Zweiseitige Operatorenrechnung*)

Von Á. SZÁZ (Debrecen)

Einleitung

P. STRAUSZ beschäftigte sich in seiner Arbeit [3] unter anderen mit der Verallgemeinerung der Operatorenrechnung auf das Intervall $-\infty<t<\infty$. In der Menge C der im Intervall $-\infty<t<\infty$ stetigen komplexwertigen Funktionen betrachtet er neben der gewöhnlichen Addition die folgende Erweiterung der Faltung:

$$f\cdot g=\left\{\int_0^t f(t-\tau)\cdot g(\tau)\,d\tau\right\}\qquad(-\infty<t<\infty). \tag{0.1}$$

Er zeigt, daß die Struktur C ein kommutativer Ring mit Nullteilern ist, dessen Quotientenring R, ein kommutativer Ring mit Einselement, existiert. Er verweist darauf, daß R bei der Lösung von gewissen Differentialgleichungen anwendbar ist.

All dies enthält auch diese Arbeit, aber in einer anderen Betrachtungsweise. Die Elemente von R werden wir hier Operatoren nennen. Dies können wir machen, weil gezeigt wird, daß der Mikusińskische Operatorenkörper in R eingebettet werden kann. R ist sogar die direkte Summe des Mikusińskischen und eines mit ihm isomorphen Körpers.

Das wird in den ersten drei Paragraphen gezeigt. In § 4 wird der Differentiationsoperator s definiert.

Für s gilt die Formel

$$s\cdot f=f'+f(0), \tag{0.2}$$

wobei f eine stetig differenzierbare Funktion im Intervall $-\infty<t<\infty$ ist.

Bei der Lösung gewisser linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten ist es zweckmäßiger, die Operatoren des Ringes R statt der Mikusińskischen Operatoren anzuwenden. In den § 5 und 6 werden die stetige Ableitung einer Operatorfunktion und die Exponentialfunktion $e^{w\cdot\lambda}$ $(w\in R)$ untersucht. In § 7 wird der Operator $e^{-s\cdot\lambda}$ eingeführt, für den die bekannte Formel der Mikusińskischen Operatorenrechnung

$$e^{-s\cdot\lambda}\cdot f=\{f(t-\lambda)\}\qquad(-\infty<\lambda<\infty) \tag{0.3}$$

hier genau dann gilt, wenn die Funktion im Intervall $[-\lambda, 0]$ identisch gleich Null ist.

*) Dies ist die deutsche Fassung der im Jahre 1969 eingereichten Doktorarbeit des Autors.

Die Transformationen T^α, U_k und D spielen bei Mikusiński eine wichtige Rolle. In § 8 werden diese Transformationen nach dem Beweis von zwei sehr allgemeinen Sätzen in R erklärt. In § 9. werden einige Ergebnisse der Arbeit [4] auf den Ring R übertragen. Die streng monotonen, stetigen, von unten und oben unbeschränkten Funktionen werden Basisfunktionen genannt. Es wird bewiesen, daß zu jeder im im Intervall (a, b) erklärten Basisfunktion $\mu(x)$ auf Grund der mit ihrer Hilfe gebildeten Verallgemeinerung von (0. 1)

$$f\cdot g = \left\{\int_{x_0}^{t} f(\mu^{-1}(\mu(x)-\mu(y)))\cdot g(y)\,d\mu(y)\right\} \qquad (a < x < b,\ \mu(x_0)=0) \tag{0.4}$$

ein zu R isomorpher Ring R_μ zugeordnet werden kann. Abschließend zeigen wir daß in R_μ

$$s_\mu\cdot f = \frac{df}{d\mu}+f(x_0) \tag{0.5}$$

analog zu (0. 2) gilt und gewisse Anwendungen hat. Es sei den Professoren E. Gesztelyi und J. Erdős für ihre wertvollen Bemerkungen und Ratschläge wärmster Dank ausgesprochen.

§ 1. Über einen Körper, der mit dem Mikusińkischen Operatorkörper isomorph ist

Definition 1. 1. Es sei C^+ (C^-) die Klasse der in $[0, \infty)$ (bzw. in $(-\infty, 0]$) stetigen komplexwertigen Funktionen.

In C^+ sind die gewöhnliche Addition und das Faltungsprodukt

$$f\cdot g = \left\{\int_0^t f(t-\tau)\cdot g(\tau)\,d\tau\right\} \qquad (0 \leqq t < \infty) \tag{1.1}$$

definiert ([1]). Es ist bekannt, daß die Struktur C^+ ein Integritätsbereich ist, und ihr Quotientenkörper M^+ der Mikusińskische Operatorenkörper ist.

Definition 1. 2. Betrachten wir in C^- neben der gewöhnlichen Addition das folgende Produkt:

$$f\cdot g = \left\{-\int_x^0 f(x-y)\cdot g(y)\,dy\right\} \qquad (-\infty < x \leqq 0). \tag{1.2}$$

So gilt der folgende

Satz 1. 1. *Die Strukturen C^+ und C^- sind isomorph.*

Es ist nämlich die Abbildung

$$L(\{f(t)\}) = \{-f(-x)\} \qquad (f\in C^+) \tag{1.3}$$

ein Isomorphismus.

