О групповых кольцах конечных групп I.*)

А. И. САКСОНОВ (ХАРЬКОВ)

Введение

Пусть R — произвольное коммутативное кольцо с 1, G — конечная группа, RG — групповое кольцо группы G над R. Как структурные свойства кольца RG, так и объем информации о группе G, содержащейся в RG, сильно зависят от выбора кольца R. В настоящей статье групповые кольца конечных групп изучаются над коммутативными кольцами R двух типов:

а) R — произвольная область целостности характеристики 0, в которой каждый простой делитель порядка G необратим (часть 1);

b) R — числовое поле, алгебраическое или локальное, или, более общо, произвольное поле, характеристика которого не делит порядка G (часть II).

Кольцо RG называется целочисленным групповым кольцом, если R есть кольцо целых величин числового поля. Целочисленные групповые кольца конечных групп изучались в [25], [2], [3], [4], [14], [31], [32], [28], где предполагалось, что R совпадает либо с кольцом Z целых рациональных, либо с кольцом I целых алгебраических чисел. Исследования в этой области стимулирует следующая нерешенная проблема: не определяется ли конечная группа с точностью до изоморфизма своим целочисленным групповым кольцом? Попытки дать ответ на этот вопрос привели к отысканию различного рода необходимых условий изоморфизма целочисленных групповых колец и позволили получить некоторую информацию о строении периодических подгрупп таких колец. Для отдельных узких классов групп (абелевых [25], гамильтоновых [4], групп ниль-класса 2 [28], некоторых специальных классов p-групп [14], [28]) было получено положительное решение проблемы.

Оказывается, что аналогичные результаты справедливы при более слабых предположениях относительно кольца R. Именно, как показано в настоящей статье, достаточно потребовать, чтобы характеристика R была равна 0 и каждый простой делитель порядка $|G|$ был необратим в R. Таким образом, в рамках наших рассмотрений информация о группе G, доставляемая групповым кольцом, не уменьшается при переходе от ZG к RG, где R — кольцо типа а). С другой стороны, предприятное здесь расширение класса рассматриваемых колец R является, в известном смысле, окончательным: простые примеры показывают,

*) Статья состоит из двух частей. В этом номере публикуется введение, 1-я часть и обущий список литературы. II-я часть работы будет. опубликована в ближайшем номере журнала.

что для справедливости основных результатов все условия, налагаемые на R, существенны.

В связи с изучением групповых колец над кольцами типа а) в рассмотрение вводится новый инвариант конечной группы — спектральная таблица. Спектральной таблицей группы G мы называем квадратную таблицу, на (ϱ, i)-м месте которой выписан спектр, т. е. набор собственных значений матрицы, отвечающей в ϱ-м неприводимом комплексном представлении группы G элементу i-го класса сопряженных элементов. Спектральные таблицы групп G и $\tilde{G}$ называются изоморфными, если они совпадают при подходящей нумерации представлений и классов групп G и $\tilde{G}$. Основной результат: кольцо RG определяет спектральную таблицу группы G. Обратное неверно: существуют группы с изоморфными спектральными таблицами и неизоморфными групповыми R-кольцами.

В случае, когда G является нильпотентной группой класса 2, устанавливается сопряженность в ΦG любых двух подходящим образом нормированных групповых базисов кольца RG (Φ обозначает поле частных кольца R). Как известно [7], в кольце RG такие два базиса, вообще говоря, не сопряжены.

II.-я часть работы посвящена групповым алгебрам конечных групп над числовыми полями (к которым сводится общий случай нехарактистических полей). Теория таких групповых алгебр включает в себя теорию индекса Шура и тесно связана с задачей построения минимальных полей, над которыми реализуются заданные абсолютно неприводимые (обыкновенные) представления конечных групп. В настоящей статье исследование немодулярных групповых алгебр проводится в двух направлениях.

Р. Брауэр наметил общую программу использования групповой алгебры для классификации конечных групп. Поставленная им задача состоит в описании всех групп с заданными свойствами групповой алгебры ([13], проблема 16). Пока сделаны лишь первые шаги в этом направлении. П. Роккет [30], Ж. П. Серр [38] и С. Д. Берман [6] выделили некоторые классы конечных групп, рациональные или p-адические алгебры которых расщепляются или „почти расщепляются". Обобщая эти результаты, мы указываем более широкие классы групп с этим свойством.

С другой стороны, в настоящей статье делается попытка выяснить, что можно сказать о строении немодулярной групповой алгебры, если известны некоторые хорошо обозримые инварианты группы. В этом смысле наша теорема 2. 24 представляет собой вклад в изучение алгебры KG (K-числовое поле) „на уровне таблицы характеров". Сформулируем ее следствие:

Если абсолютно неприводимый характер группы G выдерживает автоморфизм поля характеров, индуцированный подстановкой $\varepsilon \to \varepsilon^r$ (ε — примитивный $|G|$-й корень из 1), то индекс Шура этого характера делит $r-1$.

При $r = -1$ это дает классический результат Шпайзера [41] — Брауэра [9] — Хассе [23]: индекс Шура абсолютно неприводимого представления с вещественным характером равен 1, если степень представления нечетна, и 1 или 2, если эта степень четна.

Хорошо известно, что таблица характеров группы не определяет, вообще говоря, строения ее групповой алгебры. Вместе с тем представляется вероятным, что (неполным) инвариантом конечной группы, определяющим строение ее немодулярной групповой алгебры, является спектральная таблица группы. В настоящей работе это предположение находит частичное подтверждение.

Мы показываем, что спектральная таблица конечной группы полностью определяет теоретико-инвариантные свойства ее линейных представлений. Еще Фробениус и Шур [20] установили, что индекс Шура абсолютно неприводимого характера относительно поля вещественных чисел определяется теоретико-инвариантными свойствами соответствующей матричной группы. Впоследствии связь между теоретико-инвариантными и арифметическими свойствами конечных групп матриц обсуждалась неоднократно [41], [9], [10]. Используя результат Фробениуса—Шура, мы показываем, что спектральная таблица произвольной конечной группы определяет строение ее вещественной групповой алгебры.

С другой стороны, связь спектральной таблицы группы со строением ее немодулярной групповой алгебры можно обнаружить, исходя из теории Э. Витта [47]. Изучение информац ии о строении K-элементарных подгрупп группы G, которую доставляет спектральная таблица G, приводит к следующему результату:

Пусть G — дисперсивная группа или CN-группа. Тогда для любого нехарактеристического поля K строение алгебры KG определяется спектральной таблицей G.

Основные результаты I-й части этой статьи (для частного случая p-групп) анонсировались в [35], II-й части — в [36]. Пользуясь случаем, автор выражает благодарность Д. А. Супруненко за внимание.

Большая часть необходимых обозначений вводится в соответствующих местах текста. Условимся лишь о некоторых.

Применяются стандартные обозначения теории групп. G, $\tilde{G}$, G^* всегда обозначают конечные группы, $G^{\#}$ — множество неединичных элементов G. Слово „конечная" часто опускается, так что, например, „произвольная группа" всюду означает „произвольная конечная группа". Бесконечные группы в этой работе возникают лишь как группы единиц некоторых колец. Мультипликативная группа кольца A обозначается через $U(A)$. $\mathfrak{Z}(A)$ обозначает центр группы (кольца) A, $\mathfrak{Z}_i(G)$ — i-й центр группы G, G_j—j-й член ее нижнего центрального ряда ($G=G_1$, $G'=G_2$); $\chi_\varrho(i)$ — значение ϱ-го абсолютно неприводимого (обыкновенного) характера группы G на элементе i-го класса сопряженных элементов, $v_\varrho=\chi_\varrho(1)$ — степень соответствующего представления; h_i — порядок i-го класса, K_i — i-ю „классовую сумму" — сумму (в групповом кольце) элементов i-го класса, k — число классов сопряженных элементов. Соответствующие величины для группы $\tilde{G}$ снабжаются знаком $\sim$.

Q обозначает поле рациональных, Q_p — p-адических, Q_∞— вещественных чисел; Z — кольцо целых рациональных чисел, I — кольцо целых конечнопорожденного алгебраического числового поля, R — всюду, где не оговорено противное, — кольцо типа (a); Φ — поле частных области целостности R, Ψ — поле, содержащее Φ и примитивный $|G|$-й корень из 1, Ξ — поле $|G|$-х корней из 1 над Q, $K(\chi)$ — поле, полученное из поля K присоединением всех значений характера χ. Через $\mathrm{Gal}(L/K)$ обозначается группа Галуа нормального расширения L поля K. $Sp_K(\chi)=\sum_{\theta\in \mathrm{Gal}(K(\chi)/K)}\chi^\theta$. $\chi\downarrow_H$ обозначает ограничение χ на подгруппе H.

I. Групповые кольца конечных групп над некоторыми областями целостности

В этой части работы изучаются групповые кольца конечных групп G над областями целосности R, удовлетворяющими двум условиям: $(*)$ характеристика R равна 0, $(**)$ каждый простой делитель числа $|G|$ необратим в R.

§ 1. Периодические подгруппы

Цель настоящего параграфа — перенести на кольца RG известные результаты о периодических подгруппах целочисленных групповых колец. Ссылка указывает на работу, содержащую соответствующее утверждение для колец ZG или IG.

Начнем с предварительных замечаний.

Пусть A-произвольное коммутативное кольцо с 1. Каждый гомоморфизм χ: $G \to U(A)$ индуцирует кольцевой гомоморфизм $\bar{\chi}$: $AG \to A$, который, в свою очередь, индуцирует гомоморфизм $\bar{\bar{\chi}}$: $U(AG) \to U(A)$. Один такой $\chi = \chi_0$ всегда существует; он соответствует главному характеру группы G. Обозначим $\operatorname{Ker} \bar{\bar{\chi}}_0$ через $V(AG)$, $\operatorname{Im} \bar{\bar{\chi}}_0$ — через $U_G(A)$. Так как $\bar{\chi}$ и $\bar{\bar{\chi}}$ — эпиморфизмы, то $U_G(A) = U(A)$. Далее, подгруппа $W(AG) \subset U(AG)$, состоящая из элементов вида $\mu.$ 1, где $\mu \in U(A)$, а 1 — единица G, изоморфна группе $U(A) \cong U(AG)/V(AG)$. Поэтому точная последовательность

$$1 \to V(AG) \to U(AG) \to U(A) \to 1$$

расщепляется и, следовательно,

$$U(AG) \cong U(A) \times V(AG).$$

Это показывает, что, хотя по построению группа $V(AG)$ зависит от G, в действительности $V(AG)$ определяется с точностью до изоморфизма кольцом AG.

