Räume von zweifach rekurrenter Krümmung

Von A. MOÓR (Sopron)

§ 1. Einleigung. Unter den n-dimensionalen Riemannschen und affinzusammenhängenden Räumen sind die Räume von rekurrenter Krümmung diejenigen Räume, deren Krümmungstensor der Relation

$$R_i{}^j{}_{kl}|_m = \varkappa_m R_i{}^j{}_{kl} \tag{1. 1}$$

genügt, wo „$|_m$" die kovariante Ableitung nach x^m bzw. $\varkappa_m(x)$ ein kovariantes Vektorfeld bedeutet.

Im folgenden wollen wir solche Riemannschen und affinzusammenhängenden Räume untersuchen, deren Krümmungstensoren den Relationen von der Form

$$R_i{}^j{}_{kl}|_m|_p = T_{mp} R_i{}^j{}_{kl} \tag{1. 2}$$

genügen, wo T_{mp} einen rein kovarianten Tensor zweiter Stufe bezeichnet. Diese Räume wollen wir *Räume von zweifach rekurrenter Krümmung*, oder kurz: *T_2-Räume* nennen.

Es kann leicht verifiziert werden, daß ein Raum von rekurrenter Krümmung immer ein solcher von zweifach rekurrenter Krümmung ist, da aus (1. 1) folgt:

$$R_i{}^j{}_{kl}|_m|_p = (\varkappa_m|_p + \varkappa_m \varkappa_p) R_i{}^j{}_{kl},$$

und das drückt schon die Behauptung aus. Die Umkehrung gilt aber im allgemeinen nicht, da aus (1. 2) die Relation (1. 1) nicht gefolgert werden kann. In unseren Untersuchungen werden wir in § 3 hinreichende Bedingungen angeben, damit ein T_2-Raum gleichzeitig ein *$\varkappa$-Raum* sei, wenn wir jetzt und im folgenden mit $\varkappa$-Raum die durch (1. 1) charakterisierten Räume bezeichnen. Wir verweisen noch darauf, daß der *Satz 1. als das Analogon des Schurschen Satzes der n-dimensionalen Riemannschen Räume von skalarer Krümmung betrachtet werden kann*, da beide durch die Umformung der Bianchischen Identitäten entstanden sind.

Im nächsten Paragraphen — in § 2 — wollen wir den metrischen Fall näher untersuchen und zeigen, daß im wesentlichen Det $(T_{mp})=0$ gilt (vgl. Satz 1.), falls die Dimension des Raumes größer als 2 ist; ferner werden wir die Form von T_{mp} bestimmen.

Die Zerlegbarkeit der Räume von zweifach rekurrenter Krümmung ist ganz analog zu der der $\varkappa$-Räume. Endlich, in § 5, wollen wir kurz die Parallelität und Metrisierbarkeit der T_2-Räume besprechen. Die Integrabilitätsbedingungen der Parallelität reduzieren sich wesentlich in den T_2-Räumen ebenso, wie in den $\varkappa$-Räumen.

§ 2. Metrische T_2-Räume. Nehmen wir an, daß unser Fundamentalraum ein Riemannscher Raum mit dem metrischen Grundtensor $g_{ik}(x)$ ist. In diesem Falle hat der Riemannsche Krümmungstensor R_{ijkl} bekanntlich die folgenden Eigenschaften:

1) R_{ijkl} ist in i, j und auch in k, l schiefsymmetrisch.

2) Es gelten die Bianchischen Identitäten:

$$R_i{}^j{}_{kl}|_m + R_i{}^j{}_{lm}|_k + R_i{}^j{}_{mk}|_l = 0. \tag{2. 1}$$

3) Es ist der Tensor

$$R_{ik} \stackrel{\text{def}}{=} R_i{}^j{}_{kj}$$

symmetrisch.

