Subkommutative Dedekindringe

By H. H. BRUNGS (Alberta, Canada)

1. Einleitung

Es sollen noethersche Ringe mit Einselement und folgenden Eigenschaften untersucht werden.

(I) Jedes einseitige Ideal ist ein zweiseitiges Ideal.

(M) Für zwei Ideale A und B von R, die nur in einem einzigen und zwar demselben maximalen Ideal M von R enthalten sind, gilt entweder $A \subseteqq B$ oder $A \supset B$.

Diese letzte Eigenschaft charakterisiert zusammen mit einer Abschwächung von Bedingung (I) und einer weiteren Bedingung von Baer in [1] definierte Ringe.

Jeder Ring ist im folgenden immer ein noetherscher Ring mit Einselement. Ziel der Untersuchung ist es, einen Reduktionssatz für Ringe mit (I) und (M) zu gewinnen (Satz 1) und die dabei auftretenden Typen von Ringen zu charakterisieren. (Satz 2.)

2. Idealtheorie in Ringen mit (I)

Da alle einseitigen Ideale zweiseitig sind, und R ein Einselement besitzt, folgt aus $Ra \subseteqq aR \subseteqq Ra$, daß $Ra = aR$ für jedes Element a aus R gilt, und $ra = ar'$, $ar = \bar{r}a$ für a, r aus R und für gewisse Elemente r', $\bar{r}$ aus R. Man kann nun (vergl. etwa [2]) die wesentlichen Ergebnisse der Idealtheorie für kommutative noethersche Ringe auf unseren Fall übertragen.

Wir benötigen die folgenden Ergebnisse:

Jedes Ideal A von R besitzt eine Darstellung als Durchschnitt endlich vieler primärer Ideale Q_i

$$A = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i.$$

Dabei ist $P_i = \mathrm{Rad}\, Q_i = \{r \in R;\ \exists n \in \mathbf{N}$ mit $r^n \in Q_i$ $(\neq P_j$ für $i \neq j)$ und kein Q_i in der Darstellung von A is überflüssig. Ein ideal Q heißt Primärideal, wenn aus ab aus Q, b nicht aus Q folgt, daß a^n in Q liegt für eine natürliche Zahl n, und wenn a nicht in Q liegt, muß eine Potenz von b in Q enthalten sein. Insbesondere kann das Nullideal $(0) = \bigcap_{i=1}^{k} P_i^{n_i}$ als endlicher Durchschnitt von Potenzen minimaler Primideale dargestellt werden. Alle Primideale sind vollständige Primideale, und das

Radikal Rad Q eines Primärideals Q ist ein Primideal. Weiterhin beweist man, daß die Potenzen maximaler Ideale primäre Ideale sind.

Es soll nun der Krull'sche Durchschnittssatz für die hier betrachten Ringe bewiesen werden.

Lemma 1. *Erfüllt der noethersche Ring R mit Einselement die Bedingung* (I), *und ist A ein Ideal von R, dann existiert ein Element a in A mit*

$$(1-a)\bigcap_{n=0}^{\infty} A^n = (0).$$

Beweis. Sei $B = \bigcap_{n=0}^{\infty} A^n$, dann soll als erstes gezeigt werden, daß

$$AB \supset B \cap A^i$$

für eine ganze Zahl i gilt.

Wir betrachten eine Primärdarstellung $AB = \cap Q_i$. $\{Q_i'\}$ sei die Familie der Primärideale unter den Q_i, deren Radikal A enthält, und $\{Q_j''\}$ seien die übrigen. Setzt man $B' = \cap Q_i'$ und $b'' = \cap Q_j''$, so folgt $AB = B' \cap B''$ und $A^s \subset B'$ für eine natürliche Zahl s. Ist y_j ein Element aus A, das nicht in Rad Q_j'' liegt, dann folgt aus $y_j B \subseteqq Q_j''$, daß $B \subseteqq Q_j''$ und damit $B \subseteqq B''$ gilt.

Damit ist $B \supseteqq AB \supseteqq A^s \cap B = B$ gezeigt, woraus

$$(*) \qquad AB = B$$

folgt.

