Verallgemeinerte Hankel-Funktionen

Von EKKEHARD KRÄTZEL und HARTMUT MENZER (Jena)

§ 1. Einleitung

Bei der Untersuchung der Anzahl der Partitionen natürlicher Zahlen in k-te Potenzen stieß Wright [4] auf gewisse Verallgemeinerungen der Bessel-Funktionen, die heute unter der Bezeichnung Wright-Funktionen bekannt sind und die für $0<\varrho<\infty$, β beliebig, durch

$$\Phi(\varrho, \beta; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!\,\Gamma(\varrho n+\beta)} \tag{1}$$

definiert sind. Für $\varrho=1$ fallen diese Funktionen auf die gewöhnlichen Bessel-Funktionen $J_\nu(z)$ zurück, und es besteht der Zusammenhang

$$\Phi\left(1, \nu+1; -\frac{z^2}{4}\right) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} J_\nu(z).$$

Bekanntlich lassen sich die Bessel-Funktionen in eine Summe von Hankel-Funktionen erster und zweiter Art aufspalten. Es gilt

$$2J_\nu(z) = H_\nu^{(1)}(z) + H_\nu^{(2)}(z). \tag{2}$$

Die Gleichung (2) legt es nahe, bezüglich $\Phi(\varrho, \beta; z)$ Funktionen zu konstruieren, die eine Übertragung von (2) auf die Wright-Funktionen gestatten. Diese Funktionen sind also als Verallgemeinerungen der Hankel-Funktionen aufzufassen, und wir werden sie in folgendem stets als η-Funktionen bezeichnen.

Andererseits spielen diese Funktionen eine Rolle bei folgendem zahlentheoretischen Problem: Mit natürlichen Zahlen a, b, n, m, k bezeichne

$$d(a, b; k) = \sum_{n^a m^b = k} 1$$

und

$$D(a, b; x) = \sum_{1 \leqq k \leqq x} d(a, b; k).$$

Für große x verhält sich $D(a, b; x)$ in erster Näherung wie

$$\zeta\left(\frac{b}{a}\right) x^{\frac{1}{a}} + \zeta\left(\frac{a}{b}\right) x^{\frac{1}{b}}$$

($a \neq b$, $\zeta(s)$ ist die Riemannsche Zeta-Funktion). Der Rest

$$\Delta(a,b;x) = D(a,b;x) - \zeta\left(\frac{b}{a}\right) x^{\frac{1}{a}} - \zeta\left(\frac{a}{b}\right) x^{\frac{1}{b}}$$

läßt sich, wie in [2] dargestellt, in eine unendliche Reihe entwickeln, die noch gewisse Integrale enthält, die sich aber durch die hier zu entwickelnden η-Funktionen ausdrücken lassen.

§ 2. Definition der η-Funktion

Wir beginnen mit einer besonderen Integraldarstellung der durch (1) definierten Wright-Funktion.

Satz 1. *Unter den Voraussetzungen*

(a) $\varrho < 1, \beta$ *beliebig*, $|\arg z| < \frac{1-\varrho}{2}\pi,\ c > 0$

oder

(b) $$\varrho = 1, \quad \mathrm{Re}\,(\beta) > 1, \quad z > 0, \quad c = 0$$

gilt

(3) $$\Phi(\varrho, \beta; -z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(-c)} \frac{\Gamma(-s)}{\Gamma(\varrho s + \beta)} z^s\, ds.$$

Dabei ist das Integral längs der Vertikalen von $-c-i\infty$ bis $-c+i\infty$ zu führen, und im Falle $c=0$ muß ein Haken um den Nullpunkt geschlagen werden.

