Bemerkungen zu einem Satz der Herren Turán und Clunie über das Verhalten von Potenzreihen auf dem Rande des Konvergenzkreises. II.[1])

Von WOLFGANG SCHWARZ (Frankfurt am Main)

1. Einleitung. Sei die komplexe Zahl ζ, $0<|\zeta|<1$, vorgegeben; die durch

$$\Phi(w) = (w-\zeta)(1-\bar{\zeta}w)^{-1} \tag{1.1}$$

definierte Funktion Φ bildet den abgeschlossenen Einheitskreis $E=\{w\in\mathbf{C},\ |w|\leqq 1\}$ konform auf sich ab[2]).

P. TURÁN [6] warf 1958 die Frage auf, ob das Konvergenzverhalten von Potenzreihen auf dem Rande des Konvergenzkreises eine konforme Invariante sei; TURÁNS überraschende Antwort lautete „nein" (man vgl. [6], [1] oder [4]).

Wir sagen, daß die Funktion $f\colon E\to\mathbf{C}$ sich unter der Abbildung Φ *„konvergenz-schlecht"* verhält, wenn f holomorph im Innern E^0 von E ist, die Potenzreihe $\sum a_n z^n$ von f in $z=1$ konvergiert, jedoch die Potenzreihe $\sum b_n w^n$ der zusammengesetzten Funktion $f^* = f\circ\Phi$ in

$$w_0 = \Phi^{-1}(1) = (1+\zeta)(1+\bar{\zeta})^{-1} \tag{1.2}$$

divergiert. Über TURÁN hinausgehend zeigte J. CLUNIE [1]: *Es gibt in E stetige Funktionen f, die sich unter Φ „konvergenz-schlecht" verhalten.*

Der Verfasser verschärfte in [4] dieses Ergebnis etwas durch Benützung des Satzes von BANACH—STEINHAUS — mit CLUNIES Hilfssätzen. P. TURÁN fragte in einem Brief vom 7. 8. 1967 nach der Existenz in E stetiger Funktionen mit einem gewissen Stetigkeitsmodul, die sich unter Φ konvergenz-schlecht verhalten: Gibt es solche Funktionen, die für $h\to 0+$ die Abschätzung

$$\omega(f;h) := \sup_{|\vartheta|\leqq\pi,\ |t|\leqq h} |f(e^{i(\vartheta+t)})-f(e^{i\vartheta})| = O\left\{\left(\log\frac{1}{h/2\pi}\right)^{-1}\right\} \tag{1.3}$$

[1]) Über die Ergebnisse dieser Note hat der Verfasser in Gießen am 11. 7. 1969 vorgetragen. — Herrn K. KIRCHGÄSSNER danke ich für nützliche Hinweise.

[2]) Die Umkehrabbildung zu Φ wird mit Φ^{-1} bezeichnet.

erfüllen?[3]) TURÁN erzielte das (unveröffentlichte) Ergebnis:

Es gibt eine in E stetige Funktion f mit

$$\omega(f;h) = O\left\{\left(\log\log\frac{1}{h/4\pi}\right)^{-1}\right\},$$

die sich unter Φ konvergenz-schlecht verhält.

Dieses Ergebnis soll zu folgendem Satz verschärft werden:

Satz 1. *Sei $K(h)$ eine positive, auf $(0,\pi]$ stetige Funktion, die für $h\searrow 0+$ monoton (beliebig langsam) gegen Unendlich strebt und der Abschätzung $K(h) = o\left(\log\frac{1}{h/4\pi}\right)$ genügt; sei weiter $K(h)\cdot\left(\log\frac{1}{h/4\pi}\right)^{-1} \nearrow$ für $h\nearrow$, $h\in(0,\pi]$. Dann gibt es überabzählbar viele in E stetige Funktionen $f: E\to \mathbf{C}$ mit dem Stetigkeitsmodul*

$$\omega(f;h) = O\left(K(h)\cdot\left\{\log\frac{1}{h/4\pi}\right\}^{-1}\right), \tag{1.4}$$

die sich unter der Abbildung Φ konvergenz-schlecht verhalten.