Nun ist R noethersch, also B endlich erzeugt, etwa $B = (b_1, \ldots, b_n)$; aus $(*)$ erhält man damit ein Gleichungssystem

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_j - b_i = 0, \quad a_{ij} \text{ aus } A, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Daraus können wir folgern, daß zu jedem b_i ein Element der Form $1-c_i$, mit c_i aus A und $(1-c_i)b_i = 0$ existiert. Das ist offensichtlich, wenn $n=1$ ist, und folgt für $n>1$ durch Induktion:

Es gilt $(a_{nn}-1)a_{in} = a_{in}'(a_{nn}-1)$ für Elemente a_{in}' aus R, und in

$$(a_{nn}-1)\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_j - b_i\right) - a_{in}'\left(\sum_{j=1}^{n} a_{nj} b_j - b_n\right) = 0$$

ergibt sich ein Gleichungssystem der Form $\sum_{j=1}^{n-1} \bar{a}_{ij} b_j - b_i = 0$ mit $\bar{a}_{ij}$ aus A, für $i=1, \ldots, n-1$, und nach Induktionsvoraussetzung erhält man die Elemente $(1-c_i)$ für $i=1, \ldots, n-1$. Das Element $(1-c_n)$ erhalten wir durch einen analogen Schluß, wobei nur ein Index $k \neq n$ die Rolle von n übernehmen muß. Das Produkt der Elemente $(1-c_i)$ hat die Form $1-a$ mit a aus A und erfüllt $(1-a)b_i = 0$ für $i=1, \ldots, n$, was das Lemma beweist.

Es sei bemerkt, daß ein entsprechendes Ergebnis nicht gilt, wenn man voraussetzt, daß alle Rechtsideale zweiseitig sind und die Maximalbedingung für Ideale erfüllt ist.

3. Lokalisation in Bezug auf ein maximales Ideal

M sei in diesem Abschnitt ein maximales Ideal des Ringes R, der die Bedingungen (I) und (M) erfüllt, weiterhin $N = \bigcap_{n=0}^{\infty} M^n$ und $\bar{R} = R/N$.

$\bar{R}$ ist ein noetherscher Ring, in dem alle einseitigen Ideale zweiseitig sind, und in dem kein Bild eines Elementes s aus $R \setminus M = S$ Nullteiler ist. Denn wenn wir mit $\bar{a}$ das Bild von a aus R in $\bar{R}$ bezeichnen, folgt aus $\bar{s}\bar{r} = \bar{0}$, daß sr aus N ist, und da M^n ein primäres Ideal und s nicht aus M ist, folgt, daß r für alle n in M^n liegt, also $\bar{r} = \bar{0}$. Das gleiche Ergebnis folgt aus der Annahme $\bar{r}\bar{s} = \bar{0}$. Ferner ist N in jedem Primideal $P \subseteqq M$ enthalten, was sofort aus Lemma 1 folgt.

Lemma 2. *Jedes maximale Ideal M des noetherschen Rings R mit Einselement enthält genau ein minimales Primideal.*

Beweis. Es sei $R_S = \bar{R}_{\bar{S}}$ der Ring von Quotienten von $\bar{R}$ bezüglich der Menge $\bar{S}$, der existiert, da $\bar{R}$ ja die Orebedingung $\bar{r}\bar{s} = \bar{s}\bar{r}'$ für $\bar{r}$, $\bar{s}$, $\bar{r}'$ aus R erfüllt.

Die Elemente von $\bar{R}_S$ können in der Form $\bar{r}\bar{s}^{-1}$ geschrieben werden. M^2 ist ein Ideal von R, das ebenso wie jedes Ideal zwischen M^2 und M nur in dem einen maximalen Ideal M enthalten ist. Daher muß der Vektorraum M/M^2 über R/M 1-dimensional sein, da sonst für zwei Elemente a, b aus M, deren Bilder in M/M^2 über R/M linear unabhängig sind, aus $aR + M^2 \subseteqq bR + M^2$ oder $bR + M^2 \subseteqq aR + M^2$ (wegen (M)) in jedem Fall ein Widerspruch folgt. Unberücksichtigt blieb noch die Möglichkeit $M = M^2$. In diesem Fall sind wir aber mit unserem Beweis fertig, da ja dann M selbst ein minimales Primideal $P = \bigcup_{n=0}^{\infty} M^n = M$ ist.