Из определения группы $V(AG)$ следует, что $V(AG)$ состоит из всех „нормированных" единиц кольца AG, т. е. из всех тех элементов $\Sigma \alpha_g g$ $(\alpha_g \in R, g \in G)$ группы $U(AG)$, для которых $\Sigma \alpha_g = 1$. При рассмотрении кольца AG кольцо A, а вместе с ним и группу $U(A)$ можно считать заданными. Поэтому в силу (1) изучение группы $U(AG)$ фактически сводится к изучению группы $V(AG)$.

В дальнейшем часто рассматриваются различные надполя кольца R. Подкольца таких полей, состоящие из алгебраических над Q элементов, мы будем отождествлять с изоморфными им подкольцами поля комплексных чисел. В доказательствах ряда утверждений для кольца RG удается осуществить редукцию от кольца R к кольцу I. При этом используется

Лемма 1. 1. *Пусть α — алгебраческое число, n — такое натуральное, что $n\alpha$ — целое. Пусть, далее, $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ составляют полный набор чисел, алгебраически сопряженных относительно поля Q. Тогда либо α — целое, либо в кольце $Z[\alpha, \beta, \ldots, \gamma]$ хотя бы один простой (рациональный) делитель числа n обратим.*

Доказательство. Допустим, что α — не целое. Тогда значение хотя бы одной элементарной симметрической функции от $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ не принадлежит

Z и, поскольку $n\alpha$ — целое, это значение имеет несократимую запись вида $\frac{a}{b}$, где $a, b \in Z$ и $b > 1$ имеет те же простые делители, что и n. Если p — один из таких делителей, то ввиду $(a, p) = 1$ найдутся $c, d \in Z$ такие, что $ac + dp = 1$. Значения элементарных симметрических функций от $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$, очевидно, принадлежат кольцу $Z[\alpha, \beta, \ldots, \gamma]$. Поэтому $\frac{a}{b}$ и, следовательно, $\frac{a}{p} \in Z[\alpha, \beta, \ldots, \gamma]$. Но тогда $\frac{1}{p} = \frac{ac + dp}{p} = \frac{a}{p} \cdot c + d \in Z[\alpha, \beta, \ldots, \gamma]$. Лемма доказана.

При изучении периодических подгрупп группы $V(RG)$, как и в случае целочисленных групповых колец, эффективным инструментом служит

Лемма 1. 2. *(лемма Бермана [4]). Пусть* $u = \Sigma\alpha_i g_i$ $(\alpha_i \in R, g_i \in G)$ *— единица конечного порядка кольца RG. Тогда либо* $u = \varepsilon g$, *где* $g \in \mathfrak{Z}(G)$, *а* ε *— корень из 1 в R, либо* $\alpha_i = 0$ *для всех* $g_i \in \mathfrak{Z}(G)$.

Доказательство. Пусть $tr(x)$ обозначает след элемента $x \in RG$ в регулярном представлении кольца RG. Тогда $tr(u) = \alpha_1 |G|$, где $\alpha_1 \in R$ есть коэффициент при единице группы G в выражении $u = \Sigma\alpha_i g_i$. Так как для некоторого m $u^m = 1$, то $tr(u) = \zeta_1 + \cdots + \zeta_{|G|}$, где ζ_i $(i = 1, \ldots, |G|)$ суть m-е корни из 1 (принадлежащие достаточно широкому полю, содержащему кольцо R). Элемент $\alpha_1 = \frac{\zeta_1 + \cdots + \zeta_{|G|}}{|G|}$ алгебраичен над Q, и, как легко видеть, мы получим полное семейство Q-сопряженных с α_1 величин, если в выражении

$$\frac{\zeta_1^r + \cdots + \zeta_{|G|}^r}{|G|} \tag{2}$$

заставим r пробегать приведенную систему вычетов по $\mathrm{mod}\, m$. Но $\zeta_1, \ldots, \zeta_{|G|}$ суть характеристические корни матрицы, отвечающей в регулярном представлении кольца RG элементу $u^r \in RG$. Поэтому выражение (2) равно $\frac{tr(u^r)}{|G|}$ и, следовательно, совпадает с коэффициентом при единице в разложении $\mathbf{u}^r$ по элементам группы G. Таким образом, все Q-сопряженные с α_1 величины принадлежат кольцу R. Поскольку $|G|\alpha_1$ — целое алгебраическое, а в кольце R необратимы все простые (рациональные) делители числа $|G|$, то, применяя лемму 1. 1., получаем, что α_1 — целое алгебраическое.

Далее, $|\alpha_1| = \frac{|\zeta_1 + \cdots + \zeta_{|G|}|}{|G|} \leqq 1$ и, поскольку любое Q-сопряженоое с α_1 имеет вид (2), то для него справедливо аналогичное неравенство. Поэтому Q-норма числа α_1 равна либо 0 — и тогда $\alpha_1 = 0$, — либо 1 — и тогда $\alpha_1 = \zeta_1 = \cdots = \zeta_{|G|}$ и $u = \zeta_1 \cdot 1$.

Предположим теперь, что лемма неверна, т. е. существует такой периодической элемент $u = \Sigma\alpha_i g_i$ группы $U(RG)$, что для $g_j \in \mathfrak{Z}(G)$ $\alpha_j \neq 0$ и в то же время $u \neq \alpha_j g_j$. Очевидно, вместе с u периодическим элементом $U(RG)$ будет и $ug_j^{-1} = \alpha_j \cdot 1 + \ldots \neq \alpha_j \cdot 1$. Но это, как мы убедились, невозможно. Лемма доказана.

Лемма 1. 2. позволяет описать периодическую часть центра группы $V(RG)$.

Следствие 1.3 [2]. Периодическая часть группы $\mathfrak{Z}(V(RG))$ совпадает с $\mathfrak{Z}(G)$.

Доказательство. Пусть z — периодический элемент группы $\mathfrak{Z}(V(RG))$ и в разложении $z=\Sigma\alpha_j g_j$, скажем, $\alpha_j\neq 0$. Тогда $zg_j^{-1}=\alpha_j\cdot 1+\ldots$ — периодический элемент группы $V(RG)$, и по лемме 1.2 $zg_j^{-1}=1$, откуда $z=g_j$. Так как $z\in\mathfrak{Z}(RG)$, то $g_j\in\mathfrak{Z}(G)$.

Следствие 1.4 [25]. Если G абелева, то единственными единицами конечного порядка кольца RG являются тривиальные единицы вида εg, где $\varepsilon\in R$, $g\in G$.

Из леммы 1.2 вытекают также важные свойства периодических подгрупп группы $V(RG)$.

Следствие 1.5 [14]. Любая периодическая подгруппа группы $V(RG)$ R-линейно независима и является поэтому конечной группой порядка $\leqq|G|$.

Доказательство R-линейной независимости проводится так же, как и в [14].

Следствие 1.6 [14]. $RG\cong R\tilde{G}$ тогда и только тогда, когда $|G|=|\tilde{G}|$ и существует подгруппа группы $V(RG)$, изоморфная $\tilde{G}$.

Доказательство. Если $RG\cong R\tilde{G}$, то можно считать, что $\tilde{G}$ — некоторый групповой базис кольца RG. Тогда, очевидно, $|G|=|G|$ и $\tilde{G}\cap W(RG)=1$*. Ввиду соотношения (1) отсюда следует существование подгруппы группы $V(RG)$, изоморфной $\tilde{G}$.

Обратно, пусть $\tilde{G}\leqq V(RG)$ и $|G|=|\tilde{G}|$. Так как $\tilde{G}$ R-линейно независима (следствие 1.5), то нам нужно лишь показать, что определитель d матрицы перехода от G к $\tilde{G}$ является единицей в R. Вычислим дискриминанты кольца ΦG в базисах G и $\tilde{G}$. Учитывая, что G и $\tilde{G}$ — группы порядка $|G|$, легко получаем, что оба дискриминанта равны $|G|^{|G|}$. Таким образом, $|G|^{|G|}=d^2|G|^{|G|}$ и, поскольку R — область целостности, $d^2=1$. Следствие 1.6 доказано.

Следствие 1.7. Порядок любой периодической (и поэтому конечной) подгруппы группы $V(RG)$ делит $|G|$.

Доказательство. Пусть H — произвольная конечная подгруппа $V(RG)$. Обозначим через χ характер Φ-представления группы H, индуцированного регулярным представлением кольца ΦG. Если $v\in H^{\#}$, то по лемме 1.2 коэффициент при единице группы G в разложении $v=\Sigma\alpha_i g_i$ равен 0 и поэтому $\chi(v)=0$. Но тогда $\dfrac{|G|}{|H|}=\dfrac{\chi(1)}{|H|}=$ кратности, с которой χ содержит главный характер группы $H=$целому.

Ниже нам понадобится лемма, принадлежащая, по существу, Р. Брауэру [12] (см. также [28], стр. 569).

* Определение группы $W(RG)$ см. выше на стр. 190.

Лемма 1.8. *Пусть A — произвольное коммутативное кольцо с 1, G — конечная группа. Обозначим через Λ A-модуль, порожденный всеми разностями $xy-yx$, $x, y \in AG$, и положим $\Lambda_p = \Lambda + pA$*. Для любого $x \in AG$ обозначим через $s_i(x)$ сумму коэффициентов при элементах i-го класса сопряженных элементов группы G в выражении*

$$x=\sum \xi_g g \qquad (\xi_g \in A, g \in G).$$

Тогда имеют место следующие утверждения:

1. Λ состоит в точности из всех $x \in AG$, для которых $s_i(x)=0$, $i=1, \ldots, k$.
2. Λ_p состоит в точности из всех $x \in AG$, для которых $s_i(x) \in pA$, $i=1, \ldots, k$.
3. Если $x, y \in AG$, то из $x \equiv y \pmod{\Lambda_p}$ вытекает $x^{p^a} \equiv y^{p^a} \pmod{\Lambda_p}$.
4. Если $x_j \in AG$, $j=1, \ldots, n$, то $(x_1+\cdots+x_n)^{p^a} \equiv x_1^{p^a}+\cdots+x_n^{p^a} \pmod{\Lambda_p}$.