Korollar 1. *Ist $0<\delta<1$, so gibt es überabzählbar viele in E stetige Funktionen f mit dem Stetigkeitsmodul*

$$\omega(f;h) = O\left(\left\{\log\frac{1}{h/4\pi}\right\}^{-\delta}\right), \tag{1.4'}$$

die sich unter der Abbildung Φ konvergenz-schlecht verhalten.

Korollar 2. *Es gibt überabzählbar viele in E stetige Funktionen f mit dem Stetigkeitsmodul*

$$\omega(f;h) = O\left(\frac{\log\log\frac{e^e}{h/4\pi}}{\log\frac{1}{h/4\pi}}\right) \tag{1.4''}$$

die sich unter der Abbildung Φ konvergenz-schlecht verhalten.

Bemerkung. Mit der hier verwendeten Methode kann die in (1. 3) verlangte Abschätzung des Stetigkeitsmoduls nicht erreicht werden, da dann die Partialsummen der Potenzreihe für f^* beschränkt sind [vgl. Fußnote 3)], also im Satz von BANACH—STEINHAUS die erste Alternative nicht ausgeschlossen werden kann (vgl. § 4).

[3]) Aus der Theorie der Fourierreihen weiß man, daß für eine periodische, stetige Funktion g aus $\omega(g;h) = o(\{\log 1/(h/4\pi)\}^{-1})$ Konvergenz der Fourierreihe von g folgt ([7], II. 10. 3; Satz von DINI—LIPSCHITZ). Ist $\omega(g;h) = O(\{\log 1/(h/4\pi)\}^{-1})$, so sind die Partialsummen der Fourierreihe beschränkt ([7], VIII, 2). Diese Ergebnisse übertragen sich auf unser Problem; stetige Funktionen f mit $\omega(f;h) = o(\{\log 1/(h/4\pi)\}^{-1})$, die sich unter Φ konvergenz-schlecht verhalten, gibt es nicht.

2. Banachräume von Funktionen mit Stetigkeitsmodul. Ist $f: E \to \mathbf{C}$ stetig, so wurde der Stetigkeitsmodul $\omega(f; \cdot)$ von f für $0 \leqq h \leqq \pi$ durch

$$\omega(f; h) = \sup_{\substack{-\pi \leqq \vartheta \leqq \pi \\ -h \leqq t \leqq h}} |f(e^{i(\vartheta+t)}) - f(e^{i\vartheta})| \tag{2.1}$$

definiert. Ist $W: [0, \pi] \to \mathbf{R}$ eine gegebene, stetige, auf $(0, \pi]$ positive, monoton wachsende Funktion mit $W(0)=0$, so daß $W(h)/h$ monoton abnimmt (für $h \nearrow$), so ist der Vektorraum

$$X_W = \left\{ f: E \to \mathbf{C};\, f \text{ stetig in } E,\ \sup_{h \in (0, \pi]} \frac{\omega(f; h)}{W(h)} < \infty \right\} \tag{2.2}$$

mit der Norm

$$\|f\|_W = \max \left\{ \|f\|_u,\ \sup_{h \in (0, \pi]} \big(\omega(f; h)/W(h)\big) \right\} \tag{2.3}$$

ein Banachraum[4]); hierbei ist

$$\|f\|_u = \sup_{z \in E} |f(z)|. \tag{2.4}$$

Sei cCA_W der Vektorraum der in E stetigen, in E^0 holomorphen Funktionen f, deren Maclaurinreihen $\sum a_n z^n$ in $z=1$ konvergieren und die $\sup_{h \in (0, \pi)} \{\omega(f; h)/W(h)\} < \infty$ erfüllen. Dann gilt

Lemma 1. *Mit der Norm*

$$\|f\| = \max \{ \|f\|_{cs} + \|f\|_u,\ \|f\|_W \} \tag{2.5}$$

ist cCA_W ein Banachraum.[5])

Beweis. Sei $\{f_n\}$ eine $\|\,.\,\|$-Cauchyfolge in cCA_W. Dann ist $\{f_n\}$ eine $\|\,.\,\|_W$-Cauchyfolge in X_W und konvergiert gegen $f \in X_W$. Ebenso ist $\{f_n\}$ eine $\|\,.\,\|_{cCA}$-Cauchyfolge im Banachraum cCA der in E stetigen, in E^0 holomorphen Funktionen, deren Potenzreihen $\sum a_n z^n$ in $z=1$ konvergieren,[6]) mit der Norm $\|f\|_{cCA} = \|f\|_{cs} + \|f\|_u$; somit konvergiert $\{f_n\}$ in der Norm $\|\,.\,\|_{cCA}$ gegen eine Funktion $g \in cCA$. Die Funktionen f und g stimmen in E überein (wegen der gleichmäßigen Konvergenz von $\{f_n\}$ gegen f bzw. g). Somit konvergiert die Cauchyfolge $\{f_n\}$ in cCA_W.