Also können wir annehmen, daß M/M^2 1-dimensional über R/M ist. Daraus folgt aber, daß $\bar{M}R_S$ ein Hauptideal ist und es möge die Form aR_S mit a aus $\bar{M}$ haben. Da der Durchschnitt aller Potenzen von aR_S das Nullideal ist, treten als Ideale in R_S nur die Potenzen von aR_S auf. Sind nun P_1 und P_2 zwei verschiedene Primideale aus R in M, dann sind auch $\bar{P}_1 R_S$ und $\bar{P}_2 R_S$ verschiedene Primideale in R_S. Damit ist das Lemma bewiesen.

Aus der Darstellung des Nullideals und Lemma 2 folgt nun die erste Hälfte des folgenden Satzes mit Hilfe des Chinesischen Restsatzes.

Satz 1. *Erfüllt ein noetherscher Ring R mit Einselement die Bedingungen* (I) *und* (M), *dann ist R die direkte Summe endlich vieler Ringe mit* (I) *und* (M). *Diese direkten Komponenten sind entweder lokale Ringe, deren maximale Ideale nilpotente Hauptideale sind, oder subkommutative, nullteilerfreie Dedekindringe.*

Beweis. Es bleiben die Ringe $R/P_i^{n_i}$ zu untersuchen, wenn wir von einer Darstellung

$$(0) = \bigcap_{i=1}^{k} P_i^{n_i}$$

des Nullideals als Durchschnitt von Potenzen minimaler Primideale P_i ausgehen.

Es wird mit dem Fall begonnen, in dem $P_i^{n_i} \neq P_i$ ist. Dann sei $0 \neq a$ aus $R_i = R/P_i^{n_i}$ ein nilpotentes Element und $\{u \in R_i \text{ mit } ua = 0\} = L(a) \neq R_i$ in dem maximalen Ideal

M von R_i enthalten. Das Bild von a in $R_i/\bigcap_{n=0}^{\infty} M^n$ ist verschieden von o, da wegen Lemma 1 ein Element $0 \neq s$ aus $R_i \setminus M$ mit $s\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} M^n\right) = 0$ existiert; also ist es auch in dem Ring von Quotienten $(R_i)_{R_i \setminus M}$, der ein lokaler Hauptidealring ist, verschieden vom Nullelement und nilpotent. Das zeigt, daß in R_i die Ideale M und P_i übereinstimmen, R_i selbst lokal und damit lokaler Hauptidealring mit nilpotentem maximalen Ideal ist. Natürlich erfüllt R_i die Bedingungen (M) und (I).

Den zweiten Fall, in dem der direkte Summand von R die Form R/P_i hat, werden wir etwas genauer studieren, insbesondere sollen diese Ringe auf verschiedene Weise charakterisiert werden. Der weitere Teil des Beweises von Satz 1 ergibt sich dann als Folgerung zu Satz 2.

4. Der nullteilerfreie Fall

In diesem Abschnitt betrachten wir nur noethersche Ringe R mit Einselement, die nullteilerfrei sind und Bedingung (I) erfüllen. Es existiert also der Quotientenkörper $Q(R) = K$.

Ein R-Linksmodul $B \subseteqq K$ heißt gebrochenes Ideal, wenn $dB \subseteqq R$ für ein Element $d \neq 0$ aus R gilt. Diese Definition ist rechts-links-symmetrisch. B heißt umkehrbar, wenn ein gebrochenes Ideal B' mit $BB' = R$ existiert. Definiert man $(R:B)_r = \{x \in K \ni Bx \subseteqq R\}$ und $(R:B)_l = \{x \in K \ni xB \subseteqq R\}$, dann gilt $(R:B)_r = (R:B)_1 = (R:B)$.

Ein gebrochenes Ideal A ist genau dann umkehrbar, wenn $(R:A)A = R$ ist, oder wenn $A(R:A) = R$ gilt. Ist nämlich $AA' = R$, so folgt $A' \subseteqq (R:A)$, also $A'A \subseteqq R$. Ferner gilt $(R:A)A \subseteqq R$, also ist $(R:A) \subset RA' = A'$, was $(R:A) = A'$ liefert. Ist nun $A'A = B \subset R$ für ein Ideal B aus R, erhält man $A = AB$. Aber A ist wegen $AA' = R$ endlich erzeugt als R-Linksmodul, und daher folgt aus $A = AB$ (vergl. Beweis von Lemma 1) die Existenz eines Elements der Form $1-b$ mit b aus B und $A(1-b) = 0$. Dieser Widerspruch liefert $AA' = A'A = R$.