Продолжим изучение периодических подгрупп группы $V(RG)$.

Предложение 1. 9 [14]. Экспонента любой периодической подгруппы группы $V(RG)$ делит экспоненту группы G.

Доказательство. Так как p-часть экспоненты группы равна экспоненте ее p-силовской подгруппы, а экспонента p-группы совпадает с порядком ее некоторого элемента, то нам достаточно показать, что порядок любого p-элемента группы $V(RG)$ делит p-часть экспоненты G.

Пусть $v=\Sigma\alpha_i g_i$ — элемент порядка $p^n>1$ группы $V(RG)$ и пусть p-часть экспоненты группы G равна p^e. Ввиду следствия 1. 7 можно считать, что $p \mid |G|$ и поэтому $pR \neq R$.

Предположим, что доказываемое предложение неверно и v — тот элемент $V(RG)$, порядок которого p^n превосходит p^e. Тогда $1 \neq v^{p^e}$ и в записи v^{p^e} через элементы группы G коэффициент при единице G равен 0 (лемма 1. 2). Воспользовавшись леммой 1. 8, получаем

$$v^{p^e} \equiv \sum \alpha_i^{p^e} g_i^{p^e} \qquad (\operatorname{mod} \Lambda_p). \tag{3}$$

Сравнивая коэффициенты при $1 \in G$ слева и справа в (3), убеждаемся, что

$$\sum{}' \alpha_i^{p^e} \equiv \left(\sum{}' \alpha_i\right)^{p^e} \equiv 0 \qquad (\operatorname{mod} pR), \tag{4}$$

где суммирование ведется по коэффициентам при всех p-элементах группы G.

С другой стороны, снова используя лемму 1. 8, имеем

$$1=v^{p^n} \equiv \sum \alpha_i^{p^n} g_i^{p^n} \qquad (\operatorname{mod} \Lambda_p),$$

откуда вытекает, что

$$\sum{}' \alpha_i^{p^n} \equiv \left(\sum{}' \alpha_i\right)^{p^n} \equiv 1 \qquad (\operatorname{mod} pR). \tag{5}$$

Поскольку $pR \neq R$, (4) и (5) противоречат друг другу, что и доказывает предложение.

---

* Здесь и всюду в аналогичных случаях под p понимается элемент, совпадающий с суммой p главных единиц кольца A (p — простое рациональное).

Предложение 1. 10. Уравнение $x^{p^n}=g$, $g\in G$, p — простое, разрешимо в RG тогда и только тогда, когда оно разрешимо в G.

Доказательство нужно, очевидно, провести лишь в одну сторону. Предположим, что существуют $x=\sum \alpha_i g_i\in RG$ и $g\in G$ такие, что $x^{p^n}=g$. Тогда

$$g=x^{p^n}\equiv \sum \alpha_i^{p^n} g_i^{p^n} \qquad (\operatorname{mod} \Lambda_p).$$

Поскольку $pR\neq R$, ввиду утверждения 2) леммы 1. 8 заключаем, что g принадлежит такому классу сопряженных элементов группы G, элементы которого являются p^n-ми степенями элементов некоторого класса. Но это значит, что $g=g_0^{p^n}$ для некоторого $g_0\in G$.

Рассмотрим строение периодических нормальных делителей группы $U(RG)$. Ввиду соотношения (1) вопрос об их строении сводится к аналогичному вопросу для группы $V(RG)$ и ситуация здесь такая же, как и в случае целочисленных групповых колец [31].

Лемма 1. 11. $G\lhd V(RG)$ *тогда и только тогда, когда* $G=V(RG)$.

Доказательство. Допустим, что $V(RG)\neq G$ и пусть $v\in V(RG)$, $v\notin G$. Так как $G\lhd V(RG)$ и, следовательно, $G^v=G$, то $\langle G, v\rangle$ есть конечная подгруппа $V(RG)$ порядка, большего $|G|$. Это противоречит следствию 1. 5.

Следствие 1. 12. Если $G\lhd V(RG)$, то G абелева или гамильтонова.

Действительно, если G не абелева и не гамильтонова, то, согласно результату С. Д. Бермана [4], уже ZG (и тем более RG) содержит нетривиальные единицы конечного порядка. Применяя лемму 1. 11, получаем, что $G\ntriangleleft V(RG)$.

Предложение 1. 13. Пусть H — периодический нормальный делитель группы $V(RG)$. Тогда H содержится в G и является абелевой или гамильтоновой группой.

Доказаельство. Поскольку G нормализует H, то GH — периодическая подгруппа группы $V(RG)$ и по следствию 1. 5 $|GH|\leqq|G|$. Отсюда $H\subseteqq G$.

Далее, полагая в следствии 1. 12 $G=H$ и учитывая, что $V(RH)\subseteqq V(RG)$, получаем, что H — абелева или гамильтонова.

Заключим настоящий параграф предложением, для случая модулярного группового кольца p-группы полученный Колеманом [15]. Доказательство общего случая использует ту же идею, однако мы приводим его для полноты изложения.

Предложение 1. 14. Пусть G — группа, H — ее p-подгруппа, R — произвольное коммутативное кольцо с 1*, в котором элемент p необратим. Тогда $\operatorname{Aut}_{U(RG)}(H)\cong\operatorname{Aut}_G(H)$.

Доказательство. Покажем, что для каждого $u\in N_{U(RG)}(H)$ найдется такой $g\in G$, что автоморфизмы группы H, индуцируемые трансформированием соответственно с помощью u и g совпадают. Ясно, что вместо $u\in N_{U(RG)}(H)$ можно брать $v\in N_{V(RG)}(H)$.

---

*) Здесь ограничение на характеристику R не накладывается.

Пусть $v \in N_{V(RG)}(H)$. Тогда $\sigma: h \to h^v = v^{v-1}hv$ $(h \in H)$ — автоморфизм группы H, а $\tau: h \to \begin{pmatrix} g \\ hg(h^{-1})^v \end{pmatrix}$ — представление H подстановками элементов группы G. Так как H — p-группа, то длины орбит представления τ суть степени p. Покажем, что по крайней мере одна орбита имеет длину 1, т. е. существует элемент $g \in G$, неподвижный относительно группы $\tau(H)$.

Действительно, $h \cdot v \cdot (h^{-1})^v = v$, и легко видеть, что в разложении $v = \sum_{g \in G} \alpha_g g$ коэффициентны при элементах любой τ-орбиты равны между собой. Если бы длины всех τ-орбит были кратны p, то отсюда бы вытекало, что

$$(6) \qquad \sum \alpha_g \equiv 0 \qquad (\operatorname{mod} pR).$$

Так как $pR \neq R$, то (6) противоречит равенству $\sum \alpha_g = 1$, выполняющемуся для любого элемента $v \in V(RG)$. Следовательно, найдется $g \in G$, для которого $hg(h^{-1})^v = g$, т. е. $g^{-1}hg = v^{-1}hv$ при любом $h \in H$. Предложение доказано.

Следствие 1. 15. Пусть G — p-группа, R — кольцо из условия предложения 1. 14. Тогда группа $U(RG)$ обладает внешним автоморфизмом порядка $p^n > 1$.

Доказательство. По предложению 1. 14 автоморфизм группы $U(RG)$, индуцированный внешним автоморфизмом базисной группы G сам будет внешним. Но, как показал Гашютц [21], любая конечная p-группа обладает внешним автоморфизмом порядка $p^n > 1$.

§ 2. Необходимые условия изоморфизма групповых колец

Две группы с изоморфными групповыми кольцами можно рассматривать как групповые базисы одного и того же кольца. Поэтому отыскание необходимых условий изоморфизма групповых колец сводится в выяснению того, какие свойства базисной группы G не меняются при переходе к другому базису кольца RG, т. е. какие инварианты группы G определяются кольцом RG. Одним примером такого инварианта*) мы уже располагаем: согласно следствию 1. 6 и предложению 1. 9 кольцо RG определяет экспоненту G. В этом и следующем параграфах информация о группе G, содержащаяся в кольце RG, изучается систематически.

В качестве первого шага покажем, что кольцо RG определяет структуру нормальных делителей и индексы всех главных рядов группы G. Этот факт, хорошо известный для колец IG [14], [28], для колец RG также явится следствием более сильных результатов, независимо доказываемых ниже. Однако предлагаемый подход, возможно, окажется полезным при изучении групповых колец над кольцами других типов.

Пусть A — произвольное коммутативное кольцо с 1, J — двусторонний идеал кольца AG. Естественный гомоморфизм $AG \to AG/J$ индуцирует гомоморфизм группы $V(AG)$, ядро которого состоит из всех элементов группы $V(AG)$, сравнимых с 1 по mod J. Образ группы $V(AG)$ при этом гомоморфизме

*) Тривиальный пример — порядок G.

будем обозначать через $V(AG/J)$. Каждому J отвечает нормальный делитель $N(J)$ группы G такой, что

$$N(J)=\{g|g\in G,\, g\equiv 1 \pmod J\}.$$

Обратно, каждому $N \lhd G$ соответствует двусторонний идеал $J(N)$ кольца AG состоящий из элементов вида $\sum_{g,h} \alpha_{g,h} g(h-1)$, где h пробегает N, а g — полную систему вычетов G по mod H. Очевидно, $J(N)$ совпадает с наименьшим двусторонним идеалом J кольца AG, для которого $h\equiv 1 \pmod J$.

Если для двустороннего идеала J кольца AG существует такой $N\lhd G$, что $J=J(N)$, то мы будем называть J нормально порожденным идеалом. Легко видеть, что порядок N и A-размерность $J(N)$ определяют друг друга и что отображение $N\to J(N)$ является изоморфизмом структуры нормальных делителей G на структуру нормально порожденных идеалов кольца AG.

Группы G и $\tilde{G}$ называются сильно N-структурно изоморфными, если существует сохраняющий индексы изоморфизм структуры нормальных делителей G на структуру нормальных делителей $\tilde{G}$. Почти очевидно следующее

Предложение 1. 16. Пусть A — произвольное коммутативное кольцо с 1, G — конечная группа. Если нормально порожденные идеалы группового кольца AG допускают характеризацию исключительно в терминах кольца AG и группы $V(AG)$, то любые два групповых базиса кольца AG сильно N-структурно изоморфны.