3. Hilfssätze.

Lemma 2. (*vgl.* [1], *S.* 167). *Die* Fejér*polynome*

$$h_k(z) = \frac{z}{k} + \frac{z^2}{k-1} + \cdots + \frac{z^k}{1} - \frac{z^{k+2}}{1} - \cdots - \frac{z^{2k+1}}{k} \tag{3.1}$$

[4]) Dies findet man im wesentlichen bei Lorentz [2] (S. 49 f). Die Behauptung kann leicht gezeigt werden, da eine $\|\,.\,\|_W$-Cauchyfolge auch $\|\,.\,\|_u$-Cauchyfolge ist, also einen $\|\,.\,\|_u$-Limes besitzt, der die gewünschten Eigenschaften hat.

[5]) Hierbei ist, wie in [4], $\|f\|_{cs} = \sup_N \left| \sum_{n \leqq N} a_n \right|$.

[6]) Vgl. [4], § 2.

haben folgende Eigenschaften:

a) Mit einer absoluten Konstanten M ist $\|h_k\|_u \leqq M$ *für* $k=1, 2, \ldots$.

b) $h_k(1)=0$.

c) Die k-te Partialsumme von $h_k(z)$ *bei* $z=1$ *ist größer als* $\log k$.

Lemma 3. *Sei* ζ *mit* $0<|\zeta|<1$ *gegeben und sei* φ *durch*

$$e^{i\varphi}=w_0=\Phi^{-1}(1) \tag{3.2}$$

definiert. Ist $k \geqq 2|\zeta|\cdot(1-|\zeta|)^{-1}$ *und* $m \geqq m(k)$ *mit*

$$m(k)=k^{12}, \tag{3.3}$$

so sind alle Partialsummen der Maclaurinreihe von

$$\{\Phi^{-1}(w)\}^m h_k\big(e^{-i\varphi}\Phi^{-1}(w)\big)$$

an der Stelle $w=1$ *absolut beschränkt durch die nur von* ζ *abhängige Konstante*

$$M(\zeta)=2\max\left\{\frac{320e^2}{\{2\pi|\zeta|\cdot(1-|\zeta|)^3\}^{1/2}};\ \frac{48e^2}{(1-|\zeta|)^2}\right\}. \tag{3.4}$$

Dieses Lemma stammt [bis auf unsere sehr grobe Angabe von $m(k)$ und $M(\zeta)$] von Clunie [1] (S. 166). Für uns kommt es auf auf die Abhängigkeit von $m(k)$ von k an; deswegen wird in § 5 der Beweis von Lemma 3 nach Clunie vorgerechnet.

Satz von Banach—Steinhaus (*vgl.* [3], 5. 8). *Sei F ein Banachraum, Y ein normierter Vektorraum und* Λ_N ($N=1, 2, \ldots$) *eine Familie beschränkter linearer Abbildungen von F in Y. Entweder existiert dann eine Konstante* $K<\infty$ *mit*

$$\|\Lambda_N\| \leqq K \quad \text{für alle} \quad N \tag{3.5}$$

oder es existiert eine dichte G_δ*-Menge*[7]) $G\subset F$ *mit*

$$\sup_N \|\Lambda_N f\|_Y=\infty \quad \text{für alle} \quad f\in G. \tag{3.6}$$

4. Beweis von Satz 1. Sei W eine Funktion, die die zu Anfang von § 2 gegebenen Bedingungen erfüllt[8]). Sei f aus cCA_W; mit (1. 1) setzen wir

$$f^*(w)=f\big(\Phi(w)\big)=\sum b_n\cdot w^n \tag{4.1}$$

und bilden mit $w_0=\Phi^{-1}(1)=e^{i\varphi}$ die Partialsummen

$$s_N(w_0;f^*)=\sum_{n\leqq N} b_n\cdot w_0^n, \qquad N=1, 2, \ldots. \tag{4.2}$$