Der nun noch zu beweisende Teil der Behauptung folgt aus Symmetriegründen.

Noch eine Bemerkung ist nützlich: Für Primideale P_1 und P_2 von R gilt $P_1 P_2 = P_2 P_1$, denn für Elemente p_1 aus P_1, p_2 aus P_2 ist $p_1 p_2 = p_2 p_1'$, wenn p_2 nicht aus P_1, $p_1 p_2 = p_2' p_1$, wenn p_1 nicht aus P_2, in jedem Fall aus $P_2 P_1$.

Satz 2. *Folgende Bedingungen sind für einen nullteilerfreien noetherschen Ring mit Einselement und mit* (I) *gleichwertig:*

(1) *Bedingung* (M).
(2) R_M *ist ein Hauptidealring für jedes maximale Ideal* M *von* R.
(3) *Die maximalen Ideale* $\neq 0$ *von* R *sind umkehrbar.*
(4) *Jedes Ideal* $\neq 0$, $\neq R$ *ist Produkt maximaler Ideale.*
(5) *Jeder endlich erzeugte* (R-Links) *Torsionsmodul ist die direkte Summe zyklischer Untermoduln.*

Beweis. Daß aus (1) die Bedingung (2) folgt, haben wir schon früher bewiesen. (Vergl. Beweis von Lemma 2.) Um (3) aus (2) herzuleiten, sei M ein maximales Ideal von R mit $(R:M)M \subset R$. Dann ist $(R:M)M \subseteqq M_1$ für ein maximales Ideal M_1

von R und wegen (2) ist $MR_{M_1} = cR_{M_1}$ mit c aus M und $c \neq 0$ (wir dürfen $M \neq 0$ annehmen). Ist $(a_1, \ldots, a_n)$ eine Basis von M in R, dann gibt es ein Element t in R, $t \notin M_1$ so, daß $a_i = cs_i t^{-1} = s_i' ct^{-1}$, s_i, s_i' aus R, für $i = 1, \ldots, n$ gilt, was besagt, daß tc^{-1} ein Element aus $(R:M)$ ist. Daraus folgt aber mit $t \in (R:M)c \subseteqq M_1$ ein Widerspruch.

Ist nun $R \neq A \neq 0$ ein Ideal von R und maximal in der Familie der nicht als Produkt maximaler Ideale darstellbaren Ideale, dann gilt $A \subset M$ für ein maximales Ideal M von R. Daraus folgt $A \subseteqq M'A \subseteqq R$.

Der Fall $A = M'A$ ist nicht möglich, und $M'A$ ist daher Produkt maximaler Ideale, womit (4) aus (3) hergeleitet ist.

Maximale Ideale sind Primideale, daher ist die Multiplikation von Idealen unter der Voraussetzung der Bedingung (4) kommutativ.

Schließlich folgt (1) sofort aus (4): Denn die Ideale, die genau in einem einzigen maximalen Ideal enthalten sind, sind die Potenzen dieses maximalen Ideals, und die sind offenbar linear geordnet.

Es bleibt die Gleichwertigkeit der Bedingung (5) mit den Bedingungen (1)—(4) zu bewiesen. (Vergl. [5], [6].)

Setzt man (1)—(4) voraus, so folgt, daß jeder endlich erzeugte Torsionsmodul (alle Moduln sind R-Linksmoduln) direkte Summe von M-primären Moduln ist, das heißt solchen Untermoduln, in denen der Annihilator jedes Elementes eine Potenz des gleichen maximalen Ideals M ist. (Im kommutativen Fall siehe [4].) Einen solchen M-primären Modul kann man als R_M-Linksmodul betrachten, woraus (5) mit (2) und [3] Th. 19, p. 44 folgt.