Доказательство. Пусть $\tilde{G}$ — любой групповой базис кольца AG. В силу соотношения (1) можно, не нарушая общности, сразу считать, что $\tilde{G}\subset V(AG)$ и поэтому $V(AG)=V(A\tilde{G})$. Тогда по условию предложения совокупности нормально порожденных идеалов кольца AG для групп G и $\tilde{G}$ совпадают. Учитывая, что структура нормально порожденных идеалов изоморфна структуре нормальных делителей базисной группы, а A-размерности нормально порожденных идеалов определяют порядки соответствующих нормальных делителей, получаем требуемое.

Для рассматриваемого нами класса колец RG мы можем дать характеризацию, указанную в предложении 1. 16.

Предложение 1. 17 (характеризация нормально порожденного идеала). Двусторонний идеал J кольца RG нормально порожден тогда и только тогда, когда всякая периодическая подгруппа группы $V(RG/J)$ R-линейно независима в кольце RG/J.

Доказательство. Необходимость. Если J нормально порожден, то, как хорошо известно, RG/J изоморфно групповому кольцу группы $G/N(J)$ над R. Остается сослаться на следствие 1. 5.

Достаточность. Пусть, напротив, найдется $x\in J\setminus J(N(J))$. Тогда в фактор-кольце $RG/J(N(J))$ класс $xJ(N(J))$ является ненулевым. Обозначим этот класс через $\bar{x}$, а элементны группы $G/N(J)$ через $\bar{g}_i$. В кольце $RG/J(N(J))$

$$\bar{x}=\sum \alpha_i \bar{g}_i, \tag{7}$$

причем, не все $\alpha_i\in R$ равны 0. Далее, по определению $N(J)$ группа $G/N(J)$ содержится в $V(RG/J)$ и поэтому R-линейно независима в кольце RG/J. Однако, переходя в (7) к образам при гомоморфизме $RG/J(N(J)) \to RG/J$, получаем слева 0, что означает R-линейную зависимость элементов группы $G/N(J)$ в кольце RG/J. Противоречие.

Из предложений 1. 16 и 1. 17 вытекает

Следствие 1. 18. Если $RG \cong R\tilde{G}$, то G и $\tilde{G}$ сильно N-структурно изоморфны.

Следующим этапом в исследовании „R-кольцевых свойств" группы G является установление того факта, что „классовые суммы" K_i определяются, с точностью до некоторых множителей из R, самим кольцом RG. Для колец ZG этот результат был получен С.Д. Берманом [3], а на кольца IG был перенесен независимо С.С. Поляком [29], Г. Глауберманом (см. 28]) и автором [32].

Впрочем, мы докажем более общее утверждение.

Теорема 1. 19. *Пусть изоморфизм* τ: $\mathfrak{Z}(R\tilde{G}) \to \mathfrak{Z}(RG)$ *продолжается до изоморфизма* $\bar{\tau}$: $\Phi\tilde{G} \to \Phi G$. *Тогда классы сопряженных элементов групп* G *и* $\tilde{G}$ *можно занумеровать так, что* $\tau(\tilde{K}_i) = \varepsilon_i K_i$, *где* ε_i — *некоторый* $(G:G')$-*й корень из 1 в* R.

Нам будет удобно доказать сперва частный случай теоремы 1. 19.

Теорема 1. 20. *Пусть* α — *автоморфизм кольца* $\mathfrak{Z}(RG)$, *продолжаемый до автоморфизма* $\bar{\alpha}$ *кольца* ΦG. *Тогда* α *индуцирует мономиальную подстановку на множестве „классовых сумм"* $\{K_i\}_1^k$:

$$\alpha(K_i) = \varepsilon_i K_{\alpha(i)}.$$

Здесь ε_i — *некоторый* $(G:G')$ — *й корень из 1 в* R.

Доказательство. $\bar{\alpha}$ продолжается до автоморфизма кольца ΨG, который мы тоже будем обозначать через $\bar{\alpha}$. ΨG есть ортогональная сумма полных матричных алгебр над Ψ, которые лишь переставляются автоморфизмом $\bar{\alpha}$. Размерностью минимального центрального идемпотента кольца ΨG мы будем называть размерность соответствующей этому идемпотенту полной матричной алгебры. Очевидно, $\bar{\alpha}$ переводит минимальный центральный идемпотент кольца ΨG в минимальный центральный идемпотент той же размерности.

Как известно [16, стр. 236], базисы „классовых сумм" $\{K_i\}_1^k$ и минимальных идемпотентов $\{e_\varrho\}_1^k$ кольца $\mathfrak{Z}(\Psi G)$ связаны следующим образом:

$$K_i = h_i \sum_{\varrho=1}^{k} \frac{\chi_\varrho(i)}{v_\varrho} e_\varrho, \quad e_\varrho = \frac{v_\varrho}{|G|} \sum_{i=1}^{k} \overline{\chi_\varrho(i)} K_i.$$

Таким образом, элементы матриц перехода от $\{K_i\}_1^k$ к $\{e_\varrho\}_1^k$ и обратно принадлежат кольцу $S\left[\frac{1}{|G|}\right]$, где S — кольцо целых поля Ξ. Так как $\bar{\alpha}$ лишь переставляет минимальные идемпотенты кольца $\mathfrak{Z}(\Psi G)$ и, следовательно, матрица ограничения автоморфизма $\bar{\alpha}$ на $\mathfrak{Z}(\Psi G)$, отнесенная к базису $\{e_\varrho\}_1^k$, является Z-

матрицей, то матрица A ограничения $\bar{\alpha}$ на $\mathfrak{Z}(\Psi G)$, относенная к базису $\{K_i\}_1^k$, является $S\left[\frac{1}{|G|}\right]$-матрицей. Но по условию теоремы ограничение $\bar{\alpha}$ на $\mathfrak{Z}(RG)$ является автоморфизмом кольца $\mathfrak{Z}(RG)$. Поэтому A является одновременно и R-матрицей. Мы утверждаем, что A в действительности является S-матрицей.

В самом деле, $A=(a_{ij})$, где $a_{ij}=\frac{h_j}{|G|}\sum_{\varrho}\overline{\chi_\varrho(i)}\,\chi_\varrho(j)$. Если $\theta\in\mathrm{Gal}\,(\Xi/Q)$ и θ индуцируется подстановкой $\varepsilon\to\varepsilon^r$($\varepsilon$ — примитивный $|G|$-й корень из 1, $(r,|G|)=1$), то

$$a_{ij}^\theta=\frac{h_j}{|G|}\sum_{\varrho}\overline{[\chi_\varrho(i)]^\theta}[\chi_\varrho(j)]^\theta=\frac{h_{j^\theta}}{|G|}\sum_{\varrho}\overline{\chi_\varrho(i^\theta)}\chi_\varrho(j^\theta),$$

где i^θ (j^θ) обозначает номер класса, состоящего из r-х степеней элементов i-го (j-го) класса. Но тогда $a_{ij}^\theta=a_{i^\theta j^\theta}\in R$ и a_{ij} вместе со всеми своими Q-сопряженным принадлежит кольцу $S\left[\frac{1}{|G|}\right]\cap R$. Поскольку в последнем, так же как и в R, любой простой делитель числа $|G|$ необратим, то, применяя к a_{ij} лемму 1. 1, получаем, что a_{ij} — целое, т. е. A является S-матрицей.

Итак, α индуцирует автоморфизм кольца $\mathfrak{Z}(SG)$. Введем в $\mathfrak{Z}(\Xi G)$ эрмитову метрику, полагая для минимальных идемпотентов

$$(e_\varrho,e_\sigma)=\frac{v_\varrho^2}{|G|}\delta_{\varrho\sigma},$$

где $\delta_{\varrho\sigma}$ — дельта Кронекера. Очевидно, эта метрика определяется кольцом ΞG и не зависит от выбора базисной группы G. Так как рассматриваемый автоморфизм кольца $\mathfrak{Z}(\Xi G)$ сохраняет размерность идемпотента, то, как легко видеть, он является унитарным оператором относительно только что введенной метрики. Этот оператор мы также будем обозначать через α.

Вычислим метрическую матрицу в базисе $\{K_i\}_1^k$.

$$(K_i,K_j)=\left(\sum_{\varrho=1}^{k}\frac{h_i\chi_\varrho(i)}{v_\varrho}e_\varrho,\ \sum_{\sigma=1}^{k}\frac{h_j\chi_\sigma(j)e_\sigma}{v_\sigma}\right)=\sum_{\varrho=1}^{k}\frac{h_ih_j\chi_\varrho(i)\overline{\chi_\varrho(j)}}{v_\varrho^2}(e_\varrho,e_\varrho)=h_i\delta_{ij}.$$

Так как α унитарен, то $(\alpha(K_j),\alpha(K_j))=(K_j,\ K_j)$, $1\leqq j\leqq k$, или, с учетом равенства $\alpha(K_j)=\sum_i a_{ij}K_i$,

$$\sum_i|a_{ij}|^2h_i=h_j. \tag{8}$$

Если θ — произвольный элемент группы $\mathrm{Gal}\,(\Xi/Q)$, то ввиду $h_{i^\theta}=h_i$ $(i=1,\dots,k)$ равенство (8) влечет

$$\sum_i|a_{ij}^\theta|^2h_i=h_j. \tag{9}$$

Обозначим через $\mathscr{L}_t$ S-модуль, порожденный теми „классовыми суммами", которые соответствуют классам порядка, не превосходящего t. Поскольку a_{ij} — целые алгебраические, то для каждой пары индексов (i,j) с $a_{ij}\neq 0$ найдется $\theta=\theta(i,j)\in\mathrm{Gal}\,(\Xi/Q)$ такой, что $|a_{ij}^\theta|\geqq 1$. Так как оператор α, во всяком случае, не растягивающий (α даже унитарен), то отсюда вытекает, что для любого натурального t S-модуль $\mathcal{L}_t$ инвариантен относительно α. Вместе с тем, если $h_j > t$, то не может быть $\alpha(K_j) \in \mathcal{L}_t$, ибо $\alpha^{-1}\mathcal{L}_t \subseteqq \mathcal{L}_t$. Следовательно, для каждого $j=1, \ldots, k$ найдется такое i, что $h_i = h_j$ и $a_{ij} \neq 0$. Но тогда ввиду $|a_{ij}^\theta| \geqq 1$ из (9) следует, что $a_{li}=0$ при $l \neq i$ и $|a_{ij}^\theta|=1$ при любом $\theta \in \mathrm{Gal}\,(\Xi/Q)$. Отсюда $a_{ij} = \varepsilon_i$ — корню из 1. Таким образом, доказано, что матрица A мономиальна.

