# Notwendige und hinreichende Bedingung für die Rekurrenz der kovarianten Ableitung eines beliebigen 2-fach kovarianten nichtsingulären Tensors des drei-dimensionalen Raumes

Von A. JAKUBOWICZ und A. WEGRZYNOWSKA (Szczecin)

## § 1. Einleitung

Es sei $X_n$ ein Punktraum, in dem ein zweifach kovarianter, nicht verschwindender Tensor $T_{\lambda\mu}$ existiert, der nicht symmetrisch und nicht schiefsymmetrisch ist [1], [2]:

$$(1.1) \qquad \begin{aligned} &\text{a)}\ K_{\lambda\mu} \neq 0, \quad K_{\lambda\mu} \overset{\mathrm{df}}{=} 2T_{[\lambda\mu]} \\ &\text{b)}\ L_{\lambda\mu} \neq 0, \quad L_{\lambda\mu} \overset{\mathrm{df}}{=} 2T_{(\lambda\mu)}. \end{aligned}$$

Diesen Raum werden wir mit $H_n$ bezeichnen. Wir stellen die Frage über die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz der kovarianten Ableitung des Tensors $T_{\lambda\mu}$, wobei diese Ableitung von vornherein als eine rekurrente Ableitung angegeben wird, d.h.

$$(1.2) \qquad \nabla_\sigma T_{\lambda\mu} \overset{\mathrm{df}}{=} \partial_\sigma T_{\lambda\mu} - \Gamma^\alpha_{\sigma\lambda} T_{\alpha\mu} - \Gamma^\alpha_{\sigma\mu} T_{\lambda\alpha} = k_\sigma T_{\lambda\mu}.$$

Es handelt sich somit um die Auflösung des obigen Systems der (algebraischen) Gleichungen, wo $\Gamma^\mu_{\sigma\lambda}$ ($\sigma, \lambda, \mu = 1, 2, \ldots, n$) die unbekannten Komponenten des Objekts der parallelen Übertragung sind (das Feld $k_\sigma$, sowie das Feld $T_{\lambda\mu}$ werden als angegebene Felder betrachtet). Für das Feld $k_\sigma$ haben wir zwei Fälle:

$$(1.3) \qquad \text{a)}\ k_\sigma \neq 0; \qquad \text{b)}\ k_\sigma \equiv 0.$$

Den Raum $H_n$ nennen wir nichtsingulär, wenn folgende Objekte nicht verschwinden:

$$(1.4) \qquad A \overset{\mathrm{df}}{=} \mathrm{Det}\,(T_{\lambda\mu}) \neq 0, \quad h \overset{\mathrm{df}}{=} \mathrm{Det}\,(L_{\lambda\mu}) \neq 0.$$

Wir wissen, daß die Objekte $A$ und $h$ die Dichten von Gewicht 2 sind [3]; sie haben also folgende Transformationsregel

$$(1.5) \qquad A' = J^{-2} \cdot A, \quad h' = J^{-2} \cdot h,$$

wo

$$J \overset{\mathrm{df}}{=} \mathrm{Det}\left(\frac{\partial \xi^{\lambda'}}{\partial \xi^{\lambda}}\right).$$

Auf Grund der Transformationsregeln (1. 5) sehen wir, daß die Ungleichheiten (1. 4) invariant sind.

Ist der Raum $H_n$ mit dem Vektorfeld $k_\sigma$ angegeben, so stellen wir die Frage, welche Bedingungen notwendig und hinreichend für das Vorhandensein des Objektes der parallelen Übertragung $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ sind, so, daß die Relationen (1. 2) erfüllt seien. Dieses Problem hat A. Moór in der Arbeit [2] gestellt. In den Arbeiten [4] und [5] wurde dieses Problem für den zwei-dimensionalen Raum $H_2$ gelöst. In der vorliegenden Arbeit wird dieses Problem für den drei-dimensionalen nicht singulären Raum $H_3$ gelöst.