Die durch

$$\Lambda_N f=s_N(w_0;f^*) \tag{4.3}$$

definierten linearen Abbildungen Λ_N des Banachraumes cCA_W in den normierten linearen Raum C sind beschränkt, wie in [4], § 4 vorgerechnet wurde. Der Satz von

[7]) $\|\Lambda\|:=\sup_{f\in F, f\neq 0}\|\Lambda f\|_Y/\|f\|_F$; eine G_δ-Menge ist abzählbarer Durchschnitt offener Mengen.

[8]) W wird in (4. 8) geeignet gewählt.

BANACH—STEINHAUS ist damit anwendbar. Es bleibt, die erste Alternative (3. 5) dieses Satzes auszuschließen.

Wir bilden für $k \geqq 2|\zeta|\cdot(1-|\zeta|)^{-1}$ mit den FEJÉRpolynomen (3. 1) die Funktion

$$H_k(z) = h_k\big(e^{-i\varphi}\Phi^{-1}(z)\big)\cdot\{\Phi^{-1}(z)\}^{m(k)}, \tag{4. 4}$$

wobei $m(k)$ durch (3. 3) bestimmt ist. Dann ist $H_k \in cCA$; wegen Lemma 2 und 3 ist[9])

$$\|H_k\|_{cCA} \leqq M + M(\zeta). \tag{4. 5}$$

Die Berechnung der $\|\,.\,\|_W$-Norm von H_k ist mühsamer. Zunächst ist nach Lemma 2a) gleichmäßig in k, ϑ und t

$$\Delta(k, \vartheta, t) := |H_k(e^{i(\vartheta+t)}) - H_k(e^{i\vartheta})| \leqq 2M. \tag{4. 6'}$$

Andererseits ist (nach kurzer Zwischenrechnung)

$$\Delta(k, \vartheta, t) = \left|\int\limits_{\vartheta}^{\vartheta+t} \frac{dH_k(e^{i\theta})}{d\theta}\,d\theta\right| \leqq \frac{1-|\zeta|^2}{(1-|\zeta|)^2}\int\limits_{\vartheta}^{\vartheta+t}\left\{\left|h_k'\big(e^{-i\varphi}\Phi^{-1}(e^{i\theta})\big)\right| + M\cdot m(k)\right\}d\theta.$$

Berücksichtigt man, daß für $|z| \leqq 1$

$$|h_k'(z)| \leqq (2k+1)\cdot 2k \leqq 6k^2$$

ist, so erhält man

$$\Delta(k, \vartheta, t) \leqq \frac{2}{1-|\zeta|}\cdot\big(6k^2 + M\cdot m(k)\big)\cdot t. \tag{4. 6''}$$

Nach (2. 3) wird mit (4. 6′) und (4. 6″)

$$\|H_k\|_W \leqq \sup_{h\in(0,\pi]} \frac{1}{W(h)}\cdot\Big(\sup_{|t|\leqq h,\,|\vartheta|\leqq\pi} \Delta(k, \vartheta, t)\Big) + \|H_k\|_u \leqq$$

$$\leqq \sup_{h\in(0,\pi]} \frac{1}{W(h)}\cdot\min\left\{2M,\ \frac{2}{1-|\zeta|}\cdot\big(6k^2 + M\cdot m(k)\big)\cdot h\right\} + M;$$

da $h/W(h)$ mit h monoton wächst, folgt

$$\|H_k\|_W \leqq C_1\cdot\left\{W\left(\frac{1}{6k^2 + M\cdot m(k)}\right)\right\}^{-1} + M \tag{4. 7}$$

mit $C_1 = 2\max\{(1-|\zeta|)^{-1}, M\}$.