Наконец, если $e_1 = \frac{1}{|G|}\sum_{i=1}^{k} K_i$, то $\bar{\alpha}(e_1) = e_\varrho = \frac{1}{|G|}\sum_i \overline{\chi_\varrho(i)} K_i$, где характер χ_ϱ необходимо является линейным. Следовательно, отличные от нуля элементы матрицы A суть $(G:G')$-е корни из 1. Теорема 1. 20 доказана.

Докажем теперь теорему 1. 19.

$\bar{\tau}$: $\Phi\tilde{G} \to \Phi G$ продолжается до изоморфизма $\Psi\tilde{G}$ на ΨG (который мы обозначим снова через $\bar{\tau}$). Очевидно, τ отображает минимальные центральные идемпотенты кольца $\Psi\tilde{G}$ в минимальные центральные идемпотенты кольца ΨG. Так же, как и при доказательстве теоремы 1. 20, убеждаемся, что элементы матрицы T, связывающей базисы $\{\tau(K_i)\}_1^k$ и $\{K_j\}_1^k$ кольца $\mathfrak{Z}(RG)$, принадлежат кольцу $S\left[\frac{1}{|G|}\right] \cap R$ и, следовательно, кольцу S (равенство $|G| = |\tilde{G}|$ следует из изоморфизма колец ΦG и $\Phi\tilde{G}$). Таким образом, существует изоморфизм кольца $\mathfrak{Z}(S\tilde{G})$ на кольцо $\mathfrak{Z}(SG)$ (который мы также будем обозначать через τ).

Снова введем в $\mathfrak{Z}(\Xi G)$ эрмитову метрику, полагая для минимальных идемпотентов

$$(e_\varrho, e_\sigma) = \frac{v_\varrho^2}{|G|}\,\delta_{\varrho\sigma},$$

и вычислим метрические матрицы в базисах $\{\tau(\tilde{K}_i)\}_1^k$ и $\{K_j\}_1^k$.

$$\left(\tau(\tilde{K}_i), \tau(\tilde{K}_{i'})\right) = \left(\tilde{h}_i \sum_{\varrho=1}^{k} \frac{\tilde{\chi}_\varrho(i)}{\tilde{v}_\varrho}\, e_\varrho,\ \tilde{h}_{i'} \sum_{\sigma=1}^{k} \frac{\tilde{\chi}_\sigma(i')}{\tilde{v}_\sigma}\, e_\sigma\right) =$$

$$= \tilde{h}_i \tilde{h}_{i'} \sum_{\varrho=1}^{k} \tilde{\chi}_\varrho(i)\overline{\tilde{\chi}_\varrho(i')}\,\frac{(e_\varrho, e_\varrho)}{\tilde{v}_\varrho^2} = \frac{\tilde{h}_i \tilde{h}_{i'}}{|G|} \sum_\varrho \tilde{\chi}_\varrho(i)\overline{\tilde{\chi}_\varrho(i')} = \tilde{h}_i \delta_{ii'}.$$

Аналогично $(K_j, K_{j'}) = h_j \delta_{jj'}$.

С другой стороны, $\tau(\tilde{K}_i) = \sum_j t_{ij} K_j$, откуда $\left(\tau(\tilde{K}_i), \tau(\tilde{K}_i)\right) = \sum_j |t_{ij}|^2 (K_j, K_j)$. Таким образом, $\tilde{h}_i = \sum_j |t_{ij}|^2 h_j$. Поэтому $\sum_j h_j = |G| = \sum_i \tilde{h}_i = \sum_i \sum_j |t_{ij}|^2 h_j$, т. е.

$$\sum_j \{(\sum_i |t_{ij}|^2) - 1\} h_j = 0. \tag{10}$$

Поскольку структурные константы кольца $\mathfrak{Z}(RG)$ в базисе $\{\tau(\tilde{K}_i)\}_1^k$ рациональны, то всё, сказанное о матрице T, применимо и к матрице T^θ, где θ — любой элемент группы $\mathrm{Gal}\,(\Xi/Q)$. Преобразование кольца $\mathfrak{Z}(RG)$, задаваемое в базисе $\{\tau(\tilde{K}_i)\}_1^k$ матрицей $T^\theta T^{-1}$, является тогда автоморфизмом кольца $\mathfrak{Z}(RG)$, удовлетворяющим условию теоремы 1. 20. В силу этой теоремы $T^\theta T^{-1}$ при любом $\theta \in \mathrm{Gal}\,(\Xi/Q)$ является унитарной матрицей. Следовательно,

$$(T^*)^{-1}(T^\theta)^* T^\theta T^{-1} = E,$$

откуда $(T^\theta)^* T^\theta = T^* T$. В частности, $\sum_i |t_{ij}^\theta|^2 = \sum_i |t_{ij}|^2$ при любом $\theta \in \mathrm{Gal}\,(\Xi/Q)$.

Так как t_{ij} — целые алгебраические, то, очевидно, найдется θ, при котором $\sum_i |t_{ij}^\theta|^2 \geqq 1$. Но тогда

$$\sum_i |t_{ij}^\theta|^2 \geqq 1 \tag{11}$$

для всех $\theta \in \mathrm{Gal}(\Xi/Q)$ и всех $j=1, \dots, k$, ибо $\sum_i |t_{ij}^\theta|^2$ не зависит от θ, а j было выбрано произвольно. Ввиду (10) из (11) следует, что $\sum_i |t_{ij}^\theta|^2=1$ для всех возможных θ и j. Поэтому T мономиальна и ее отличные от нуля элементы суть корни из 1.

Замечание относительно степени этих корней из 1 вытекает из аналогичного утверждения теоремы 1. 20.

Следствие 1. 21. Если $RG \cong R\tilde{G}$, то G и $\tilde{G}$ имеют изоморфные таблицы характеров (таблицы характеров групп G и $\tilde{G}$ называются изоморфными, если одна из них получается из другой перестановкой строк и столбцов).

Доказательство. По теореме 1. 19 существует 1—1 соответствие $\tilde{K}_i \leftrightarrow \varepsilon_i K_i$, сохраняющее таблицу умножения „классовых сумм". Так как последняя рациональна и неотрицательна, а ε_i — корни из 1, то таблицы умножения „классовых сумм" для групп G и $\tilde{G}$ совпадают. Следовательно, при подходящей нумерации классов и характеров совпадают и таблицы характеров G и $\tilde{G}$.

Следствие 1. 22 [14], [28], [32]. Если $RG \cong R\tilde{G}$, то существует такой сильный N-структурный изоморфизм ψ групп G и $\tilde{G}$, что.

1) для любого $N \lhd G$ из $L \lhd G$ и $L/N = \mathfrak{Z}(G/N)$ вытекает $\psi(L)/\psi(N) = \mathfrak{Z}(\tilde{G}/\psi(N))$ и $L/N \cong \psi(L)/\psi(N)$;

2) $\psi(\mathfrak{Z}_i(G)) = \mathfrak{Z}_i(\tilde{G})$ и $\mathfrak{Z}_{i+1}(G)/\mathfrak{Z}_i(G) \cong \mathfrak{Z}_{i+1}(\tilde{G})/\mathfrak{Z}_i(\tilde{G})$;

3) $\psi(G_j) = \tilde{G}_j$ и $G_j/G_{j+1} \cong \tilde{G}_j/\tilde{G}_{j+1}$.

В частности, если G нильпотента класса c, то и $\tilde{G}$ нильпотента того же класса.

Ввиду следствия 1. 21 для доказательства 1. 22 достаточно сослаться на следствие 2. 2 из [33].

§ 3. *Спектральная таблица конечной группы*

Следствие 1. 21 показывает, что кольцо RG как инвариант конечной группы мажорирует* таблицу характеров, причем строго мажорирует, поскольку существуют группы с изоморфными таблицами характеров и неизоморфными групповыми R-кольцами (например, неабелевы группы порядка p^3, p — простое). В этом параграфе вводится новый инвариант конечной группы, строго мажорирующий таблицу характеров и, в свою очередь, строго мажорируемый групповым R-кольцом. Этим инвари антом является спектральная таблица.

*См. приложение к настоящей статье.

Спектральной таблицей группы G мы называем квадратную таблицу, на (ϱ, i)-м месте которой выписан спектр, т. е. набор собственных значений матрицы, отвечающей в ϱ-м неприводимом комплексном представлении группы G элементу ее i-го класса сопряженных элементов. Спектральные таблицы групп G и $\tilde{G}$ называются изоморфными, если они совпадают при подходящей нумерации неприводимых представлений и классов сопряженных элементов групп G и $\tilde{G}$. Задание спектральной таблицы группы G, как легко видеть, эквивалентно заданию упорядоченной совокупности характеристических полиномов матриц всех абсолютно неприводимых (обыкновенных) представлений G. Таким образом, при изучении спектральной таблицы группы к рассмотрению привлекаются все коэффициенты характеристических полиномов матриц представлений, а не только вторые коэффициенты — следы матриц, — как это происходит в теории характеров.

Пусть $K_i^{[m]}$ (соответственно $(K_i^*)^{[m]}$) обозначает сумму элементов класса сопряженных элементов, группы G (соответственно G^*), состоящего из m-х степеней элементов i-го класса G (соответственно G^*). Р. Брауэр [13] поставил следующий вопрос: не будут ли изоморфными конечные группы G и G^*, для которых существует сохраняющее таблицу умножения „классовых сумм" взаимно однозначное соответствие $K_i \leftrightarrow K_i^*$, при котором $(K_i^{[m]})^* = (K_i^*)^{[m]}$? Группы G и $\tilde{G}$, удовлетворяющие требованиям вопроса Брауэра, назовем брауэровской парой. Как показал Дейд [17], существуют брауэровские пары неизоморфных групп.