Beweis. Vermöge der Funktionalgleichung

(4) $$\Gamma(1-x)\Gamma(x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

kann man das Integral (3) in die Form

(5) $$\Phi(\varrho, \beta; -z) = \frac{1}{2\pi^2 i} \int\limits_{(-c)} \Gamma(-s)\Gamma(1-\varrho s-\beta) \sin \pi(\varrho s+\beta) z^s\, ds$$

bringen. Da sich die Gammafunktion für $|\tau| \to \infty$ wie

$$|\Gamma(\sigma + i\tau)| \sim h\, |\tau|^{\sigma - \frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{2}|\tau|}$$

verhält, folgt für den Betrag des Integranden in (5) mit $s = -c + i\tau$

$$|\Gamma(-s)\Gamma(1-\varrho s-\beta) \sin \pi(\varrho s+\beta) z^s| \sim h_1\, |\tau|^{(1+\varrho)c - \mathrm{Re}(\beta)} e^{\left[\frac{\pi}{2}(\varrho-1)+\arg(z)\right]|\tau|}$$

für $|\tau| \to \infty$. Daraus liest man unmittelbar die Konvergenz des Integrals unter den Bedingungen (a) und (b) ab. Durch Verschieben des Integrationsweges nach rechts über die Polstellen von Γ(-s) entsteht ohne weiteres die Reihe (1), womit die Darstellung (3) bewiesen ist.

Die Darstellung (5) gibt in Zusammenhang mit (2) den Anlaß, Verallgemeinerungen der Hankel-Funktionen einzuführen.

Definition. *Als η-Funktion werde die durch das Integral*

$$\eta(\varrho, \beta; z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(c)} \Gamma(s)\Gamma(\varrho s + 1 - \beta) z^{-s}\, ds \tag{6}$$

unter den Voraussetzungen $0 < \varrho < \infty$, β *beliebig*, $|\arg z| < (1+\varrho)\pi/2$, $c > 0$, $c > (\mathrm{Re}\,(\beta) - 1)/\varrho$ *dargestellte Funktion bezeichnet.*

Bei Verwendung von (6) in (5) folgt für $\varrho \leqq 1$, $|\arg z| < (1-\varrho)\pi/2$

$$2\pi i \Phi(\varrho, \beta; -z) = e^{\pi i \beta} \eta(\varrho, \beta; e^{\pi i \varrho} z) - e^{-\pi i \beta} \eta(\varrho, \beta; e^{-\pi i \varrho} z). \tag{7}$$

Aus den bekannten Integraldarstellungen für die Hankel-Funktionen

$$H_\nu^{(1)} = -\frac{1}{2\pi^2} e^{-\frac{\pi i \nu}{2}} \int_{(c)} \Gamma(s)\Gamma(s-\nu) \left(\frac{-iz}{2}\right)^{\nu - 2s} ds$$

$$\left(c > 0,\ c > \mathrm{Re}\,(\nu),\ |\arg(-iz)| < \frac{\pi}{2}\right),$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = \frac{1}{2\pi^2} e^{\frac{\pi i \nu}{2}} \int_{(c)} \Gamma(s)\Gamma(s-\nu) \left(\frac{iz}{2}\right)^{\nu - 2s} ds$$

$$\left(c > 0,\ c > \mathrm{Re}\,(\nu),\ |\arg(iz)| < \frac{\pi}{2}\right)$$

ergibt sich

$$\eta\left(1, \nu+1; e^{-\pi i} \frac{z^2}{4}\right) = \pi i e^{\pi i \nu} \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} H_\nu^{(1)}(z),$$

$$\eta\left(1, \nu+1; e^{\pi i} \frac{z^2}{4}\right) = -\pi i e^{-\pi i \nu} \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} H_\nu^{(2)}(z),$$

so daß (2) als Spezialfall in (7) enthalten ist.

§ 3. Einige Eigenschaften der η-Funktion

Satz 2. *Für* $\varrho n + \beta \not\equiv 0 \bmod 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, *gilt*

$$\eta(\varrho, \beta; z) = \pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n!\, \Gamma(\varrho n + \beta) \sin \pi (\varrho n + \beta)} - \tag{8}$$

$$-\pi \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{\frac{m+1-\beta}{\varrho}}}{m!\, \Gamma\left(\frac{m+1-\beta}{\varrho} + 1\right) \sin \pi \left(\frac{m+1-\beta}{\varrho}\right)}.$$

Für $\varrho n + \beta \equiv 0 \bmod 1$ setze man $m = \varrho n + \beta - 1$ im Sinne eines Grenzüberganges.