Wir zeigen zum Beispiel, daß die Multiplikation bei der Abbildung L erhalten bleibt:

Sind $f, g \in C^+$, so

$$L(f \cdot g) = L\Big(\Big\{\int_0^t f(t-\tau) \cdot g(\tau)\, d\tau\Big\}\Big) = \Big\{-\int_0^{-x} f(-x-\tau) \cdot g(\tau)\, d\tau\Big\} =$$

$$= \Big\{-\int_x^0 f(-x+y) \cdot g(-y)\, dy\Big\} = \Big\{-\int_x^0 (-f(-(x-y))) \cdot (-g(-y))\, dy\Big\} = L(f) \cdot L(g).$$

Folgerung 1. Die Struktur C^- ist auch ein Integritätsbereich. (Ihren Quotientenkörper bezeichnet man mit M^-.)

Folgerung 2. Die Körper M^+ und M^- sind zueinander isomorph. Dieser Isomorphismus ist die folgende Erweiterung von L:

$$L\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{L(f)}{L(g)} \quad \left(\frac{f}{g} \in M^+\right). \tag{1.4}$$

Definition 1. 3. Es sei α eine beliebige komplexe Zahl. Wir bezeichnen mit $\{\alpha\}^+$ (mit $\{\alpha\}^-$) diejenige Funktion von C^+ (bzw. von C^-), die überall den Wert α annimmt. Wir setzen

$$\alpha^+ = \frac{\{\alpha\}^+}{\{1\}^-}, \quad \alpha^- = \frac{\{\alpha\}^-}{\{1\}^-}. \tag{1.5}$$

Dann ist offenbar

$$L(\alpha^+) = \alpha^-. \tag{1.6}$$

§ 2. Der Quotientenring von C

Definition 2. 1. Es bezeichne C die Menge der in $(-\infty, \infty)$ stetigen, komplexwertigen Funktionen.

In C definieren wir die folgenden Verknüpfungen:

$$f + g = \{f(t) + g(t)\}, \tag{2.1}$$

$$f \cdot g = \Big\{\int_0^t f(t-\tau) \cdot g(\tau)\, d\tau\Big\} \qquad (-\infty < t < \infty). \tag{2.2}$$

Definition 2. 2. Ist α eine beliebige komplexe Zahl, so bezeichnen wir mit $\{\alpha\}$ diejenige Funktion von C, die identisch gleich α ist.

Satz 2. 1. *Die Struktur C ist ein kommutativer Ring mit Nullteilern.*

Beweis. Jede Funktion f von C kann man als ein geordnetes Funktionenpaar

$$f = (f^-, f^+) \tag{2.3}$$

auffassen, dabei gilt $f^- \in C^-$, $f^+ \in C^+$; $f^-(t) = f(t)$, wenn $-\infty < t \leqq 0$ und $f^+(t) = f(t)$, wenn $0 \leqq t < \infty$. (Die Funktionen f^- und f^+ nennen wir im weiteren die negative und positive *Komponente* der Funktion f.) Im Zusammenhang mit dieser Betrachtungsweise gilt folgendes:

(2.4) $f \in C$ *genau dann, wenn* $f^- \in C^-, f^+ \in C^+$ *und* $f^-(0) = f^+(0)$.

(2.5) $f = g$ *genau dann, wenn* $f^- = g^-$ *und* $f^+ = g^+$.

(2.6) $$f + g = (f^- + g^-, f^+ + g^+).$$

(2.7) $$f \cdot g = (f^- \cdot g^-, f^+ \cdot g^+).$$

Nach dieser Vorbereitung ist es schon naheliegend, daß die Struktur C ein Unterring der direkten Summe der Integritätsbereiche C^- und C^+ (es ist bekannt, daß die direkte Summe von Integritätsbereichen ein kommutativer Ring mit Nullteilern ist), nämlich es gilt für beliebige $f, g \in C$

(2.8) $$f^- - g^-|_{t=0} = f^+ - g^+|_{t=0} = f(0) - g(0),$$

und

(2.9) $$f^- \cdot g^-|_{t=0} = f^+ \cdot g^+|_{t=0} = 0.$$

Andererseits ist jede solche Funktion von C ein Nullteiler in C, die auf mindestens einem der Intervalle $(-\infty, 0]$ und $[0, \infty)$ identisch gleich Null ist. (Es ist zweckmäßig, auch das Nullelement eines Ringes selbst als Nullteiler zu betrachten.) Damit ist der Satz bewiesen.