Теорема 1. 23. *Группы G и G^* тогда и только тогда образуют брауэровскую пару, когда изоморфны их спектральные таблицы.*

Доказательство. Необходимость. Если G и G^* образуют брауэровскую пару, то (при соответствующей нумерации классов) совпадают таблицы умножения „классовых сумм" групп G и G^* и, следовательно, изоморфны их таблицы характеров. Значение ϱ-го абсолютно неприводимого характера на элементах класса, состоящего из m-х степеней i-го класса, есть, очевидно, m-я степенная сумма собственных чисел матрицы, отвечающей в ϱ-м неприводимом комплексном представлении элементу i-го класса. Так как $(K_i^{[m]})^* = (K_i^*)^{[m]}$, то для каждой пары (ϱ, i), $1 \leqq \varrho, i \leqq k$, указанные m-е степенные суммы совпадают для групп G и G^* при любом натуральном m. Но совокупность значений достаточно большого числа степенных сумм однозначно определяет собственные числа. Таким образом, спектральные таблицы групп G и G^* изоморфны.

Достаточность. Если известен спектр матрицы, отвечающей в ϱ-м неприводимом комплексном представлении группы G элементу i-го класса сопряженных элементов, то известны и степенные суммы соответствующих собственных чисел, т. е. известны значения всех неприводимых характеров на классе, состоящем из m-х степеней элементов i-го класса (m — любое заданное натуральное число). Но совокупность k вектор-функций $(\chi_1(i), \ldots, \chi_k(i))$, $i = 1, \ldots, k$ — столбцов таблицы характеров — разделяет классы сопряженных элементов, т. е. является достаточной системой функций на классах. Поэтому по спектральной таблице группы для любого натурального m можно определить, какой класс состоит из m-х степеней элементов любого заданного класса. Отсюда вытекает, что группы с изоморфными спектральными таблицами образуют брауэровскую пару.

Следующая теорема в случае $R=I$ получена независимо Пассманом [28] и автором [32].

Теорема 1. 24. *Если $RG \cong R\tilde{G}$, то G и $\tilde{G}$ образуют брауэровскую пару.*

Для доказательства теоремы 1. 24 нам понадобится лемма 1, 25, являющаяся усилением леммы 1. 2 для случая, когда единица кольца RG дополняется до группового базиса этого кольца.

Пусть $\tilde{G}$ — произвольный групповой базис кольца RG. Тогда теорема 1. 19 устанавливает 1—1 соответствие между классами сопряженных элементов групп G и $\tilde{G}$: соответствующие „классовые суммы" совпадают, с точностью до некоторых множителей из R, как элементы кольца RG.

Лемма 1. 25. *Пусть $\tilde{G}$ — произвольный групповой базис кольца RG, $\tilde{g} \in \tilde{G}$ в соответствии с нумерацией, устанавливаемой теоремой 1. 19, принадлежит i-му классу сопряженных элементов группы $\tilde{G}$, а $s_i(x)$ имеет тот же смысл, что и в лемме 1. 8. Тогда $s_j(\tilde{g})=\varepsilon\delta_{ij}$, где ε — корень из 1 в R, δ_{ij} — дельта Кронекера. Если $\tilde{G} \leqq V(RG)$, то $\varepsilon=1$.*

Доказательство, очевидно, достаточно рассмотреть для случая, когда $\tilde{G} \leqq V(RG)$. В этом случае соответствующие „классовые суммы" для групп G и $\tilde{G}$ попросту совпадают в кольце RG. Обозначим через $\bar{\Phi}$ алгебраическое замыкание поля Φ. Произвольная фиксированная нумерация неприводимых $\bar{\Phi}$-представлений алгебры $\bar{\Phi}G$ индуцирует нумерацию абсолютно неприводимых характеров групп G и $\tilde{G}$, а само кольцо RG в силу теоремы 1. 19 устанавливает соответствие в нумерации классов сопряженных элементов G и $\tilde{G}$. При таких согласованных нумерациях характеров и классов таблицы характеров G и $\tilde{G}$ совпадают (см. доказательство следствия 1. 21).

Вычислим след элемента $\tilde{g} \in \bar{\Phi}G$ в ϱ-м неприводимом представлении алгебры $\bar{\Phi}G$. Пусть $\tilde{g}=\sum\limits_{g \in G} \alpha_g g$. Тогда

$$\tilde{\chi}_\varrho(\tilde{g}) = \sum_{g \in G} \alpha_g \chi_\varrho(g) = \sum_{j=1}^{k} s_j(\tilde{g})\chi_\varrho(j). \tag{12}$$

Вектор $(\tilde{\chi}_1(\tilde{g}), \ldots, \tilde{\chi}_k(\tilde{g}))$ совпадает по условию леммы 1. 25 с i-м столбцом таблицы характеров группы $\tilde{G}$, а значит, и группы G. Но столбцы таблицы характеров $\bar{\Phi}$-линейно и, тем более, R-линейно независимы. Поэтому из (12) вытекает, что $s_j(\tilde{g})=\delta_{ij}$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. 24. Так как $RG \cong R\tilde{G}$, то мы можем считать, что $\tilde{G}$ — групповой базис кольца RG и $\tilde{G} \leqq V(RG)$. В силу теоремы 1. 19 существует 1—1 соответствие между множествами классов сопряженных элементов групп G и $\tilde{G}$ и нам нужно лишь показать, что оператор, осуществляющий это соответствие, перестановочен с оператором перехода от любого данного класса к классу, состоящему из m-х степеней элементов данного класса (для каждого натурального m). Поскольку переход к классу с m-ми степенями осуществляется конечным числом шагов, где каждый шаг означает переход к классу с p_i-ми степенями, а p_i пробегает множество всех простых делителей m

(с учетом кратностей), то достаточно рассмотреть случай, когда $m=p$ — простое.

Если $\tilde{g}$ принадлежит i-му классу сопряженных элементов группы $\tilde{G}$, то согласно леммам 1. 25 и 1. 8

$$\tilde{g} \equiv g \qquad (\mathrm{mod}\, \Lambda_p), \tag{13}$$

где g — произвольный элемент i-го класса группы G. Снова применяя лемму 1. 8, получаем, что

$$\tilde{g}^p \equiv g^p \qquad (\mathrm{mod}\, \Lambda_p). \tag{14}$$

Далее, если $p \nmid |G|$, то класс, состоящий из p-х степеней элементов любого данного класса, определяется таблицей характеров G и тем более кольцом RG. Если же $p \,||G|$, то в силу условий, налагаемых на R, идеал pR является собственным идеалом кольца R. Ввиду леммы 1. 25 отсюда вытекает, что сравнение (13) возможно лишь в том случае, когда g и $\tilde{g}$ принадлежат соответствующим классам сопряженных элементов G и $\tilde{G}$. То же справедливо для сравнения (14). Таким образом, если g и $\tilde{g}$ принадлежат соответствующим классам, то и g^p и $\tilde{g}^p$ также принадлежат соответствующим классам. Теорема доказана.

Из теорем 1. 24 и 1. 23 вытекает

Следствие 1. 26. Если $RG \cong R\tilde{G}$, то спектральные таблицы групп G и $\tilde{G}$ изоморфны.

Результат Дэйда [17] показывает, что спектральная таблица является, вообще говоря, неполным инвариантом конечной группы. Однако, как проверил автор, 2-группа порядка $\leqq 2^6$ определяется своей спектральной таблицей и, следовательно, групповым R-кольцом. Таким образом, неизоморфные 2-группы порядка $\leqq 2^6$ имеют неизоморфные групповые кольца над кольцом целых алгебраических или целых 2-адических чисел.

Следствие 1. 27. Любой элемент произвольного группового базиса кольца RG сопряжен в кольце ΦG с тривиальной единицей кольца RG.

Доказательство. Пусть $\tilde{G}$ — какой-нибудь групповой базис кольца RG, $\tilde{g}$ — произвольный элемент группы $\tilde{G}$. Очевидно, не нарушая общности, можно считать, что $\tilde{G} \leqq V(RG)$. Мы покажем, что в этом случае $\tilde{g}$ сопряжен в ΦG с некоторым $g \in G$.

По 1. 26 спектральные таблицы G и $\tilde{G}$ изоморфны, а поскольку $\tilde{G} \leqq V(RG)$, то нумерация абсолютно неприводимых характеров групп G и $\tilde{G}$ согласуется с нумерацией абсолютно неприводимых представлений алгебры ΦG. Пусть

$$\Phi G \cong \mathfrak{A}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{A}_t$$

— разложение ΦG в ортогональную сумму простых компонент. Тогда $\tilde{g} = \sum_i \tilde{g}_i$, $\tilde{g}_i \in \mathfrak{A}$ и найдется такой $g \in G$, $g = \sum_i g_i$, $g_i \in \mathfrak{A}_i$, что спектры матриц, отвечающих в регулярном представлении алгебры ΦG элементам $\tilde{g}_i$ и g_i, совпадают при любом $i = 1, \ldots, t$. Так как эти матрицы полупросты, то отсюда вытекает, что $\tilde{g}_i$ и g_i сопряжены в $\mathfrak{A}_i$. Это, в свою очередь, влечет сопряженность $\tilde{g}$ и g в ΦG.

Замечание. Для кольца RG сохраняют силу теоремы E и F работы [28]. Хотя данное в [28] доказательство того факта, что свойство быть подгруппой Фраттини нормального делителя группы G инвариантно относительно сильного N-структурного изоморфизма групповых базисов кольца IG, содержит ошибку*, соответствующая часть теоремы D из [28] верна, по крайней мере, когда указанный нормальный делитель нильпотентен.

В заключение настоящего параграфа рассмотрим связь кольца RG с еще одним инвариантом группы G — кольцом *Ли* $L(G)$, ассоциированным с нижним центральным рядом G (определение см. в [22]).

Справедлива следующая

Теорема 1. 28. *Если* $RG \cong R\tilde{G}$, *то и* $L(G) \cong L(\tilde{G})$.

В случае $R=I$ эта теорема фактически содержится, хотя явно и не сформулирована, в работе [28]. В общем случае проходят те же рассуждения.

Строение аддитивной группы кольца $L(G)$ (вместе с градуировкой) определяется даже таблицей характеров G (см. следствие 2. 2 из [33]). Что же касается лиевого умножения в $L(G)$, то оно определяется кольцом RG в силу следующего

Предложения 1. 29. Пусть $g_i \in G_i$, $g_j \in G_j$. Тогда кольцо RG определяет коммутатор $[g_i, g_j]$ по mod G_{i+j+1}.