## § 2. Der Besprechen des Problems

Bei der Suche nach den notwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Vorhandensein des Objektes der parallelen Übertragung $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$, welche die Relationen (1. 2) erfüllt, handelt es sich um das Lösen des Gleichungssystems (1. 2), in dem die Komponenten des Tensors $T_{\lambda\mu}$, die Komponenten der partiellen Ableitungen dieses Tensors $\partial_\sigma T_{\lambda\mu}$ und die Komponenten des kovarianten Vektors $k_\sigma$ gegeben sind, die Komponenten des Objektes der parallelen Übertragung $\Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda}$ dagegen unbekannt sind. Das Gleichungssystem (1. 2) is also ein System von linearen nichthomogenen Gleichungen mit den Unbekannten $\Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda}$. Wenn wir die Beziehungen (1. 2) für den Raum $H_3$ in explizierter Form ausschreiben, dann bekommen wir folgendes Gleichungssystem:

$$(2.1)\qquad \begin{cases} 2T_{11}\Gamma^1_{\sigma1}+2T_{(12)}\Gamma^2_{\sigma1}+2T_{(13)}\Gamma^3_{\sigma1} = \Phi_{\sigma11}\\ T_{12}\Gamma^1_{\sigma1}+T_{22}\Gamma^2_{\sigma1}+T_{32}\Gamma^3_{\sigma1}+T_{11}\Gamma^1_{\sigma2}+T_{12}\Gamma^2_{\sigma2}+T_{13}\Gamma^3_{\sigma2} = \Phi_{\sigma12}\\ T_{13}\Gamma^1_{\sigma1}+T_{23}\Gamma^2_{\sigma1}+T_{33}\Gamma^3_{\sigma1}+T_{11}\Gamma^1_{\sigma3}+T_{12}\Gamma^2_{\sigma3}+T_{13}\Gamma^3_{\sigma3} = \Phi_{\sigma13}\\ T_{21}\Gamma^1_{\sigma1}+T_{22}\Gamma^2_{\sigma1}+T_{23}\Gamma^3_{\sigma1}+T_{11}\Gamma^1_{\sigma2}+T_{21}\Gamma^2_{\sigma2}+T_{31}\Gamma^3_{\sigma2} = \Phi_{\sigma21}\\ 2T_{(12)}\Gamma^1_{\sigma2}+2T_{22}\Gamma^2_{\sigma2}+2T_{(23)}\Gamma^3_{\sigma2} = \Phi_{\sigma22},\\ T_{13}\Gamma^1_{\sigma2}+T_{23}\Gamma^2_{\sigma2}+T_{33}\Gamma^3_{\sigma2}+T_{21}\Gamma^1_{\sigma3}+T_{22}\Gamma^2_{\sigma3}+T_{23}\Gamma^3_{\sigma3} = \Phi_{\sigma23}\\ T_{31}\Gamma^1_{\sigma1}+T_{32}\Gamma^2_{\sigma1}+T_{33}\Gamma^3_{\sigma1}+T_{11}\Gamma^1_{\sigma3}+T_{21}\Gamma^2_{\sigma3}+T_{31}\Gamma^3_{\sigma3} = \Phi_{\sigma31}\\ T_{31}\Gamma^1_{\sigma2}+T_{32}\Gamma^2_{\sigma2}+T_{33}\Gamma^3_{\sigma2}+T_{12}\Gamma^1_{\sigma3}+T_{22}\Gamma^2_{\sigma3}+T_{32}\Gamma^3_{\sigma3} = \Phi_{\sigma32}\\ 2T_{(13)}\Gamma^1_{\sigma3}+2T_{(23)}\Gamma^2_{\sigma3}+2T_{33}\Gamma^3_{\sigma3} = \Phi_{\sigma33} \end{cases}$$

w

$$\Phi_{\sigma\alpha\beta} \overset{\mathrm{df}}{=} \partial_\sigma T_{\alpha\beta} - k_\sigma T_{\alpha\beta}.$$