Somit erhält man, zunächst mit (4. 3) und Lemma 2c), dann mit (4. 5) und (4. 7)

$$\|\Lambda_{k+m(k)}\| \geqq \frac{|\Lambda_{k+m(k)}H_k|}{\|H_k\|} = \frac{\left|s_{k+m(k)}\big(e^{i\varphi};\, h_k(e^{-i\varphi}z)\cdot z^{m(k)}\big)\right|}{\|H_k\|} \geqq$$

$$\geqq \frac{\log k}{2M + M(\zeta) + C_1\cdot\left\{W\left(\frac{1}{6k^2 + M\cdot m(k)}\right)\right\}^{-1}}.$$

---

9) Vgl. [4], § 4. M(ζ) ist in (3. 4) gegeben.

Wir wählen schließlich

$$(4.8) \qquad W(h) = K(h)\cdot\left\{\log\frac{1}{h/4\pi}\right\}^{-1} \quad \text{für} \quad h\in(0,\pi], \qquad W(0)=0,$$

mit der in Satz 1 gegebenen Funktion K(.); diese Wahl ist zulässig, denn W in (4. 8) ist stetig, positiv in $(0, \pi]$, es ist $W(0)=0$ und W und $h/W(h) = \frac{1}{K(h)}\cdot h\log\frac{1}{h/4\pi}$ wachsen monoton mit h. Wegen $m(k)=k^{12}$ folgt (für großes k) mit einer von k unabhängigen Konstanten C_2

$$\|\Lambda_{k+m(k)}\| \geqq \log k\cdot\left\{2M+M(\zeta)+C_1\frac{\log\{(6k^2+M\cdot k^{12})\cdot 4\pi\}}{K(1/(6k^2+Mk^{12}))}\right\}^{-1} \geqq$$
$$\geqq C_2(K,\zeta)\cdot K\big(1/(6k^2+M\cdot k^{12})\big).$$

Da der letzte Ausdruck für großes k beliebig groß gemacht werden kann, muß im Satz von BANACH—STEINHAUS die Alternative (3. 6) gelten, d.h. es gibt überabzählbar viele [10]) Funktionen $f\in cCA_W$, für die $\sup|\Lambda_N f|=\infty$ ist, d.h. für die die Maclaurinreihe von $f^*=f\circ\Phi$ im Punkte w_0 divergiert. Damit ist Satz 1 bewiesen. [11])

5. Beweis von Lemma 3. In diesem Paragraphen folgen wir CLUNIES Beweisen in [1], achten jedoch auf die Abhängigkeit der Abschätzungen von ζ und k. Zunächst beweisen wir

Lemma 4. ([1], S. 166). *Das Integral*

$$(5.1) \qquad I = (2\pi i)^{-1}\int_{|\lambda|=1}\lambda^m\{\Phi(e^{i\varphi}\lambda)\}^{-(j+1)}\,d\lambda$$

kann für alle ganzen Zahlen $m\geqq 1$, $j\geqq 0$ *durch*

$$(5.2) \qquad |I| \leqq 3(1-|\zeta|)^{-1}\cdot\frac{j+1}{m}$$

und für alle natürlichen Zahlen m, j *durch*

$$(5.3) \qquad |I| \leqq 20\{2\pi|\zeta|\cdot(1-|\zeta|)\}^{-1/2}\cdot j^{-1/3}$$

abgeschätzt werden.

BEWEIS. Wir setzen $\lambda=e^{it}$ und $\{\Phi(e^{i\varphi}\cdot\lambda)\}^{-1}=\exp\{i\psi(t)\}$ mit einer reellwertigen Funktion $\psi(t)$. Mit $\zeta=|\zeta|\cdot e^{i\eta}$ ist

$$(5.4) \qquad \psi'(t) = \frac{e^{i(\varphi+t)}(|\zeta|^2-1)}{(1-\bar\zeta e^{i(\varphi+t)})(e^{i(\varphi+t)}-\zeta)} = -\frac{1-|\zeta|^2}{1-2|\zeta|\cos(\varphi-\eta+t)+|\zeta|^2},$$

also wird

$$(5.5) \qquad |\psi'(t)| \leqq 2(1-|\zeta|)^{-1}.$$

[10]) Vgl. [4], Lemma 4.

[11]) Tatsächlich wurde eine etwas schärfere Fassung von Satz 1 bewiesen, die ähnlich wie in [4], § 4 ausgesprochen werden könnte und wie in [4], § 5, verschärft werden könnte.