BEWEIS. Für $\varrho n+\beta \not\equiv 0 \bmod 1$ hat der Integrand in (6) nur Pole 1. Ordnung. Durch Abschöpfen der Residuen der Pole ergibt sich

$$\eta(\varrho, \beta; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1-\beta-\varrho n)}{n!}(-z)^n + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\dfrac{\beta-1-m}{\varrho}\right)(-1)^m}{m!} z^{\frac{m-\beta+1}{\varrho}},$$

und bei Verwendung von (4) erhält man (8).

Überprüft man die Relation (7) mit Hilfe der Reihenentwicklung (8), so erkennt man, daß die dort angegebenen Einschränkungen über ϱ und z weggelassen werden können.

Unter Ausnutzung von (6) oder (8) ergeben sich leicht die folgenden Gleichungen:

$$\eta(\varrho, \beta; z^{\varrho}) = \frac{1}{\varrho} z^{1-\beta} \eta\left(\frac{1}{\varrho},\, 1+\frac{1-\beta}{\varrho}; z\right), \tag{9}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \eta(\varrho, \beta; z) = -\eta(\varrho, \beta+\varrho; z), \tag{10}$$

$$(1-\beta)\eta(\varrho, \beta\, z) = \eta(\varrho, \beta-1; z) - \varrho z \eta(\varrho, \beta+\varrho; z). \tag{11}$$

Die Gleichung (2) gibt eine Darstellung der Bessel-Funktion durch die Hankel-Funktionen. Umgekehrt lassen sich bekanntlich die Hankel-Funktionen durch die Bessel-Funktionen ausdrücken. Es gilt:

$$H_\nu^{(1)}(z) = \frac{J_{-\nu}(z) - e^{-\pi i \nu} J_\nu(z)}{i \sin \pi\nu}$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = \frac{e^{\pi i \nu} J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{i \sin \pi\nu}$$

Eine Übertragung dieser Gleichungen auf die η-Funktion gelingt nicht, statt dessen ergibt sich nur der folgende Zusammenhang:

Satz 3. *Es gilt*

$$\begin{aligned} &e^{\pi i \beta} \eta(\varrho, \beta; e^{\pi i(\varrho-1)} z) - e^{-\pi i \beta} \eta(\varrho, \beta; e^{-\pi i(\varrho-1)} z) = \\ &= 2\pi i \left\{ \Phi(\varrho, \beta; z) - \frac{1}{\varrho} z^{\frac{1-\beta}{\varrho}} \Phi\left(\frac{1}{\varrho}, 1+\frac{1-\beta}{\varrho}; z^{\frac{1}{\varrho}}\right)\right\}. \end{aligned} \tag{12}$$

BEWEIS. Ersetzt man in (7) ϱ durch $\dfrac{1}{\varrho}$ und β durch $1+\dfrac{1-\beta}{\varrho}$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} -e^{\pi i \frac{1-\beta}{\varrho}} \eta\left(\frac{1}{\varrho}, 1+\frac{1-\beta}{\varrho}; e^{\frac{\pi i}{\varrho}} z\right) + e^{-\pi i \frac{1-\beta}{\varrho}} \eta\left(\frac{1}{\varrho}, 1+\frac{1-\beta}{\varrho}; e^{-\frac{\pi i}{\varrho}} z\right) = \\ = 2\pi i \Phi\left(\frac{1}{\varrho}, 1+\frac{1-\beta}{\varrho}; -z\right) \end{aligned}$$

und vermittels (9)

$$-\eta(\varrho,\beta;e^{\pi i}z^{\varrho})+\eta(\varrho,\beta;e^{-\pi i}z^{\varrho}) = \frac{2\pi i}{\varrho}z^{1-\beta}\Phi\left(\frac{1}{\varrho},1+\frac{1-\beta}{\varrho};-z\right).$$

Mit $z\to(e^{\pi i(\varrho-1)}z)^{\frac{1}{\varrho}}$ wird daraus

$$-e^{\pi i\beta}\eta(\varrho,\beta;e^{\pi i\varrho}z)+e^{\pi i\beta}\eta(\varrho,\beta;e^{\pi i(\varrho-2)}z) =$$

$$= -\frac{2\pi i}{\varrho}\left(\frac{e^{\pi i}}{z}\right)^{\frac{\beta-1}{\varrho}}\Phi\left(\frac{1}{\varrho},1+\frac{1-\beta}{\varrho};(e^{-\pi i}z)^{\frac{1}{\varrho}}\right).$$