Nach diesen Vorbereitungen differenzieren wir (2. 1) kovariant nach x^p, und beachten wir die Relation (1. 2), so wird:

$$R_i{}^j{}_{kl} T_{mp} + R_i{}^j{}_{lm} T_{kp} + R_i{}^j{}_{mk} T_{lp} = 0. \tag{2. 2}$$

Wir beweisen den folgenden

Satz 1. *Ist die Dimension: $n > 2$, ferner $R_i{}^j{}_{kl} \neq 0$, so ist*

$$\operatorname{Det}(T_{kp}) = 0.$$

Bemerkung. Im zweidimensionalen Fall ($n=2$) gilt der Satz 1 offenbar nicht, da der zweidimensionale Riemannsche Raum V_2 immer ein Raum von skalarer Krümmung ist, d. h.:

$$R_i{}^j{}_{kl} = R(g_{ik}\delta_l^j - g_{il}\delta_k^j),$$

somit wird V_2 — wie es leicht bestätigt werden kann — gleichzeitig ein $\varkappa$-Raum und ein T_2-Raum mit

$$T_{kp} = R^*|_k|_p + R^*|_k R^*|_p, \quad R^* \stackrel{\text{def}}{=} \log|R| \tag{2. 3}$$

und Satz 1 wird im allgemeinen nicht bestehen, falls $R|_k|_p \neq 0$ gilt.

Beweis *des Satzes 1.* Aus der Gleichung (2. 2) folgt nach einer Verjüngung bezüglich j, l in Hinsicht auf die schiefsymmetrischen Eigenschaften des Krümmungstensors:

$$R_{ik} T_{mp} - R_{im} T_{kp} + R_i{}^l{}_{mk} T_{lp} = 0. \tag{2. 4}$$

Eine Überschiebung mit g^{ik} gibt, wieder in Hinsicht auf die schiefsymmetrischen Eigenschaften des Krümmungstensors,

$$RT_{mp} - 2R^k{}_m T_{kp} = 0,$$

wo R den Krümmungsskalar $R = R^k{}_k$ bedeutet. Diese Gleichung kann auch in der äquivalenten Form

$$T_{kp}(R\delta_m^k - 2R^k{}_m) = 0 \tag{2. 5}$$

geschrieben werden. Wäre nun $\operatorname{Det}(T_{kp}) \neq 0$, so müßte auf Grund von (2. 5)

$$R\delta_m^k - 2R^k{}_m = 0 \tag{2. 6}$$

sein. Verjüngung bezüglich k, m gibt wegen

$$R^k{}_k = g^{ik} R_{ik} = R$$

die Relation:

$$R(n-2) = 0.$$

Wegen der Bedingung $n > 2$, ist $R = 0$ und aus (2. 6) folgt auch $R^k{}_m = 0$, d. h. $R_{im} = 0$. Die Gleichung (2. 4) geht somit in

$$R_i{}^l{}_{mk} T_{lp} = 0$$

über. Wenn wir z. B. i, m fest halten, so wird wieder in Hinsicht auf $\mathrm{Det}\,(T_{kp}) \neq 0$, auf Grund der Theorie der linearen Gleichungen $R_i{}^l{}_{mk} = 0$, in Widerspruch bezüglich der Bedingung des Satzes, womit der Satz 1 bewiesen ist.

Wir bemerken noch, daß die Relation $\mathrm{Det}\,(T_{kp}) = 0$ koordinateninvariant ist, was aus der Transformationsformel

$$\mathrm{Det}\,(\overline{T}_{kp}) = \left| \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \right|^2 \mathrm{Det}\,(T_{kp})$$

unmittelbar folgt.

Wir wollen jetzt die Form von T_{mp} bestimmen. Bekanntlich ist in den $\varkappa$-Räumen $\varkappa_m$ ein Gradientvektor (vgl. [3], Formel (1. 4)); für T_{mp} gilt der folgende

Satz 2. *Die Form des Tensors T_{mp} ist in einem metrischen T_2-Raum die folgende:*

$$T_{mp} = R^*|_m|_p + R^*|_m R^*|_p, \quad R^* \stackrel{\mathrm{def}}{\equiv} \log |R|. \tag{2. 7}$$

Beweis. Aus (1. 2) folgt nach einer Verjüngung bezüglich j, l und dann nach einer Überschiebung mit g^{ik} wegen $g^{ik}|_m = 0$ die Formel:

$$R|_m|_p = T_{mp} R.$$

Da R ein Skalar ist, gilt: $R|_m = \partial_{x^m} R$ und es folgt aus der letzten Formel:

$$T_{mp} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 R}{\partial x^m \partial x^p} - \Gamma_m{}^s{}_p \frac{\partial R}{\partial x^s} \right), \tag{2. 8}$$

wo offenbar statt R sein absoluter Wert $|R|$ gesetzt werden kann. Durch unmittelbare Berechnung von

$$R^*|_m|_p \equiv (\log |R|)|_m|_p \equiv \left(\frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial x^m} \right) \bigg|_p$$

folgt, daß (2. 7) mit (2. 8) übereinstimmt, womit der Satz 2 bewiesen ist.

