаем

$$(20)\qquad \begin{aligned} M^k_{ij} &= \frac{1}{2} g^{kl}\left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial v^i}+\frac{\partial g_{il}}{\partial v^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial v^l}\right), \\ L^k_{ij} &= \frac{1}{2} g_{kl}\left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right), \end{aligned}$$

где функции g^{kl} определяются алгебраическими уравнениями

$$(21)\qquad g^{kl} g_{il} = \delta^k_i,$$

разрешимыми в силу линейной независимости векторов l_i и тем самым невырожденности определителя $|g_{ij}|$. Впрочем, равентсва $L^l_{jk}=L^l_{kj}$ не инвариантны относительно преобразования координат (2).

Если же коэффициенты M^k_{ij} и L^k_{ij} не симметричны по нижним индексам, то вместо равенств (20) мы получим более сложные равенства. Именно, полагая

$$M_{ij}^k - M_{ji}^k = T_{ij}^k, \tag{22}$$

$$L_{ij}^k - L_{ji}^k = U_{ij}^k, \tag{23}$$

мы из равенств (19) получаем

$$M_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial v^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial v^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial v^l} \right) + \frac{g^{kl}}{2} (g_{si} T_{jl}^s + g_{js} T_{il}^s + g_{sl} T_{ij}^s), \tag{24}$$

$$L_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right) + \frac{g^{kl}}{2} (g_{si} U_{jl}^s + g_{js} U_{il}^s + g_{sl} U_{ij}^s). \tag{25}$$

§ 4. Инварианты

Обратимся к равенствам (13). Легко обнаруживается, что функции S_{pkl}^i образуют четырехвалентный обобщенный тензор — это было отмечено А. Мооромю. Четырехвалентный четырехждыковариантный обобщенный тензор образуют также функции

$$S_{ipkl} = g_{ij} S_{pkl}^j. \tag{26}$$

Пусть теперь ξ^i — компоненты обобщенного вектора, следовательно, при переходе в новой системе координат эти компоненты меняются по формулам

$$\hat{\xi}^i = \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^j} \xi^j. \tag{27}$$

Два таких обобщенных вектора ξ_1^i, ξ_2^i определяют бивектор и, следовательно, некоторую двумерную площадку в аффинном пространстве обобщенных векторов. Величина

$$K = \frac{S_{ijkl} \begin{vmatrix} \xi_1^i & \xi_1^j \\ \xi_2^i & \xi_2^j \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_1^k & \xi_1^l \\ \xi_2^k & \xi_2^l \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_{ik} & g_{il} \\ g_{jk} & g_{jl} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_1^i & \xi_1^j \\ \xi_2^i & \xi_2^j \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_1^k & \xi_1^l \\ \xi_2^k & \xi_2^l \end{vmatrix}} \tag{28}$$

есть инвариант, соответствующий этой площадке. По аналогии с римановой геометрией эту величину можно назвать обобщенной кривизной метрического пространства обощенных векторов в заданном двумерном направлении. Однако, в отличие от римановой геометрии, инвариант K не может быть истолькован как предел отношения угла приращения, приобретенным обобщенным вектором X при параллельном перенесении по некоторому контуру, к площади геодезической поверхности, ограниченной этим контуром.

Кроме инварианта (28), можно отметить два других инварианта, так или иначе обобщающих понятие кривизны двумерной геодезической поверхности в римановом пространстве (кривизны пространства в заданном двумерном направлении):

$$K_1 = \frac{R_{ijkl}\begin{vmatrix}\xi_1^i & \xi_1^j\\ \xi_2^i & \xi_2^j\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\eta_1^k & \eta_1^l\\ \eta_2^k & \eta_2^l\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}g_{ik} & g_{il}\\ g_{jk} & g_{jl}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\xi_1^i & \xi_1^j\\ \xi_2^i & \xi_2^j\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\xi_1^k & \xi_1^l\\ \xi_2^k & \xi_2^l\end{vmatrix}}, \tag{29}$$

$$K_2 = \frac{P_{ijkl}\begin{vmatrix}\xi_1^i & \xi_1^j\\ \xi_2^i & \xi_2^j\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\eta_1^k & \xi_1^l\\ \eta_2^k & \xi_2^l\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}g_{ik} & g_{il}\\ g_{jk} & g_{jl}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\xi_1^i & \xi_1^j\\ \xi_2^i & \xi_2^j\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\xi_1^k & \xi_1^l\\ \xi_2^k & \xi_2^l\end{vmatrix}}. \tag{30}$$