Die Matrix $\mathfrak{M}^*$ der Koeffizienten der Unbekannten dieses Gleichungssystems, die durch [ ], bzw die erweiterte Matrix $\mathfrak{M}_\sigma$ dieses Gleichungssystems, die durch ( )

bezeichnet wird, ist, auf Grund von (2. 1) die folgende:

$$(2.2)\qquad \left\{\left[\begin{array}{ccccccccc|c} 2T_{11} & 2T_{(12)} & 2T_{(13)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_{\sigma 11} \\ T_{12} & T_{22} & T_{32} & T_{11} & T_{12} & T_{13} & 0 & 0 & 0 & \Phi_{\sigma 12} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} & 0 & 0 & 0 & T_{11} & T_{12} & T_{13} & \Phi_{\sigma 13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{11} & T_{21} & T_{31} & 0 & 0 & 0 & \Phi_{\sigma 21} \\ 0 & 0 & 0 & 2T_{(12)} & 2T_{22} & 2T_{(23)} & 0 & 0 & 0 & \Phi_{\sigma 22} \\ 0 & 0 & 0 & T_{13} & T_{23} & T_{33} & T_{21} & T_{22} & T_{23} & \Phi_{\sigma 23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & 0 & 0 & 0 & T_{11} & T_{21} & T_{31} & \Phi_{\sigma 31} \\ 0 & 0 & 0 & T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{12} & T_{22} & T_{32} & \Phi_{\sigma 32} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2T_{(13)} & 2T_{(23)} & 2T_{33} & \Phi_{\sigma 33} \end{array}\right]\right\}.$$

Die notwendige und hinreichende Bedingung für das Vorhandensein der Lösung des Gleichungssystems (2. 1) ist die Gleichheit

$$(2.3)\qquad R(\mathfrak{M}^*) = R(\mathfrak{M}_\sigma),$$

wo $R(\mathfrak{M}^*)$ der Rang der Matrix $\mathfrak{M}^*$ ist, $R(\mathfrak{M}_\sigma)$ dagegen den Rang der Matrix $\mathfrak{M}_\sigma$ bedeutet. Wir wollen die notwendigen und hinreichenden Bedingungen in invarianter Form finden, damit die Gleichheit (2. 3) bestehe.

## § 3. Die grundsätzlichen Objekte

Wir definieren jetzt die grundsätzlichen Objekte, welche für die Lösung des Problems nötig sein werden. Zwei Objekte: $A$ und $h$ wurden schon im § 1 bestimmt. Nun werden wir die weiteren Objekte bestimmen:

$$(3.1)\qquad k \stackrel{\mathrm{df}}{=} \operatorname{Det}(K_{\lambda\mu})$$

($K_{\lambda\mu}$ ist in (1. 1) a) definiert),

$$(3.2)\qquad \text{a)}\ \omega \stackrel{\mathrm{df}}{=} \frac{A}{h}, \qquad \text{b)}\ \tau \stackrel{\mathrm{df}}{=} \frac{k}{h} \qquad (h \neq 0).$$

Das Objekt $k$ ist eine Dichte vom Gewicht 2 [3]

$$(3.3)\qquad k' = J^{-2} \cdot k.$$

Da die Objekte $A$ und $h$, wie es schon in dem § 1 erwähnt wurde, auch Dichten vom Gewicht 2 sind, sehen wir auf Grund der Transformationsregeln (1. 5) und (3. 3), daß die Objekte $\omega$ und $\tau$ Skalare sind.

Bestimmen wir noch die partiellen Ableitungen $s_\sigma$ und $t_\sigma$ der Skalarfelder $\omega$ und $\tau$

$$(3.4)\qquad \text{a)}\ s_\sigma \stackrel{\mathrm{df}}{=} \partial_\sigma \omega; \qquad \text{b)}\ t_\sigma \stackrel{\mathrm{df}}{=} \partial_\sigma \tau.$$

Wir wissen [3], daß die Objekte $s_\sigma$ und $t_\sigma$ kovariante Vektore sind und daß sie also folgende Transformationsregeln haben

$$(3.5)\qquad \text{a)}\ s_{\sigma'} = A^{\sigma}_{\sigma'} s_\sigma, \qquad \text{b)}\ t_{\sigma'} = A^{\sigma}_{\sigma'} t_\sigma,$$

wo

$$A^{\sigma}_{\sigma'} \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\partial \xi^{\sigma}}{\partial \xi^{\sigma'}}.$$