Для $R=I$ это утверждение получено в [28], причем его доказательство опирается на два факта: „классовые суммы'' определяются, с точностью до некоторых множителей, самим кольцом IG; любой простой делитель числа $|G|$ необратим в I. Таким образом, предложение 1. 29 остается справедливым и в рассматриваемом нами более общем случае.

Поскольку строение кольца $L(G)$ определяется кольцом RG пример двух групп Дэйда [17], имеющих изоморфные спектральные таблицы и неизоморфные кольца *Ли*, показывает, что следствие 1. 26, вообще говоря, не допускает обращения.

§ 4. Случай групп ниль-класса 2.

В доказательстве теоремы F из [28] фактически содержится доказательство следующего утверждения.

Предложение 1. 30. Для нильпотентной группы класса 2 кольцо *Ли* и спектральная таблица образуют полную систему инвариантов.

Отсюда в силу утверждений 1. 26 и 1. 28 настоящей статьи следует, что если G — группа ниль-класса 2, то $RG \cong R\tilde{G}$ влечет $G \cong \tilde{G}$ (для $R=I$ это установлено в [28]). Однако кроме теоремы изоморфизма в случае групп ниль-класса 2 имеет место следующая теорема сопряженности.

---

* В [28] ошибочно утверждается, что $\Phi(N)$, где $N \triangleleft G$, совпадает с множеством тех элементов N, которые можно удалить из любой системы образующих группы N, составляющих G-инвариантное множество. Соответствующий контр-пример:

$$G = \langle a, b | a^4 = b^2 = 1,\ a^b = a^{-1} \rangle, \quad N = \{1, a^2, b, a^2 b\}, \quad \Phi(N) = \{1\},$$

однако каждый из элементов $1, a^2$ можно удалить из любой G-инвариантной системы образующих группы N.

Теорема 1. 31. *Пусть G — нильпотентная группа класса 2. Тогда*

а) *любой групповой базис кольца RG сопряжен в кольце ΦG с базисом из тривиальных единиц;*

б) *любая периодическая единица кольца RG сопряжена в ΦG с тривиальной единицей.*

Отметим, что пункт б) сформулированной теоремы усиливает для групп ниль-класса 2 следствие 1. 27.

Доказательство. а) Как легко видеть, достаточно показать, что любой групповой базис $\tilde{G} \leqq V(RG)$ сопряжен в кольце ΦG с G. Повторяя рассуждения из доказательства теоремы F работы [28], убеждаемся в существовании такого изоморфизма f: $G \to \tilde{G}$, что для каждого $g \in G$ „классовые суммы", соответствующие элементам g и $\tilde{g} = f(g)$ совпадают в кольце RG. Другими словами, существует изоморфизм групп G и $\tilde{G}$, являющийся „продолжением" соответствия между классами сопряженных элементов G и $\tilde{G}$, устанавливаемого кольцом RG. f: $G \to \tilde{G}$, продолженный по линейности на кольцо RG, является автоморфизмом кольца RG (обозначим этот автоморфизм тоже через f), причем таким, который оставляет на месте каждую „классовую сумму". Следовательно, f оставляет поэлементно неподвижным центр кольца RG и, продолженный далее на кольцо ΦG, оставляет на месте каждый минимальный идемпотент центра ΦG. Поэтому, если

$$\Phi G \cong \mathfrak{A}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{A}_t$$

— разложение ΦG в ортогональную сумму простых компонент, то все $\mathfrak{A}_i$ f-инвариантны, и ограничение f_i автоморфизма f на $\mathfrak{A}_i$ в силу известной теоремы о центральных автоморфизмах простой алгебры является внутренним автоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}_i$. Ясно, что, если f_i индуцируется трансформированием с помощью элемента $a_i \in \mathfrak{A}_i$, то f — с помощьюэлемента $\sum a_i = a \in \Phi G$.

Для доказательства пункта b) нам понадобится

Лемма 1. 32 *(усиление лемм 1. 2. и 1. 25. для групп ниль-класса 2). Пусть G — нильпотентная группа класса 2, u — периодическая единица кольца RG. Тогда найдется такой номер i, $1 \leqq i \leqq k$, что $s_j(u) = \varepsilon\delta_{ij}$, где ε — корень из 1 в R, а δ_{ij} — дельта Кронекера.*

Доказательство достаточно провести для случая, когда $u \in V(RG)$.

Хорошо известно (и легко проверяется), что для нильпотентной группы G второго класса отображение $g \to [h, g]$ при фиксированном $h \in G$ является эндоморфизмом группы G. Следовательно, множество $\{[h, g]\}$, где $h \in G$ фиксированно, а g пробегает G, есть подгруппа центра группы G. Поэтому класс сопряженных элементов группы G, содержащий произвольный элемент $h \in G$, совпадает со смежным классом G по $[h, G]$, содержащим h. Условимся для удобства писать здесь N_h внесто $[h, G]$.

Если в кольце RG $u \not\equiv h \pmod J$, где $J = J(N_h)$, то в выражении $u = \sum \alpha_g g$ сумма коэффициентов при элементах смежного класса hN_h, т. е. при элементах G, сопряженных с h, равна 0. Это следует из леммы 1. 2, примененной к кольцу RG/J, так как $hN_h \in \mathfrak{Z}(G/N_h)$. С другой стороны, если $u \equiv h \pmod{J(N_h)}$, то по тем же соображениям указанная сумма коэффициентов равна 1. Сейчас мы покажем, что существует такой $h \in G$, что в кольце RG $u \equiv h \pmod{J(N_h)}$, чем и завершим доказательство леммы 1. 32.

Рассмотрим совокупность $\mathfrak{S}$ тех нормально порожденных идеалов J кольца RG, для которых образ u при естетсвенном гомоморфизме $RG \to RG/J$ лежит в центре RG/J. Очевидно, нормально порожденный идеал J кольца RG тогда и только тогда принадлежит $\mathfrak{S}$, когда J содержит множество всех элементов вида $[u, g]-1$, $g \in G$. Отсюда вытекает, что, если $J_1 \in \mathfrak{S}$, $J_2 \in \mathfrak{S}$, то и $J_1 \cap J_2 \in \mathfrak{S}$. Обозначим через J_0 пересечение всех идеалов из $\mathfrak{S}$. Так как идеал J_0 нормально порожден, а образ u при гомоморфизме $RG \to RG/J_0$ принадлежит центру RG/J_0, то по следствию 1. 3 найдется $g_0 \in G$ такой, что $u \equiv g_0 \pmod{J_0}$.

Далее, по определению нормально порожденного идеала идеалу J_0 отвечает нормальный делитель N_0 группы G. N_0 — наименьший среди $N \lhd G$, для которых $g_0N \in \mathfrak{Z}(G/N)$. Действительно, с одной стороны, ввиду $g_0 \equiv u \pmod{J_0}$ имеем $g_0N \in \mathfrak{Z}(G/N_0)$. Если бы, с другой стороны, $g_0N_1 \in \mathfrak{Z}(G/N_1)$ при $N_1 \subset N_0$, то выполнялось бы

$$u \equiv g_0 + x \qquad (\operatorname{mod} J(N_1)), \tag{15}$$

где $x \in J_0$. Но сравнение (15) противоречит лемме 1. 2, примененной к групповому R-кольцу группы G/N_1. Таким образом, $N_0 = [g_0, G] = N_{g_0}$. Теперь лишь остается взять в качестве h элемент g_0. Лемма 1. 32 доказана.

Продолжим доказательство теоремы 1. 31. Пункт б) этой теотемы также достаточно доказать дла случая, когда $u \in V(RG)$.

Лемма 1. 32 любой периодической единице $u = \Sigma \alpha_g g$ кольца RG ставит в соответствие класс сопряженных элементов группы G. Учитывая, что

$$u^p \equiv \sum \alpha_g^p g^p \qquad (\operatorname{mod} \Lambda_p),$$

с помощью рассуждений, аналогичных использованным в доказательстве теоремы 1. 24, убеждаемся, что, если единице $u \in RG$ соответствует i-й класс сопряженных элементов G, то единице $u^m \in RG$, где m — любое натуральное, соответствует класс, состоящий из m-х степеней элементов i-го класса.

Наконец, так же, как и в доказательстве следствия 1. 27, получаем, что спектры матриц, отвечающих элементу u во всех неприводимых Φ-представлениях кольца ΦG совпадают с соответствующими спектрами матриц любого элемента i-го класса группы G. Отсюда вытекает, что единица u кольца RG сопряжена в ΦG с некоторым $g \in G$. Теорема 1. 31 полностью доказана.

Следствие 1. 33. Пусть G — нильпотентная группа класса 2. Тогда любой периодический элемент группы $V(RG)$ дополняется до группового базиса кольца ΦG.

Интересный вопрос о том, дополняется ли такой элемент до группового базиса кольца RG или, другими словами, существуют ли в $V(RG)$ неизоордные максимальные конечные группы, остается открытым даже в случае, когда G — группа ниль-класса 2.

Замечание 1. Как явствует из доказательства теоремы 1. 31, справедливо утверждение, несколько более общее, чем эта теорема. Будем говорить, что периодическая единица $u \in RG$ отнесена ко второму центру группы G, если образ u при естественном гомоморфизме $RG \to RG/J$, где $J = J(\mathfrak{Z}_2(G))$, есть скалярное кратное главной единицы кольца RG/J. Имеет место

Теорема 1. 31′. *Пусть G — произвольная конечная группа. Тогда*

a) *2-й центр любого группового базиса кольца RG сопряжен в ΦG со 2-м центром базиса, состоящего из тривиальных единиц;*

b) *любая периодическая единица кольца RG, отнесенная ко 2-му центру группы G, сопряжена в ΦG с тривиальной единицей.*

Замечание 2. В теореме 1. 31 нельзя заменить кольцо ΦG на кольцо RG. Соответствующий контрпример построен в [7].

§ 5. Некоторые контрпримеры

Выше при изучении групповых колец RG мы предполагали, что R — произвольная область целостности, удовлетворяющая двум условиям:

($\ast$) характеристика R равна 0;

($\ast\ast$) каждый простой делитель числа $|G|$ необратим в R.