Aus

$$2\pi I = \int_0^{2\pi} e^{i(j+1)\psi(t)} \cdot e^{i(m+1)t}\, dt \tag{5. 6}$$

folgt durch partielle Integration mit (5. 5) sofort

$$|2\pi I| \leqq 2\cdot(m+1)^{-1} + (j+1)\cdot(m+1)^{-1}\cdot 4\pi(1-|\zeta|)^{-1},$$

also ist (5. 2) richtig.

Um (5. 3) herzuleiten, nehmen wir o. B. d. A. an, daß $\varphi=\eta=0$ ist; wir zerlegen das Integral (5. 6) in

$$2\pi I = \int_0^{j^{-1/3}} + \int_{j^{-1/3}}^{\pi-j^{-1/3}} + \int_{\pi-j^{-1/3}}^{\pi+j^{-1/3}} + \int_{\pi+j^{-1/3}}^{2\pi-j^{-1/3}} + \int_{2\pi-j^{-1/3}}^{2\pi} = I_1 + \cdots + I_5.$$

I_1, I_3, I_5 werden trivial abgeschätzt; man erhält

$$|I_1| + |I_3| + I_5| \leqq 4j^{-1/3}. \tag{5. 7}$$

I_2 und I_4 werden mit Hilfe eines van der Corput-Lemmas abgeschätzt; hierzu darf die zweite Ableitung des Exponenten $\{(j+1)\cdot\psi(t)+(m+1)t\}$ des Integranden in (5. 6) der Null nicht zu nahe kommen. Wegen (5. 4) (und mit $\varphi=\eta=0$) ist

$$\{(j+1)\psi(t)+(m+1)t\}'' = (j+1)\cdot\frac{(1-|\zeta|^2)2|\zeta|\sin t}{(1-2|\zeta|\cos t+|\zeta|^2)^2};$$

im Intervall $[j^{-1/3}, \pi-j^{-1/3}]$ wird somit

$$\{\cdots\}'' \geqq (j+1)\cdot 2|\zeta|(1-|\zeta|^2)\cdot 2\pi^{-1}j^{-1/3}\cdot\{1+|\zeta|\}^{-4} \geqq C_3 j^{2/3}$$

mit $C_3 = |\zeta|(1-|\zeta|)/2\pi$. Nach [5], Lemma 4. 4 erhält man also

$$|I_2| \leqq 8\cdot C_3^{-1/2} j^{-1/3}. \tag{5. 8}$$

Dieselbe Abschätzung gilt für I_4, und aus (5. 7) und (5. 8) folgt schließlich

$$|I| \leqq \frac{1}{2\pi} j^{-1/3}\left\{4+\frac{16\sqrt{2\pi}}{\{|\zeta|(1-|\zeta|)\}^{1/2}}\right\} \leqq \frac{20}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{|\zeta|(1-|\zeta|)}}\cdot j^{-1/3}.$$

Nun kann Lemma 3 bewiesen werden. Sei

$$H_k(w) = \{\Phi^{-1}(w)\}^m \cdot h_k\big(e^{-i\varphi}\Phi^{-1}(w)\big).$$

Die j-te Partialsumme von $H=H_k$ bei $w=1$ ist [12])

$$s_j = H(0) + \frac{1}{1!}H'(0) + \cdots + \frac{1}{j!}H^{(j)}(0) = (2\pi i)^{-1}\int_{|w|=1}\left(\frac{H(w)}{1-w}\right)\cdot\frac{dw}{w^{j+1}}.$$

[12]) Man beachte, daß $H(w)\ (1-w)^{-1}$ wegen $h_k(1)=0$ auf $|w|=1$ holomorph ist.

Mit $\lambda = e^{-i\varphi} \cdot \Phi^{-1}(w)$ ergibt sich nach kurzer Rechnung

$$(5.9) \qquad s_j = \frac{e^{im\varphi}}{2\pi i}\left(\frac{1-|\zeta|^2}{1+\bar\zeta}\right) \cdot \int\limits_{|\lambda|=1} \lambda^m \left(\frac{h_k(\lambda)}{1-\lambda}\,\frac{1}{1-\bar\zeta\lambda e^{i\varphi}}\right)\{\Phi(\lambda e^{i\varphi})\}^{-(j+1)}\,d\lambda.$$