Jetzt wird Bedingung (5) vorausgesetzt. Sei M ein maximales Ideal von R, $E = E(R/M)$ die injektive Hülle von R/M, betrachtet als R-Linksmodul. Der absteigenden Kette von Idealen

$$R = M^0 \supset M \supset M^2 \supset \cdots \supset M^n \supset M^{n+1} \supset \cdots$$

entspricht in E eine aufsteigende Kette von Untermoduln

$$0 = A_0 \subseteqq A_1 \subseteqq A_2 \subseteqq \cdots \subseteqq A_n \subseteqq A_{n+1} \subseteqq \cdots$$

mit $A_i = \{x \in E \ni M^i x = 0\}$. Dann gilt $A_{i+1}/A_i \to \mathrm{Hom}_R (M^i/M^{i+1}, E)$ und dies ist ein R-Linksmodulisomorphismus, wobei $\mathrm{Hom}_R (M^i/M^{i+1}, E)$ durch $r \circ \varphi(m) = \varphi(mr)$ zum R-Linksmodul wird. ([7])

Das Bild eines jeden Homomorphismus f aus $\mathrm{Hom}_R (M^i/M^{i+1}, E)$ liegt in A_1, und man kann daher alle Moduln A_{i+1}/A_i, M^i/M^{i+1}, A_1 als R/M-Moduln auffassen, und erhält eine $R/M = F$-Isomorphie $A_{i+1}/A_i \cong \mathrm{Hom}_F (M^i/M^{i+1}, A_1)$. F ist ein Körper (nicht notwendig kommutativ) und A_1 als Vektorraum über F betrachtet muß isomorph zu F sein, denn $E(R/M)$ kann, da M maximal und R/M groß in E ist, keine nichttrivialen direkten Summen enthalten. Damit folgt

$$A_{i+1}/A_i \cong_F \mathrm{Hom}_F(M^i/M^{i+1}, F) \cong_F M^i/M^{i+1},$$

da ja M^i/M^{i+1} ein endlich erzeugter Vektorraum über F ist. Also sind die A_{i+1}/A_i endlich erzeugte F- und damit auch endlich erzeugte R-Moduln.

Mit Induktion zeigt man, daß jedes A_i selbst ein endlich erzeugter R-Linksmodul ist. Wir können Bedingung (5) auf diese Moduln A_i anwenden und erhalten insbesondere A_2 als direkte Summe zyklischer Untermoduln dargestellt; wieder ist das nur möglich, wenn A_2 selbst zyklisch ist, woraus folgt, daß $A_2/A_1=M/M^2$ ein 1-dimensionaler F-Vektorraum ist. Daraus folgt (Beweis von Lemma 2), daß R_M ein Hauptidealring ist. Das beendet den Beweis des Satz 2.

Literaturverzeichnis

[1] R. Baer, Dualisierbare Moduln und Praemoduln, Studies on abelien groups Ausgabeort Berlin Heidelberg, New York 1968.
[2] I. Bucur, Sur le théoreme de décomposition de Lasker-Noether dans le anneaux subcommutatifs, Rev. Math. Pures Appl. **8** (1963), 565—568.
[3] N. Jacobson, The Theory of Rings, *Providence*, 1943.
[4] I. Kaplansky, Modules over Dedekind rings and valuation rings, *Trans. Amer. Math. Soc.* **72** (1952), 327—340.
[5] E. Matlis, Injective modules over Noetherian rings, *Pacific J. Math.* **8** (1958), 511—528.
[6] E. Matlis, Injective modules over Prüfer rings, *Nagoya Math. J.* **15** (1959), 57—69.
[7] A. Rosenberg, D. Zelinsky, Finiteness of the injective hull, *Math. Z.* **70** (1959), 372—380.
[8] O. Zariski, P. Samuel, Commutative Algebra I; Princeton N.Y. Toronto, New York, London,
[9] H. H. Brungs, Generalized discrete valuation rings, *Canad. J. Math.* **21** (1969), 1404—1408.
1958.
[10] G. Pollák, Über die Struktur kommutativer Hauptidealringe, *Acta Sci. Math. Szeged* **22** (1961), 62—74.
[11] F. Szász, Bemerkungen zu assoziativen Hauptidealringe, *Indag. Math.* **23** (1961), 577—583.
[12] F. Szász, Die Ringe, deren endlich erzeugbare echte Unterringe Hauptrechtsideale sind, Acta Math. Acad Sci. Hung. 13 (1962), 115—132.
[13] Dan Barbelian, Teoria Aritmetica a Idealelor, (rumänisch) *Bucureşti*, 1956.
[14] J. Lambek, Lectures on Rings and Moduls, *Massachusetts*, *Toronto*, *London*, 1966.
[15] L. Rédei, Algebra I. (in English), *Budapest*, 1967.

(Eingegangen am 11. Januar 1969.)