Здесь $R_{ijkl}=g_{pi}R^p_{jkl}$, $P_{ijkl}=g_{pi}P^p_{jkl}$, а R^p_{jkl} и P^p_{jkl} определяются равенством (7.5) работы [3]. ξ^i — координаты обобщенного, η^i — координаты обыкновенного вектора, которые при изменении параметризации пространства меняются по формулам

$$\hat{\eta}^i = \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^k}\eta^k. \tag{31}$$

Как показывают равенства (29) и (30), оба инварианта K_1 и K_2 определяются четверкой векторов, из которых два обыкновенных и два обобщенных.

§ 5. **Аффинное пространство обобщенных и обыкновенных векторов**

Вместо уравнений (7) можно рассматривать более общие уравнения

$$\begin{aligned} dR &= \omega^i l_i + dx^i f_i,\\ dl_i &= \omega_i^j l_j,\\ df_i &= v_i^j f_j, \end{aligned} \tag{32}$$

где

$$v_i^j = K_{ik}^j\, dx^k + N_{ik}^j \omega^k. \tag{33}$$

Назовем пространство с такими деривационными уравнениями *аффинным пространством обобщенных и обыкновенных векторов*.

Для инвариантности уравнений (32) необходимо и достаточно, чтобы, кроме соотношения (14), выполнялись также соотношения

$$\begin{aligned} \hat{f}^i &= \frac{\partial x^j}{\partial \hat{x}^i} f_j,\\ \hat{v}_i^j &= \frac{\partial \hat{x}^j}{\partial x^k}\frac{\partial x^l}{\partial \hat{x}^i} v_l^k + \frac{\partial \hat{x}^j}{\partial x^k}\frac{\partial^2 x^k}{\partial \hat{x}^i\,\partial \hat{x}^p} d\hat{x}^p. \end{aligned} \tag{34}$$

Полагая

$$\hat{v}_i^j = \hat{K}_{ik}^j\, d\hat{x}^k + \hat{N}_{ik}^j \hat{\omega}^k,$$

мы придем к следующим формулам преобразования коэффициентов K_{ik}^{j}, N_{ik}^{j}:

$$\hat{K}_{ik}^{j} = \frac{\partial \hat{x}^{j}}{\partial x^{p}} \frac{\partial x^{q}}{\partial \hat{x}^{i}} \frac{\partial x^{r}}{\partial \hat{x}^{k}} K_{qr}^{p} + \frac{\partial \hat{x}^{j}}{\partial x^{p}} \frac{\partial^{2} x^{p}}{\partial \hat{x}^{i} \partial \hat{x}^{k}},$$

(35)

$$\hat{N}_{ik}^{j} = \frac{\partial \hat{x}^{j}}{\partial x^{k}} \frac{\partial x^{l}}{\partial \hat{x}^{i}} \frac{\partial v^{q}}{\partial \hat{v}^{p}} N_{lq}^{k}.$$

Из компонент N_{ij}^{k} и K_{ij}^{k} можно образовать тензоры и псевдотензоры, совершенно аналогичные тензорам и исевдотензорам R_{ikl}^{j}, P_{ikl}^{j}, S_{ikl}^{j} работы [3]. Так, требуя, чтобы система (32) была вполне интегрируема, мы, кроме равенств (14) и (18), получаем еще равенства

$$Dv_{i}^{j} = [v_{i}^{k} v_{k}^{j}], \quad [v_{j}^{i}\, dx^{j}] = 0. \tag{36}$$

С другой стороны, дифференцируя внешним образом формы (33), будем иметь

$$Dv_{i}^{j} = [dK_{ik}^{j}\, dx^{k}] + dN_{ik}^{j} \omega^{k}] + N_{ik}^{j}[\omega^{l} \omega_{l}^{k}],$$