Entwickelt man nun (für $|\lambda| < |\zeta|^{-1}$)

$$(5.10) \qquad h_k(\lambda) \cdot \{(1-\lambda)(1-\bar\zeta\lambda e^{i\varphi})\}^{-1} = \sum_0^\infty \beta_r \lambda^r$$

in eine Potenzreihe, so ist für $k \geqq 2|\zeta|(1-|\zeta|)^{-1}$

$$\beta_r = (2\pi i)^{-1} \int\limits_{|\lambda|=1+1/k} \frac{h_k(\lambda)}{(1-\lambda)(1-\bar\zeta\lambda e^{i\varphi})} \cdot \frac{d\lambda}{\lambda^{r+1}}.$$

Hieraus folgt, wenn man die Abschätzung $\sup\limits_{|\lambda|=1+1/k} |h_k(\lambda)| \leqq 2k \cdot (1+1/k)^{2k+1} \leqq$ $\leqq 4k \cdot e^2$ und die Ungleichung $|1-\bar\zeta\lambda e^{i\varphi}| \geqq \frac{1}{2}(1-|\zeta|)$ für $|\lambda| = 1+1/k$ beachtet,

$$|\beta_r| \leqq \sup_{|\lambda|=1+1/k} |h_k(\lambda)| \cdot \left\{\frac{1}{k} \cdot \frac{1}{2}(1-|\zeta|) \cdot \left(1+\frac{1}{k}\right)^r\right\}^{-1} \leqq$$

$$\leqq 2(1-|\zeta|)^{-1} \cdot 4e^2 k^2 \cdot \left(1+\frac{1}{k}\right)^{-r},$$

also ist

$$(5.11) \qquad \sum_0^\infty |\beta_r| \leqq 2(1-|\zeta|)^{-1} \cdot 4e^2 k^2 (k+1) \leqq \frac{16e^2}{1-|\zeta|} \cdot k^3.$$

Aus (5.9) und (5.10) folgt nun

$$|s_j| \leqq \frac{1-|\zeta|^2}{1-|\zeta|} \cdot \sum_{r=0}^\infty |\beta_r| \cdot \left|\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\lambda|=1} \lambda^{r+m}\{\Phi(\lambda e^{i\varphi})\}^{-(j+1)}\,d\lambda\right|.$$

Die Integrale können nach Lemma 2 abgeschätzt werden. Nach (5.3) und (5.11) ist für $j \geqq k^9$ und alle m

$$|s_j| \leqq 2 \cdot \frac{16e^2}{1-|\zeta|} k^3 \cdot \frac{20}{\{2\pi|\zeta|(1-|\zeta|)\}^{1/2}} \cdot k^{-3}.$$

Ist $0 \leqq j < k^9$, so ist nach (5.2) und (5.11) für $m \geqq m(k) = k^{12}$

$$|s_j| \leqq 2 \cdot \frac{16e^2}{1-|\zeta|} \cdot k^3 \cdot \frac{3}{1-|\zeta|} \cdot \frac{k^9}{m(k)},$$

also folgt Lemma 3 mit der in (3.4) gegebenen Konstanten $M(\zeta)$.

Zusatz bei der Korrektur (26. 5. 1972).
Inzwischen hat Herr K. H. Indlekofer die unter (1.3) genannte Vermutung von P. Turán bewiesen; seine Arbeit wird in den Monatsh. für Math. erscheinen.

Literatur

[1] J. CLUNIE, On equivalent power series. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **18** (1967), 165—169.
[2] G. G. LORENTZ, Approximation of functions, *New York* 1966.
[3] W. RUDIN, Real and complex analysis. *New York* 1966.
[4] W. SCHWARZ, Bemerkungen zu einem Satz der Herren Turán und Clunie über das Verhalten von Potenzreihen auf dem Rande des Konvergenzkreises. Publ. Math. Debrecen **16** (1969), 67—73.
[5] E. C. TITCHMARSH, The theory of the Riemann zeta-function. *Oxford* 1961.
[6] P. TURÁN, A remark concerning the behaviour of a power-series on the periphery of its convergence-circle. *Publ. Inst. Math. Acad. Serbe Sci.*, **12** (1958), 19—26.
[7] A. ZYGMUND, Trigonometric series I. *Cambridge* 1959.

(Eingegangen am 22. September 1969.)