Nach Addition dieser Gleichung und der Gleichung (7) folgt

$$e^{\pi i\beta}\eta(\varrho,\beta;e^{\pi i(\varrho-2)}z)-e^{-\pi i\beta}\eta(\varrho,\beta;e^{-\pi i\varrho}z) =$$

$$= 2\pi i\left\{\Phi(\varrho,\beta;-z)-\frac{1}{\varrho}\left(\frac{e^{\pi i}}{z}\right)^{\frac{\beta-1}{\varrho}}\Phi\left(\frac{1}{\varrho},1+\frac{1-\beta}{\varrho};(e^{-\pi i}z)^{\frac{1}{\varrho}}\right)\right\},$$

und die Substitution $z\to e^{\pi i}z$ liefert (12).

Satz 4. *Unter den Voraussetzungen* $0<\varrho<\infty$, $|\arg z|<\frac{\pi}{2}$ *oder* $0<\varrho<\infty$, $|\arg z| = \frac{\pi}{2}$, $\mathrm{Re}(\beta)<\varrho+1$ *gilt*

$$\eta(\varrho,\beta;z) = \int_0^\infty u^{-\beta}e^{-(u+zu^{-\varrho})}\,du. \tag{13}$$

Beweis. Es genügt, sich auf den Fall der absoluten Konvergenz des Integrals zu beschränken. Dann kann man den Faltungssatz der Mellintransformation anwenden. Ist für $\nu=1,2$

$$f_\nu(s) = M\{F_\nu(t)\} = \int_0^\infty t^{s-1}F_\nu(t)\,dt,$$

so gilt

$$M\left\{\int_0^\infty u^{\alpha}F_1\left(\frac{t}{u}\right)F_2(u)\,du\right\} = f_1(s)f_2(s+\alpha+1).$$

Wegen

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty u^{s-1}e^{-u}\,du$$

folgt für das Integral in (13)

$$M\left\{\int_0^\infty u^{-\beta}e^{-\left(u+\left(\frac{t}{u}\right)^{\varrho}\right)}du\right\} = \frac{1}{\varrho}\Gamma\left(\frac{s}{\varrho}\right)\Gamma(s+1-\beta),$$

und durch Umkehrung der Mellin-Transformation und wegen (6):

$$\int_0^\infty u^{-\beta}e^{-\left(u+\left(\frac{t}{u}\right)^{\varrho}\right)}du = \frac{1}{2\pi i\varrho}\int_{(c)}\Gamma\left(\frac{s}{\varrho}\right)\Gamma(s+1-\beta)t^{-s}\,ds = \eta(\varrho,\beta;t^{\varrho}).$$

§ 4. Asymptotische Entwicklung

Unter Ausnutzung der Integraldarstellung (13) soll mit Hilfe der Sattelpunktsmethode für die η-Funktion eine asymptotische Entwicklung gefunden werden. Aus (13) ergibt sich unmittelbar

$$\eta(\varrho, \beta; z^{\varrho+1}) = z^{1-\beta} \int_0^\infty u^{-\beta} e^{-z(u+u^{-\varrho})} du \tag{14}$$

für $|\arg z| < \frac{\pi}{2}$. Wir setzen

$$z = \xi e^{i\gamma}, \quad h(u) = e^{i\gamma}(u + u^{-\varrho})$$

Die Sattelpunkte sind durch $h'(u) = 0$ gegeben. Bestimmt durch die Lage des Integrationsweges verwenden wir den Sattelpunkt

$$u_0 = \varrho^{\frac{1}{\varrho+1}} > 0.$$

Die Fallinien durch u_0 genügen der Gleichung

$$\operatorname{Im}\{h(u)\} - \operatorname{Im}\{h(u_0)\} = 0,$$

woraus sich mit

$$u = re^{i\varphi}, \quad r \geqq 0, \quad |\varphi| < \pi$$

$$r^{\varrho+1} \sin(\gamma + \varphi) + \sin(\gamma - \varrho\varphi) - r^\varrho \left(1 + \frac{1}{\varrho}\right) u_0 \sin\gamma = 0 \tag{15}$$