§ 3. Zweifach rekurrente Räume, die $\varkappa$-Räume sind. Wir wollen jetzt hinreichende Bedingungen angeben dafür, daß ein T_2-Raum gleichzeitig ein $\varkappa$-Raum ist. Ferner werden wir im folgenden die Bedingung, daß der Raum ein metrischer Raum sei, fallen lassen. Der Fundamentalraum sei also ein affinzusammenhängender T_2-Raum (möglicherweise kann er auch metrisch sein). Es gilt der

Satz 3. *Hat in einem affinzusammenhängenden T_2-Raum das Differentialgleichungssystem*

$$H_i{}^j{}_{klm}|_p + \varkappa_m H_i{}^j{}_{klp} = 0 \tag{3. 1}$$

außer dem Nulltensor keine weitere Lösung, hat ferner T_{mp} die Form:

(3. 2) $$T_{mp} = \varkappa_m|_p + \varkappa_m \varkappa_p,$$

wo $\varkappa_m$ ein kovariantes Vektorfeld bedeutet, so ist der T_2-Raum ein $\varkappa$-Raum.

BEWEIS. Auf Grund von (1. 2) und (3. 2) besteht die Relation

(3. 3) $$R_i{}^j{}_{kl}|_m|_p = (\varkappa_m|_p + \varkappa_m \varkappa_p) R_i{}^j{}_{kl}.$$

Wäre nun entgegen der Behauptung des Satzes unser T_2-Raum nicht ein $\varkappa$-Raum, so müßte

(3. 4) $$R_i{}^j{}_{kl}|_m = \varkappa_m R_i{}^j{}_{kl} + H_i{}^j{}_{klm}$$

mit

(3. 4a) $$H_i{}^j{}_{klm} \not\equiv 0$$

bestehen, wo der Tensor $H_i{}^j{}_{klm}$ die Abweichung des Raumes von den $\varkappa$-Räumen bestimmt. Eine kovariante Ableitung von (3. 4) nach x^p gibt in Hinsicht auf (3. 4) selbst:

$$R_i{}^j{}_{kl}|_m|_p = (\varkappa_m|_p + \varkappa_m \varkappa_p) R_i{}^j{}_{kl} + H_i{}^j{}_{klm}|_p + \varkappa_m H_i{}^j{}_{klp}.$$

Wegen (3. 3) geht aber dieses Gleichungssystem in (3. 1) über. Nach unserer Annahme hat aber (3. 1) nur die triviale Lösung, d. h. es ist

$$H_i{}^j{}_{klm} \equiv 0$$

in Widerspruch zu unserer Bedingung, ausgedrückt in der Relation (3. 4a). Die Behauptung des Satzes 3 muß also bestehen, womit der Beweis beendet ist.

In den metrischen T_2-Räumen fällt die Bedingung (3. 2) weg, da nach Satz 2 die Relation (3. 2) im metrischen Fall mit

$$\varkappa_m = (\log |R|)|_m$$

immer erfüllt ist. Das Bestehen von (3. 2) ist übrigens notwendig; aus (1. 1) folgt nämlich die Relation (3. 3) und somit auch (3. 2). Ist also der T_2-Raum ein $\varkappa$-Raum, so muß (3. 2) bestehen.

Es ist aber die andere Bedingung des Satzes 3, daß nämlich (3. 1) nur die einzige Lösung $H_i{}^j{}_{klm}=0$ habe, nicht unbedingt notwendig; es kann nämlich möglich sein, daß (3. 1) auch eine von Null verschiedene Lösung hat, statt (3. 4) gilt aber für den Krümmungstensor die Formel (1. 1).

§ 4. Zerlegbarkeit der T_2-Räume. In diesem Paragraphen werden wir zeigen, daß die Zerlegbarkeit der affinzusammenhängenden T_2-Räume mit der der $\varkappa$-Räume identisch ist. Die Definition der Zerlegbarkeit der affinzusammenhängenden Räume befindet sich z. B. in unserem Aufsatz [1]. Das bedeutet bezüglich des Krümmungstensors das folgende: Wenn die Indizes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Zahlen $1, 2, \ldots, r$, ferner $\nu, \varrho, \sigma, \tau$ die Zahlen $(r+1), (r+2), \ldots, n$ durchlaufen, so sind die sogenannten gemischten Komponenten des Krümmungstensors, unter dessen Indizes sowohl die Indizes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ als auch $\nu, \varrho, \sigma, \tau$ vorkommen, identisch Null. Die reinen Komponenten

$$R_\alpha{}^\beta{}_{\gamma\delta} \quad \text{bzw.} \quad R_\nu{}^\varrho{}_{\sigma\tau}$$

können dabei Null, oder auch von Null verschieden sein.