Wir werden folgenden, den in der Arbeit [5] bewiesenen Satz benutzen (der Beweis dieses Satzes wurde für das beliebige $k_\sigma$ analog zum Beweis von V. Hlavatý in der Monographie [6], durchgeführt. Hlavatý hat seinen Satz für $k_\sigma \equiv 0$ bewiesen): die notwendigen Bedingungen für das Vorhandensein der Lösbarkeit des Gleichungssystems (1. 2) in dem nichtsingulären Raum $H_n$ sind zwei gleichzeitige Gleichheiten

$$\text{(3. 6)} \qquad a) \ s_\sigma \equiv 0 \quad \text{und} \quad b) \ t_\sigma \equiv 0.$$

Auf Grund der Transformationsregel für den kovarianten Vektor $s_\sigma$ in (3. 5) a) und den kovarianten Vektor $t_\sigma$ in (3. 5) b) sehen wir, daß die Gleichheiten (3. 6) a), b) invariant sind.

Da in dem Raum $H_3 : k \equiv 0$ ist, so ist auf Grund von (3. 2) b) auch (für nichtsingularen $H_3$) $\tau \equiv 0$ und auf Grund von (3. 4) b) auch $t_\sigma \equiv 0$. Somit ist in dem Raum $H_3$ die Gleichheit (3. 6) b) immer erfüllt und es bleibt nur eine notwendige Bedingung, nämlich (3. 6) a) für das Vorhandensein der Lösung des Systems (2. 1).

## § 4. Hinreichende Bedingung für das Lösen des Problems

Um die hinreichende Bedingung für die Lösung des Gleichungssystems (2. 1) zu finden — wenn die notwendige Bedingung gegeben ist — genügt es, die hinreichende Bedingung in jedem Punkt des Raumes $H_3$ zu finden.

Auf Grund des Hilfsatzes im Beitrag im § 6 dieser Arbeit sehen wir, daß es immer ein solches Koordinatensystem vorhanden ist, in welchem sich der nichtsinguläre und weder symmetrische noch schiefsymmetrische Tensor $T_{\lambda\mu}$ auf folgende Form zurückführen läßt:

$$\text{(4. 1)} \qquad [T_{\lambda\mu}] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & 0 \\ 0 & T_{22} & T_{23} \\ 0 & 0 & T_{33} \end{bmatrix},$$

wo

(4. 2) a) $T_{11} \neq 0$, $T_{22} \neq 0$, $T_{33} \neq 0$ und b) entweder $T_{12} \neq 0$ oder $T_{23} \neq 0$.

Wenn wir die Werte der Komponenten des Tensors $T_{\lambda\mu}$ in (4. 1) bei den Matrizen $\mathfrak{M}^*$ und $\mathfrak{M}_\sigma$ in (2. 2) beachten, so erhalten wir folgende Matrizen:

$$\text{(4. 3)} \qquad \left( \begin{bmatrix} 2T_{11} & T_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ T_{12} & T_{22} & 0 & T_{11} & T_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_{23} & T_{33} & 0 & 0 & 0 & T_{11} & T_{12} & 0 \\ 0 & T_{22} & T_{23} & T_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_{12} & 2T_{22} & T_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & T_{23} & T_{33} & 0 & T_{22} & T_{23} \\ 0 & 0 & T_{33} & 0 & 0 & 0 & T_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{33} & T_{12} & T_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{23} & 2T_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} \Phi_{\sigma 11} \\ \Phi_{\sigma 12} \\ \Phi_{\sigma 13} \\ \Phi_{\sigma 21} \\ \Phi_{\sigma 22} \\ \Phi_{\sigma 23} \\ \Phi_{\sigma 31} \\ \Phi_{\sigma 32} \\ \Phi_{\sigma 33} \end{matrix} \right).$$