Сейчас мы на простых примерах покажем, что оба условия, налагаемые на R, существенны для справедливости всех основых результатов.

1°. Пусть G — p-группа, R — поле из p элементов. Не выполняется условие ($\ast$). Уже в случае абелевой G, как легко убедиться, неверны утверждения 1. 2—1. 6. В модулярном групповом кольце неабелевой группы порядка p^3 и экспоненты p имеются единицы порядка p^2, и, следовательно, в этом случае неверно предложение 1. 9. Нетрудно проверить также, что не выполняются утверждения 1. 13, 1. 19, 1. 20, 1. 25, 1. 31, 1. 32.

2°. Пусть $G=\{1, a, a^2, a^3\}$, $R=Z\left[\frac{1}{2}, i\right]$. Не выполняется условие ($\ast\ast$). Элементы

$$1, b=\frac{-ia+(i-1)a^2-a^3}{2}, \quad b^2=\frac{(1-i)a+(1+i)a^3}{2}, \quad b^3=\frac{-a-(1+i)a^2+ia^3}{2}$$

кольца RG образуют групповой базис из нетривиальных единиц. Неверны, утверждения 1. 2—1. 6, 1. 19, 1. 20, 1. 25, 1. 31, 1. 32.

3°. Пусть G — любая из неабелевых групп порядка p^3, p — нечетное простоы $R=Z\left[\frac{1}{p}\right]$. Не выполняется условие ($\ast\ast$). Если $\tilde{G}$ — вторая неабелева группа порядка p^3, то $RG\cong R\tilde{G}$. Спектральные таблцы групп G и $\tilde{G}$ неизоморфны. Следовательно, неверны теорема 1. 24, следствия 1. 26, и 1. 27, а также теорема 1. 31.

4°. Приведем, наконец, контрпример, предостерегающий против попыток обобщения предложения 1. 14. Он показывает, что условие необратимости в R элемента p, использовавшееся при доказательстве 1. 14, существенно для справедливости самого результата.

Рассмотрим группу G порядка 2^8:

$$G=\langle a, b, c \mid a^8=b^8=c^4=1, \quad a^b=a^5, a^c=a^5, \quad b^c=a^6 b\rangle.$$

Отображение α: $a\to a^5$, $b\to b$, $c\to c$ задает внешний автоморфизм группы G, который переводит каждый класс сопряженных элементов группы G в себя [22, стр. 107].

Пусть K — произвольное поле нулевой характеристики. Автоморфизм $\bar{\alpha}$ алгебры KG, индуцированный автоморфизмом α группы G, оставляет неподвижными «классовые суммы» и, следовательно, любой центральный идемпотент алгебры KG. Если $KG \cong \mathfrak{A}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{A}_t$ — разложение KG на простые компоненты, то $\bar{\alpha}$ есть прямая сумма автоморфизмов $\bar{\alpha}_i$ простых алгебр $\mathfrak{A}_i$. Так как центр алгебры KG поэлементно неподвижен относительно $\bar{\alpha}$, то автоморфизмы $\bar{\alpha}_i$ — центральные. Но всякий автоморфизм центральной простой алгебры — внутренний. Легко видеть, что $\bar{\alpha}$ также является внутренним: если $\bar{\alpha}_i$ индуцируется трансформированием с помощью $a_i \in \mathfrak{A}_i$, то $\bar{\alpha}$ — трансформированием с помощью $a = \Sigma a_i \in KG$. Таким образом, ограничение α внутреннего автоморфизма $\bar{\alpha}$ алгебры KG является внешним автоморфизмом группы G. Для кольца KG предложение 1. 14 не выполняется.

Литература

[1] S. A. Amitsur, Finite subgroups of division rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **80** (1955), 361—386.

[2] С. Д. Берман, О некоторых свойствах целочисленных групповых колец, *Докл. АН СССР*, **91** (1953), 7—9.

[3] С. Д. Берман, Про одну необхідину умову ізоморфізму цілочислених групових кілець, *Доповіді АН УРСР*, 1953, *N* 5, 313—316.

[4] С. Д. Берман, Об уравнении $x^m = 1$ в целочисленном групповом кольце, *Украинск. матем. журнал* 7 (1955), 253—261.

[5] С. Д. Берман, Характеры линейных представлений конечных грипп над произвольным полем, Матем. сб., **44**, *N* 4 (1958), 409—456.

[6] С. Д. Берман, Представления конечных грипп над произвольным полем и над кольцами целых чисел, *Изв. АН СССР, сер. матем.*, **30** (1966), 69—132.

[7] С. Д. Берман—А. Р. Росса, О целочисленных групповых кольцах конечных и периодических групп, *Алгебра и матем. логика*, из-во Киев. университета, 1966, 44—53.

[8] Г. Биркгоф, Теория структур, ИЛ, *Москва*, 1952.

[9] R. Brauer, Über Zusammenhänge zwischen arithmetischen und invariantentheoretischen Eigenschaften von Gruppen linearer Substitutionen, *Sitzb. Preuss. Akad. Wiss. Berlin*, **30** (1926), 410—416.

[10] R. Brauer, Untersuchungen über der arithmetischen Eigenschaften von Gruppen linearer Substitutionen, II, *Math. Z.* **31** (1930), 733—747.

[11] R. Brauer, On the algebraic structure of group rings, *J. Math. Soc. Japan*, **3** (1951), 237—251.

[12] R. Brauer, Zur Darstellungstheorie der Gruppen endlicher Ordnung, *Math. Z.*, **63** (1956), 406—444.

[13] R. Brauer, Representations of finite groups, Lect. Mod. Math. Vol. I, *New York—London*, 1963, 133—175.

[14] J. Cohn, D. Livingstone, On the structure of groups algebras, I, *Canad. J. Math.*, **17** (1965), 583—593.

[15] D. Coleman, On the modular group ring of a p-group, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **15** (1964), 511—514.

[16] Ch. Curtis, I. Reiner, Representation theory of finite groups and assotiative algebras, *New York—London*, 1962.

[17] E. C. Dade, Answer to a question of R. Brauer, *J. Algebra* **1** (1964), 1—4.

[18] M. Deuring, Algebren, *Berlin*, 1935.

[19] G. Frobenius, Über einen Fundamentalsatz der Gruppentheorie, II, *Sitzb. Preuss. Akad. Wiss. Berlin* (1907), 428—437.

[20] G. Frobenius, I. Schur, Über die reellen Darstellungen der endlichen Gruppen, *Sitzb. Preuss. Akad. Wiss. Berlin* (1906), 186—208.

[21] W. Gaschütz, Nichtabelsche p-Gruppen besitzen äußere Automorphismen, *J. Algebra* **4** (1966), 1—2.

[22] М. Холл, Теория групп, ИЛ, Москва, 1962.

[23] H. Hasse, J. reine angew. Math., **169** (1931), 399—404.

[24] H. Hasse, Zahlentheorie, *Berlin*, 1949.

[25] G. HIGMAN, The units of group-rings, *Proc. Lond. Math. Soc.* (2) **46** (1940), 231—248.
[26] Г. Я. Любарский, Теория групп и ее применение в физике, Физматгиз, *Москва*, 1958.
[27] R. McHAFFEY, Isomorphism of finite abelian groups. *Amer. Math. Monthly*, **72** (1965), 48—50.
[28] D. S. PASSMAN, Isomorphic groups and group rings, *Pacific J. Math.*, **15** (1965), 561—583.
[29] С. С. Поляк, Необходимие условие изоморфизма групповых колец над кольцом, Докл. и сообщ., *Ужгор. ун-т, сер. физ.-матем. н.*, (1960) *N* 3, 62.
[30] P. ROQUETTE, Realisierung von Darstellungen enlicher nilpotenter Gruppen, *Arch. Math.* **9** (1958), 241—250.
[31] А. Р. Росса—С. Д. Берман, О целочисленных групповых кольцах, Третя наук. конф. молодих матем. України, *Київ*, 1966, 75.
[32] А. И. Саксонов, О некоторых целочисленных кольцах, ассоциированных с конечной группой, *Докл. АН СССР*, **171** (1966), 529—532.
[33] А. И. Саксонов, О целочисленном кольце характеров конечной группы, *Изв. АН БССР, сер. физ.-матем. н. N* 3, (1966) 69—76.
[34] А. И. Саксонов, Ответ на один вопрос Р. Брауэра, *Изв. АН БССР, сер. физ.-матем. н. N* 1, (1967) 129—130.
[35] А. И. Саксонов, О групповых кольцах конечных p-групп над некоторыми областями целостности, *Докл. АН БССР*, **11** (1967), 204—207.
[36] А. И. Саксонов, Групповые алгебры конечных групп над числовыми полями, *Докл. АН БССР*, **11** (1967), 302—305.
[37] O. SCHILLING, Über die Darstellungen endlicher Gruppen, *J. reine angew. Math.* **174** (1936), 188.
[38] J.-P. SERRE, Sur la rationalité des representations d'Artin, *Ann. Math.* **72** (1960), 405—420.
[39] L. SOLOMON, The representation of finite groups in algebraic number fields, *J. Math. Soc. Japan* **13** (1961), 144—164.
[40] L. SOLOMON, On Schur's index and the solutions of $G^n = 1$ in a finite group, *Math. Z.* **78**, 2 (1962), 122—125.
[41] A. SPEISER, Zahlentheoretische Sätze aus der Gruppentheorie, *Math. Z.* **5** (1919), 1—6.
[42] M. SUZUKI, On a class of doubly transitive groups, *Ann. of Math.*, **75** (1962), 105—145.
[43] Б. Л. Ван дер Варден: Современная алгебра, П, ГИТТЛ, *Москва*, 1947.
[44] Г. Вейль, Классические группы, их инварианты и представления, ИЛ, *Москва*, 1947.
[45] E. WITT, Zwei Regeln über verschzänkte Produkte, *J. reine angew. Math.* **173** (1935), 191—192.
[46] E. WITT, Schiefkörper über diskret bewerteten Körpern, *J. reine angew. Math.* **176** (1937), 153—156.
[47] E. WITT, Die algebraische Struktur des Gruppenringes einer endlichen Gruppe über einem Zahlkörper, *J. reine angew. Math.* **190** (1952), 231—245.

(Поступило 6. II. 1970.)