Внося это в первое равенство (36), получим:

$$\tilde{R}_{ikl}^{j}[dx^{l}\, dx^{k}] + \tilde{P}_{ikl}^{j}[dx^{l}\, \omega^{k}] + \tilde{S}_{ikl}^{j}[\omega^{k} \omega^{l}] = 0, \tag{37}$$

где

$$\tilde{R}_{ikl}^{j} = \frac{\partial K_{ik}^{j}}{\partial x^{l}} - \frac{\partial K_{il}^{j}}{\partial x^{k}} + \frac{\partial K_{il}^{j}}{\partial v^{q}} L_{0k}^{q} - \frac{\partial K_{ik}^{j}}{\partial v^{q}} L_{0l}^{q} + K_{ik}^{s} K_{sl}^{j} - K_{il}^{s} K_{sk}^{j},$$

(38)

$$\tilde{P}_{ikl}^{j} = -\frac{\partial K_{il}^{j}}{\partial v^{k}} + \frac{\partial N_{ik}^{j}}{\partial x^{l}} - \frac{\partial N_{ik}^{j}}{\partial v^{s}} L_{0l}^{s} - N_{is}^{j} L_{kl}^{*s} + K_{s\,l}^{j} N_{ik}^{s} - K_{il}^{s} N_{sk}^{j},$$

$$\tilde{S}_{ikl}^{j} = \frac{\partial N_{ik}^{j}}{\partial v^{l}} - \frac{\partial N_{il}^{j}}{\partial x^{k}} + N_{is}^{j} M_{lk}^{s} - N_{is}^{j} M_{kl}^{s} + N_{ik}^{s} N_{sl}^{j} - N_{il}^{s} N_{sk}^{j}.$$

Если уравнения $df_{i} = v_{i}^{j} f_{j}$ не образуют вполне интегрируемой системы, то левая часть (37) не равная нулю. Так как обращение ее в нуль имеет инвариантный смысл, то это наводит на легко проверяемую мысль о том, что она представляет собой некоторый двухвалентный обыкновенный тнезор. Но в таком случае, учитывая, что dx^{i} — обыкновенный, а ω^{i} — обобщенный вектор, заключим, что $\tilde{R}_{ikl}^{j}$ есть обыкновенный четырехвалентный тензор, а $\tilde{P}_{ikl}^{j}$ и $\tilde{S}_{ikl}^{j}$ — псевдотензоры:

$$\hat{\tilde{R}}_{ikl}^{j} = \frac{\partial \hat{x}^{j}}{\partial x^{a}} \frac{\partial x^{b}}{\partial \hat{x}^{i}} \frac{\partial x^{c}}{\partial \hat{x}^{k}} \frac{\partial x^{p}}{\partial \hat{x}^{l}} \tilde{R}_{bcp}^{a},$$

(39)

$$\hat{\tilde{P}}_{ikl}^{j} = \frac{\partial \hat{x}^{j}}{\partial x^{a}} \frac{\partial x^{b}}{\partial \hat{x}^{i}} \frac{\partial v^{c}}{\partial \hat{v}^{k}} \frac{\partial x^{p}}{\partial \hat{x}^{l}} \tilde{P}_{bcp}^{a},$$

$$\hat{\tilde{S}}_{ikl}^{j} = \frac{\partial \hat{x}^{j}}{\partial x^{a}} \frac{\partial x^{b}}{\partial \hat{x}^{i}} \frac{\partial v^{c}}{\partial \hat{v}^{k}} \frac{\partial v^{p}}{\partial \hat{v}^{l}} \tilde{S}_{bcp}^{a}.$$

Если теперь принять во внимание второе равенство системы (36), то оно приводит к следующим соотношениям:

$$K^j_{ik}=K^j_{ki}, \quad N^j_{ik}=0.$$

В этом случае условие интегрируемости (37), которое сводится к равенствам $\tilde{R}^j_{ikl}=\tilde{P}^j_{ikl}=\tilde{S}^j_{ikl}=0$, приводит к тому, что коэффициенты K^k_{ij} не зависят от v^p, а $\tilde{R}^j_{ikl}$ представляют собой компоненты обыкновенного тензора кривизны.

§ 6. Метрическое пространство обобщенных и обыкновенных векторов

Наряду с обобщенным тензором g_{ij} можно ввести обыкновенный дважды коваривнтный тензор

$$\gamma_{ij}=f_i f_j. \tag{40}$$

Пространство с таким тензором (а также с тензором g_{ij}) назовем *метрическим пространством обобщенных и обыкновенных векторов*.