ergibt. Mit $\gamma = 0$ ist $\varphi = 0$ eine Fallinie, und man gelangt zu einer asymptotischen Entwicklung von $\eta(\varrho, \beta; z^{\varrho+1})$ für $|\arg z| < \frac{\pi}{2}$. Um den Gültigkeitsbereich der Entwicklung auszudehnen, wird man $\gamma \neq 0$ ebenfalls zulassen und eine Deformation des Integrationsweges längs der Fallinie (15) vornehmen. Dies gelingt ohne weiteres unter den Voraussetzungen $|\arg \xi| < \frac{\pi}{2}$, $|\gamma| < \pi$. Aus (14) wird

$$\eta(\varrho, \beta; z^{\varrho+1}) = z^{1-\beta} \int_C u^{1-\beta} e^{-\xi h(u)} du \tag{16}$$

mit dem durch (15) gegebenen Integrationsweg C, wobei für $r \to 0$ $\varphi \to \frac{x}{\varrho}$ und für $r \to \infty$ $\varphi \to -\gamma$ gilt. Wegen $|\gamma| < \pi$ und $|\varphi| < \pi$ muß zusätzlich $\varrho \geqq 1$ gefordert werden. Bei Verwendung der Funktionalgleichung (9) erkennt man aber, daß das Ergebnis (18) auch für $\varrho < 1$ richtig ist. Auf dem Integrationsweg C ist $h(u) - h(u_0)$ reell, so daß man auf (16) den folgenden Hilfssatz (vgl. [1], S. 85) anwenden kann.

Hilfssatz. *Es seien $h(u)$ und $g(u)$ in $u = u_0$ holomorph, $h(u) - h(u_0)$ für $u_0 \leqq u \leqq u_1$ reellwertig und $\geqq 0$ und*

$$h'(u_0) = h''(u_0) = \cdots = h^{(m-1)}(u_0) = 0, \quad h^{(m)}(u_0) \neq 0 \qquad (m \geqq 1).$$

Läßt sich in dem Integral

$$J(z) = \int_{u_1}^{u_2} g(u) e^{-zh(u)}\, du$$

die Substitution

$$\tau = [h(u) - h(u_0)]^{\frac{1}{m}} = (u - u_0)[c_m + c_{m+1}(u - u_0) + \cdots]^{\frac{1}{m}}$$

mit $\tau > 0$ *ausführen, so gilt die asymptotische Entwicklung*

$$J(z) \sim \frac{1}{m} e^{-zh(u_0)} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \Gamma\left(\frac{\nu+1}{m}\right) z^{-\frac{\nu+1}{m}} \tag{17}$$

mit

$$a_\nu = \frac{1}{\nu!} \left[\frac{d^\nu}{du^\nu} \left\{g(u) \left(\frac{u - u_0}{(h(u) - h(u_0))^{1/m}}\right)^{\nu+1}\right\}\right]_{u=u_0}$$

für $z \to \infty$ *in* $|\arg z| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon,\ \varepsilon > 0$.

Wenden wir diesen Hilfssatz auf (16) an, so müssen wir jenes Integral in zwei Teilintegrale zerlegen, wobei der eine Integrationsweg von 0 längs C nach u_0 und der andere von u_0 längs C nach ∞ verläuft. Das hat zur Folge, daß sich in der asymptotischen Entwicklung (17) Glieder mit ungeradem ν wegheben, die mit geradem ν dagegen verdoppeln. Für unser Problem setzen wir in dem Hilfssatz also

$$m = 2, \quad g(u) = u^{-\beta}, \quad h(u) = e^{i\gamma}(u + u^{-\varrho}),$$

$$z = \xi e^{i\gamma}, \quad |\arg \xi| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon, \quad |\gamma| < \pi,$$

$$u_0 = \varrho^{\frac{1}{\varrho+1}} > 0, \quad h(u_0) = e^{i\gamma}\left(1 + \frac{1}{\varrho}\right) \varrho^{\frac{1}{\varrho+1}}.$$