Nehmen wir nun in (2. 2)

$$m=\varrho, \quad p=\sigma, \quad i, j, k, l=\alpha, \beta, \gamma, \delta,$$

so wird:

$$T_{\varrho\sigma} R_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma\delta}=0. \tag{4.1}$$

Nehmen wir dann

$$m=\alpha, \quad p=\beta, \quad i, j, k, l=\nu, \varrho, \sigma, \tau,$$

so wird aus (2. 2):

$$T_{\alpha\beta} R_{\nu}{}^{\varrho}{}_{\sigma\tau} = 0 \tag{4.2}$$

Aus den Gleichungen (4. 1) und (4. 2) folgt unmittelbar der

Satz 4. *Ist* $T_{ij}\not\equiv 0$ *und ist der* T_2*-Raum zerlegbar, so ist eine der Teilräume eben.*

BEWEIS. Nach der Bedingung ist entweder $T_{\alpha\beta}$ oder $T_{\varrho\sigma}$ von Null verschieden. Aus (4. 1) und (4. 2) folgt somit, daß entweder $R_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma\delta}$, oder $R_{\nu}{}^{\varrho}{}_{\sigma\tau}$ verschwindet, w. z. b. w.

§ 5. Parallelität in den T_2-Räumen. Die absolute Parallelverschiebung eines Tensors $H_{i_1\dots i_r}$ in den affinzusammenhängenden Räumen ist durch die Gleichungen:

$$H_{i_1\dots i_r}|_m=0 \tag{5.1}$$

gekennzeichnet. Die Integrabilitätsbedingungen von (5. 1) sind (vgl. [2] § 8 und § 9):

$$H_{si_2\dots i_r} R_{i_1}{}^{s}{}_{kl} + H_{i_1 s i_3\dots i_r} R_{i_2}{}^{s}{}_{kl} + \cdots + H_{i_1\dots i_{r-1}s} R_{i_r}{}^{s}{}_{kl} = 0, \tag{5.2}$$

$$H_{si_2\dots i_r} R_{i_1}{}^{s}{}_{kl}|_{m_1} + H_{i_1 s i_3\dots i_r} R_{i_2}{}^{s}{}_{kl}|_{m_1} + \cdots + H_{i_1\dots i_{r-1}s} R_{i_r}{}^{s}{}_{kl}|_{m_1} = 0, \tag{5.3}$$

$$H_{si_2\dots i_r} R_{i_1}{}^{s}{}_{kl}|_{m_1}|_{m_2} + \cdots + H_{i_1\dots i_{r-1}s} R_{i_r}{}^{s}{}_{kl}|_{m_1}|_{m_2} = 0, \tag{5.4}$$

— — — — — —

Aus (1. 2) folgt nun der

Satz 5. *Die Integrabilitätsbedingungen von* (5. 1) *sind* (5. 2) *und* (5. 3).

BEWEIS. (5. 4) und die weiteren kovarianten Ableitungen reduzieren sich nämlich nach (1. 2) immer auf die Gleichungen (5. 2) bzw. (5. 3). Daraus folgt schon der Satz.

Ist der Tensor $H_{i_1\dots i_r}$ totalsymmetrisch in allen seinen Indexen, so ist die Zahl der Gleichungen (5.2): $\frac{1}{2}\binom{n+r-1}{r} n(n-1)$ und die von (5. 3): $\frac{1}{2}\binom{n+r-1}{r} n^2(n-1)$. Falls $r=2$ ist, so bestimmen (5. 1)—(5. 3) die Metrisierbarkeit des Raumes mit dem metrischen Grundtensor H_{ij} und $r=2$.

Literatur

[1] A. MOÓR, Untersuchungen in Räumen mit rekurrenter Krümmung. J. Reine Angew. Math., **199** (1958), 91—99.

[2] L. P. EISENHART, Non-Riemannian Geometry. *Amer. Math. Soc. Coll. Publ.* Vol. VIII. (1927).

[3] H. S. RUSE, Three-dimensional spaces of recurrent curvature, *Proc. London Math. Soc.* (2) **50** (1949), 438—446.

(Eingegangen am 1. Oktober 1969.)