Дифференцируя (40), находим

$$d\gamma_{ij}=v^k_i\varphi_{kj}+v^k_j\gamma_{ik},$$

или

$$d\gamma_{ij} = \gamma_{kj}(K^k_{il}\,dx^l+N^k_{il}\omega^l)+\gamma_{ik}(K^k_{jl}\,dx^l+N^k_{jl}\omega^l). \tag{41}$$

Предполагая, что векторы f_i линейно независимы, заключаем, что $|\gamma_{ij}|\neq 0$, а тогда мы можем однозначно решить равенства

$$\gamma_{ij}\gamma^{jk}=\delta^k_i. \tag{42}$$

Если $\tilde{K}^k_{ij}\neq K^k_{ji}(\tilde{K}^k_{ij}=K^k_{ij}+N^k_{il}L^l_{0j})$, то полагая

$$\tilde{K}^k_{ij}-\tilde{K}^k_{ji}=\tilde{V}^k_{ij}, \tag{43}$$

мы из (41) найдем

$$\tilde{K}^k_{ij}=\frac{1}{2}\gamma^{kl}\left(\frac{\partial\gamma_{lj}}{\partial x^i}+\frac{\partial\gamma_{il}}{\partial x^j}-\frac{\partial\gamma_{ij}}{\partial x^l}+\frac{\gamma^{kl}}{2}\left(g_{sl}\tilde{V}^s_{jl}g_{js}\tilde{V}^s_{il}+g_{sl}\tilde{V}^s_{ij}\right)\right). \tag{44}$$

В случае симметрии $\tilde{K}^k_{ij}=\tilde{K}^k_{ij}$ получаем

$$\tilde{K}^k_{ij}=\frac{1}{2}\gamma^{kl}\left(\frac{\partial\gamma_{lj}}{\partial x^i}+\frac{\partial\gamma_{il}}{\partial x^j}-\frac{\partial\gamma_{ij}}{\partial x^l}\right). \tag{45}$$

Полагая

$$\tilde{S}_{ijkl}=g_{is}\tilde{S}^s_{jkl}, \tag{46}$$

може мнайти инвариант

$$\tilde{K}=\frac{\tilde{S}_{ijkl}\begin{vmatrix}\eta^i_1 & \eta^j_1\\ \eta^i_2 & \eta^j_2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\eta^k_1 & \eta^l_1\\ \eta^k_2 & \eta^l_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\gamma_{ik} & \gamma_{il}\\ \gamma_{jk} & \gamma_{jl}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\eta^i_1 & \eta^j_1\\ \eta^i_2 & \eta^j_2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\eta^k_1 & \eta^l_1\\ \eta^k_2 & \eta^l_2\end{vmatrix}}, \tag{47}$$

являющийся новым обобщением кривизны риманова пространства в двумерном направлении, определяемом обыкновенными векторами η_1^i, η_i^2.

(48) $$\eta = \eta^i f_i.$$

Условием неподвижности такого вектора является равенство $d\eta = 0$, или

(49) $$D\eta^i = d\eta^i + v_j^i \eta^j = 0.$$

Полная интегрируемость этой системы уравнений будет им ть место лишь при выполнении равенств (37). При невыполнении этих равенств условия (49) следует рассматривать как аналог параллельного перенесения обыкновенного вектора в проствавстве $\mathfrak{M}_n$. Однако, в отличие от риманова пространства, инвариант $\tilde{K}$ в общем случае не имеет геометрического смысла, в соответствии с которыж он равен пределу отношения угла приращения параллельно обнесенного в соответствии с (49) обыкновенно вектора к площади обнесенной поверхности.

Можно было бы выписать и инварианты, аналогичные инвариантам K_1 и K_2.

Литература

[1] P. Finsler, Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen, *Diss.* Göttingen, 1918.
[2] E. Cartan, Les éspaces de Finsler, *Paris*, 1937.
[3] A. Moór, Übertragungstheorie bezüglich der allgemeinen Linienelementtransformationen, *Publ. Math. Debrecen* **13** (1966), 263—287.

(Поступило 23. VI. 1969.)