Damit ergibt sich sofort:

Satz 5. *Für* $z \to \infty$ *mit* $|\arg z| < \frac{3}{2}\pi - \varepsilon < \frac{3}{2}\pi$ *gilt die asymptotische Entwicklung*

$$\eta(\varrho, \beta; z^{\varrho+1}) \sim z^{1-\beta} \exp\left[-z\left(1 + \frac{1}{\varrho}\right) \varrho^{\frac{1}{\varrho+1}}\right] \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{2\nu} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) z^{-\nu-\frac{1}{2}} \tag{18}$$

mit

$$a_0 = \sqrt{\frac{2}{\varrho+1}}\, \varrho^{\frac{1-2\beta}{2(\varrho+1)}},$$

$$a_{2\nu} = \frac{1}{(2\nu)!} \left[\frac{d^{2\nu}}{du^{2\nu}} \left\{u^{-\beta} \left(\frac{u - \varrho^{1/(\varrho+1)}}{\sqrt{u + u^{-\varrho} - (1 + 1/\varrho)\varrho^{1/(\varrho+1)}}}\right)^{2\nu+1}\right\}\right]_{u=\varrho^{1/(\varrho+1)}}.$$

Folgerung. Bei Verwendung des Zusammenhanges (7) erhält man die asymptotische Entwicklung der Wright-Funktion, wenn man in (18) einmal z durch $(e^{\pi i\varrho}z)^{1/(\varrho+1)}$ und einmal z durch $(e^{-\pi i\varrho}z)^{1/(\varrho+1)}$ ersetzt:

$$\Phi(\varrho,\beta;-z)\sim\frac{1}{2\pi}(e^{-\pi i}z)^{\frac{1-\beta}{\varrho+1}}\exp\left[\left(1+\frac{1}{\varrho}\right)(e^{-\pi i}\varrho z)^{\frac{1}{\varrho+1}}\right]$$
$$\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}a_{2\nu}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)(e^{-\pi i}z)^{-\frac{2\nu+1}{2(\varrho+1)}}+$$
$$+\frac{1}{2\pi}(e^{\pi i}z)^{\frac{1-\beta}{\varrho+1}}\exp\left[\left(1+\frac{1}{\varrho}\right)(e^{\pi i}\varrho z)^{\frac{1}{\varrho+1}}\right]\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}a_{2\nu}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)(e^{\pi i}z)^{-\frac{2\nu+1}{2(\varrho+1)}}.$$

Diese Entwicklung gilt für $|\arg z|\leqq\pi$ und wurde von Wright in [3] angegeben.

§ 5. Darstellung von $D(a,b,x)$

Mit den Bezeichnungen

$$H(a,b;x)=\begin{cases}\zeta\left(\frac{b}{a}\right)x^{\frac{1}{a}}+\zeta\left(\frac{a}{b}\right)x^{\frac{1}{b}}+\frac{1}{4} & \text{für}\quad a\neq b\\ x\log x+(2C-1)x+\frac{1}{4} & \text{für}\quad a=b=1,\end{cases}$$

$$\sigma_{\nu,\mu}(a,b;k)=\sum_{n^a m^b=k}n^{a\nu}m^{b\mu}$$

$$\varrho_{\nu}(a,b;x)=\int_0^{\infty}\sin 2\pi t^{\frac{1}{b}}\sin 2\pi\left(\frac{x}{t}\right)^{\frac{1}{a}}\frac{dt}{t^{\nu+1}}$$

wurde in [2] mit der Einschränkung $\frac{2}{3}<\frac{a}{b}<\frac{2}{3}$ die Entwicklung

$$\frac{D(a,b;x+0)+D(a,b;x-0)}{2}=H(a,b;x)+\frac{x}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_{1-\frac{1}{a},\,1-\frac{1}{b}}(a,b;k)\varrho_0'(a,b;kx)$$

bewiesen, wobei die Reihe in jedem abgeschlossenen Intervall, welches keine ganze Zahl enthält, gleichmäßig und für ganzes x gegen den Mittelwert konvergiert. Mit der hier eingeführten η-Funktion können wir $\varrho_0'(a,b;kx)$ ausdrücken. Nach (13) ist