Es ist leicht zu zeigen, daß Det $\mathfrak{M}^* \equiv 0$, also $R(\mathfrak{M}^*) \leqq 8$. Man kann leicht beweisen, daß

$$R(\mathfrak{M}^*) = 8 \tag{4.4}$$

ist. Nehmen wir nämlich die folgenden Unterdeterminanten der Matrix $\mathfrak{M}^*$ in (4. 3)

$$\text{(4.5)} \qquad \begin{aligned} &\text{a)} \quad D_2^1 = 4T_{11}T_{12}^3T_{22}T_{33}^3 \\ &\text{b)} \quad D_8^9 = -4T_{11}^3T_{22}T_{23}^3T_{33}, \end{aligned}$$

wo $D_2^1$ durch das Streichen der ersten Zeile und der zweiten Kolonne bzw. $D_8^9$ durch das Streichen der neunten Zeile und der achten Kolonne entstanden ist. Auf Grund von (4. 2) a) und b) sehen wir, daß wenigstens eine von diesen Unterdeterminanten von Null verschieden sein muß.

Wir müssen die notwendige und hinreichende Bedingung finden, damit die Gleichheit

$$R(\mathfrak{M}^*) = R(\mathfrak{M}_\sigma) = 8 \tag{4.6}$$

gelte. Um den Rang $R(\mathfrak{M}_\sigma)$ der Matrix $\mathfrak{M}_\sigma$ in (4. 3) zu berechnen, multiplizieren wir die Elemente der $n$-ten Zeile ($n = 1, 2, \ldots, 9$) der Matrix $\mathfrak{M}_\sigma$ der Reihe nach mit $a^{11}$, $a^{12}$, $a^{13}$, $a^{21}$, $a^{22}$, $a^{23}$, $a^{31}$, $a^{32}$, $a^{33}$ und addieren wir die so erhaltenen Zeilen zur neunten Zeile. Wir benützen noch die Bezeichnungen:

$$W_\sigma = a^{\alpha\beta}\partial_\sigma T_{\alpha\beta},$$

wo

$$\begin{aligned}
a^{11} &= -T_{12}^2T_{22}T_{33}^2, \quad a^{12} = 2T_{11}T_{12}T_{22}T_{33}^2, \quad a^{13} = -T_{11}T_{12}T_{22}T_{23}T_{33} \\
a^{21} &= T_{11}T_{12}T_{23}^2T_{33} - 2T_{11}T_{12}T_{22}T_{33}^2 + T_{12}^3T_{33}^2 \\
a^{22} &= -T_{11}^2T_{23}^2T_{33} - T_{11}T_{12}^2T_{33}^2, \quad a^{23} = 2T_{11}^2T_{22}T_{23}T_{33} \\
a^{31} &= -T_{11}T_{12}T_{23}^3 + 3T_{11}T_{12}T_{22}T_{23}T_{33} - T_{12}^3T_{23}T_{33} \\
a^{32} &= -2T_{11}^2T_{22}T_{23}T_{33} + T_{11}^2T_{23}^3 + T_{11}T_{12}^2T_{23}T_{33} \\
a^{33} &= -T_{11}^2T_{22}T_{23}^2.
\end{aligned}$$

Auf Grund von (4. 3) bekommen wir somit für $T_{23} \neq 0$ und (4. 2) a) in der neunten Zeile der Matrix $\mathfrak{M}_\sigma$ (für $T_{12} \neq 0$ in der ersten Zeile) von ersten bis zum zehnten Element folgende Gleichheiten:

$$\begin{aligned}
1&: \ 2a^{11}T_{11} + a^{12}T_{12} \equiv 0 \\
2&: \ a^{11}T_{12} + a^{12}T_{22} + a^{13}T_{23} + a^{21}T_{22} \equiv 0 \\
3&: \ a^{13}T_{33} + a^{21}T_{23} + a^{31}T_{33} \equiv 0 \\
4&: \ a^{12}T_{11} + a^{21}T_{11} + a^{22}T_{12} \equiv 0 \\
5&: \ a^{12}T_{12} + 2a^{22}T_{22} + a^{23}T_{23} \equiv 0 \\
6&: \ a^{22}T_{23} + a^{23}T_{33} + a^{32}T_{33} \equiv 0 \\
7&: \ a^{13}T_{11} + a^{31}T_{11} + a^{32}T_{12} \equiv 0 \\
8&: \ a^{13}T_{12} + a^{23}T_{22} + a^{32}T_{22} + a^{33}T_{23} \equiv 0 \\
9&: \ a^{23}T_{23} + 2a^{33}T_{33} \equiv 0 \\
10&: \ a^{\alpha\beta}\Phi_{\sigma\alpha\beta} = W_\sigma.
\end{aligned}$$

Das beweist die Gleichheit (4. 6) für $W_\sigma \equiv 0$.
Es ist leicht zu beweisen, daß $W_\sigma = h^2 \cdot s_\sigma$. Das Objekt $W_\sigma$ können wir also in folgender Weise definieren:

$$W_\sigma \overset{\mathrm{df}}{=} h^2 \cdot s_\sigma . \tag{4. 8}$$

Da wir auf Grund der Voraussetzung in (1. 4): $h \neq 0$ haben, so ist die Bedingung (3. 6) a) der Bedingung

$$W_\sigma \equiv 0 \tag{4. 9}$$

äquivalent. Auf Grund der Definition (4. 8) und der Transformationsregeln (1. 5) und (3. 5) sehen wir, daß das Objekt $W_\sigma$ eine kovariante Dichte vom Gewicht 4 ist: $W_{\sigma'} = J^{-4} \cdot A^{\sigma}_{\sigma'} W_\sigma$, die Gleichheit (4. 9) ist also invariant.

Wir haben für die hinreichenden Bedingungen nachgewiesen, daß in jedem Punkt des Raumes $H_3$ ein solches Koordinatensystem vorhanden ist (im allgemeinen für jeden Punkt ein anderes), in welchem die Lösung des Systems (2. 1) vorhanden ist. Da aber die notwendige Bedingung (3. 6) a) für nichtsinguläre $H_3$ mit der hinreichenden Bedingung (4. 9) äquivalent ist, genügt es die hinreichende Bedingung in jedem Punkt des Raumes $H_3$ zu bestimmen. Wir haben also bewiesenden

**Satz 1.** *Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Vorhandensein des Objektes der parallelen Übertragung, das die Abhängigkeit* (1. 2) *in nichtsingulären* $H_3$ *erfüllt, sind die Identitäten:* $s_\sigma \equiv 0$ $(\sigma = 1, 2, 3)$.

## § 5. Die Bedingungen für das Vorhandensein des symmetrischen bzw. des nichtsymmetrischen Zusammenhanges

Auf Grund des Satzes 1 haben wir die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Vorhandensein des Objektes der parallelen Übertragung des nichtsingulären Raumes $H_3$ bestimmt, wir wissen jedoch nicht, ob dieses Objekt symmetrisch oder nichtsymmetrisch ist. Zu diesem Zwecke beweisen wir den folgenden

**Satz 2.** *Das Verschwinden des Feldes* $s_\sigma : s_\sigma \equiv 0$ *in dem nichtsingulären Raume* $H_3$ *bei gegebenem beliebigen Feld* $k_\sigma$ *ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ein nichtsymmetrischer Zusammenhang existiere.*

Beweis. Nehmen wir an, daß $s_\sigma \equiv 0$. Wir zeigen, daß $s_\sigma \equiv 0$ noch keine notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, daß ein symmetrischer Zusammenhang existiere.

Nimmt man nämlich an, daß im nichtsingulären Raum $H_3$ das Tensorfeld $T_{\lambda\mu}$ durch die folgende Formel definiert ist:

$$[T_{\lambda\mu}] = \begin{bmatrix} 1 & f & 0 \\ -f & 1 & f \\ 0 & -f & -1 \end{bmatrix}, \tag{5. 1}$$

wo

$$f = f(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \neq 0,$$

so ist für das Feld (5. 1) $s_\sigma \equiv 0$. Es ist leicht zu beweisen, daß für die Komponenten