$$\eta(\gamma,\beta;y^{\gamma}z)=y^{1-\beta}\int_0^{\infty}u^{-\beta}e^{-yu-zu^{-\gamma}}du, \tag{19}$$

und aus der Definition von $\varrho_0(a,b;x)$ folgt

$$\varrho_0(a,b;x)=-\frac{b}{4\pi^2}\left\{\int_0^{\infty}e^{2\pi i(t+x^{1/a}t^{-b/a})}\frac{dt}{t}+\int_0^{\infty}e^{-2\pi i(t+x^{1/a}t^{-b/a})}\frac{dt}{t}-\right.$$
$$\left.-\int_0^{\infty}e^{2\pi i(t-x^{1/a}t^{-b/a})}\frac{dt}{t}-\int_0^{\infty}e^{-2\pi i(t-x^{1/a}t^{-b/a})}\frac{dt}{t}\right\}.$$

Setzt man in (19) $\beta=1$, $\gamma=\frac{b}{a}$, $y=2\pi e^{\pm\frac{\pi i}{2}}$, $z=2\pi x^{\frac{1}{a}} e^{\pm\frac{\pi i}{2}}$, so wird

$$\varrho_0(a,b;x)=-\frac{b}{4\pi^2}\left\{\eta\left(\frac{b}{a},1;\left(2\pi e^{-\frac{\pi i}{2}}\right)^{\frac{b}{a}+1}x^{\frac{1}{a}}\right)+\eta\left(\frac{b}{a},1;\left(2\pi e^{\frac{\pi i}{2}}\right)^{\frac{b}{a}+1}x^{\frac{1}{a}}\right)-\right.$$

$$\left.-\eta\left(\frac{b}{a},1;e^{\pi i}\left(2\pi e^{-\frac{\pi i}{2}}\right)^{\frac{b}{a}+1}x^{\frac{1}{a}}\right)-\eta\left(\frac{b}{a},1;e^{-\pi i}\left(2\pi e^{\frac{\pi i}{2}}\right)^{\frac{b}{a}+1}x^{\frac{1}{a}}\right)\right\}$$

und wegen (10)

$$\varrho_0'(a,b;x)=\frac{b}{2\pi i a}\left(2\pi e^{-\frac{\pi i}{2}}\right)^{\frac{b}{a}}x^{\frac{1}{a}-1}\left\{\eta\left(\frac{b}{a},1+\frac{b}{a};\left(2\pi e^{-\frac{\pi i}{2}}\right)^{\frac{b}{a}+1}x^{\frac{1}{a}}\right)+\right.$$

$$\left.+\eta\left(\frac{b}{a},1+\frac{b}{a};e^{\pi i}\left(2\pi e^{-\frac{\pi i}{2}}\right)^{\frac{b}{a}+1}x^{\frac{1}{a}}\right)\right\}-$$

$$-\frac{b}{2\pi i a}\left(2\pi e^{\frac{\pi i}{2}}\right)^{\frac{b}{a}}x^{\frac{1}{a}-1}\left\{\eta\left(\frac{b}{a},1+\frac{b}{a};\left(2\pi e^{\frac{\pi i}{2}}\right)^{\frac{b}{a}+1}x^{\frac{1}{a}}\right)+\right.$$

$$\left.+\eta\left(\frac{b}{a},1+\frac{b}{a};e^{-\pi i}\left(2\pi e^{\frac{\pi i}{2}}\right)^{\frac{b}{a}+1}x^{\frac{1}{a}}\right)\right\}.$$

Literatur

[1] G. Doetsch, Handbuch der Laplace-Transformation, Bd. II *Basel und Stuttgart*, 1955.
[2] E. Krätzel, Ein Teilerproblem, *J. Reine Angew. Math.*, **235** (1969), 150—174.
[3] E. M. Wright, The asymptotic expansion of generalized Besselfunction, *Proc. London Math. Soc.*, 2. ser. **38** (1934), 257—270.
[4] E. M. Wright, Asymptotic partition formulae, III: Partitions into k-th powers, *Acta Math.*, **63** (1934), 143—191.

(Eingekommen am 6. September 1969.)