Definition 2.3. Es sei H die Menge der Nichtnullteiler von C. (Offenbar gilt $f \in H$ für $f \in C$, genau dann, wenn f auf den Intervallen $(-\infty, 0]$ und $[0, \infty)$ nicht identisch gleich Null ist.) In der Algebra ist es bekannt, daß die Menge der Nichtnullteiler eines Ringes eine echte Untermenge des Ringes ist, die, sofern sie nicht leer ist, eine multiplikative Halbgruppe bildet. Ferner läßt sich jeder kommutative Ring mit mindestens einem Nichtnullteiler in einen kommutativen Ring mit Einselement einbetten (in seinen Quotientenring, der bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist), in dem jeder Nichtnullteiler des Ringes ein Inverses hat ([2]).

Definition 2.4. Es sei R der Quotientenring von C.

R besteht aus allen Quotienten $\frac{f}{g}$ wobei $f \in C$ und $g \in H$. Für sie gelten die folgenden Rechenregeln:

(2.10) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ dann und nur dann, wenn $a \cdot d = b \cdot c$,

(2.11) $$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d},$$

(2.12) $$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Das Nullelement von R ist $\frac{\{0\}}{\{1\}}$ $\left(\text{oder } \frac{\{0\}}{g}\right)$, und das Einselement von R ist $\frac{\{1\}}{\{1\}}$

$\left(\text{oder } \frac{g}{g}\right)$. Jedes Element $\frac{f}{g}$ von R mit $f \in H$ hat ein Inverses, denn es gilt $\frac{g}{f} \in R$ und $\frac{f}{g} \cdot \frac{g}{f} = \frac{f \cdot g}{g \cdot f} = \frac{\{1\}}{\{1\}}$. Aber jedes Element $\frac{f}{g}$ von R, wobei f en Nullteiler von ist, hat kein Inverses, deshalb können wir durch $\frac{f}{g}$ in R nicht dividieren. C ist als

$$f = \frac{f \cdot g}{g} \qquad (f \in C) \tag{2.13}$$

in R eingebettet.

Wie man leicht sieht, lassen sich die komplexe Zahlen als

$$\alpha = \frac{\{\alpha\}}{\{1\}} \qquad (\alpha \text{ ist eine komplexe Zahl}) \tag{2.14}$$

in R einbetten. und es gilt die Formel:

$$\alpha \cdot f = \{\alpha \cdot f(t)\} \qquad (f \in C). \tag{2.15}$$

Nach dieser Einbettung ist die Zahl 0 das Nullelement von R und die Zahl 1 das Einselement von R.

Bemerkung 2. 1. Im weiteren werden wir die Elemente von R die Operatoren nennen. Das können wir machen, weil wir in dem folgenden Paragraph zeigen werden, daß M^+ sich in R einbetten läßt.

§ 3. Die direkte Zerlegung von R

Satz 3. 1. *Die Körper M^- und M^+ lassen sich in der folgenden Weise in R einbetten:*

$$\frac{p}{q} = \frac{(p \cdot \{1\}^-, \{0\}^+)}{(q \cdot \{1\}^-, y)} \qquad \left(\frac{p}{q} \in M^-,\ y \in C^+,\ y(0) = 0,\ y \neq \{0\}^+\right), \tag{3.1}$$

$$\frac{u}{v} = \frac{(\{0\}^-, u \cdot \{1\}^+)}{(x, v \cdot \{1\}^+)} \qquad \left(\frac{u}{v} \in M^+,\ x \in C^-,\ x(0) = 0,\ x \neq \{0\}^-\right). \tag{3.2}$$

Beweis. Zu der Einbettung von M^- betrachten wir die folgende Abbildung:

$$\frac{p}{q} \xrightarrow{\varphi} \frac{(p \cdot \{1\}^-, \{0\}^+)}{(q \cdot \{1\}^-, y)} \qquad \left(\frac{p}{q} \in M^-,\ y \in C^+,\ y(0) = 0,\ y \neq \{0\}^+\right).$$

φ ist eindeutig: **Nämlich,** wenn $\dfrac{p}{q}=\dfrac{r}{\varrho}$ ist, so gilt

$$p\cdot\varrho=q\cdot r,$$

$$(p\cdot\{1\}^-\cdot\varrho\cdot\{1\}^-,\{0\}^+)=(q\cdot\{1\}^-\cdot r\cdot\{1\}^-,\{0\}^+),$$

$$\frac{(p\cdot\{1\}^-,\{0\}^+)}{(q\cdot\{1\}^-,y_1)}=\frac{(r\cdot\{1\}^-,\{0\}^+)}{(\varrho\cdot\{1\}^-,y_2)}.$$

φ ist eineindeutig: Es sei nähmlich $\dfrac{p_1}{q_1},\dfrac{p_2}{q_2}\in M^-$ und wir setzen

$$\frac{(p_1\cdot\{1\}^-,\{0\}^+)}{(q_1\cdot\{1\}^-,y)}=\frac{(p_2\cdot\{1\}^-,\{0\}^+)}{(q_2\cdot\{1\}^-,y)}.$$

Daraus ergibt sich

$$(p_1\cdot\{1\}^-\cdot q_2\cdot\{1\}^-,\{0\}^+)=(q_1\cdot\{1\}^-\cdot p_2\cdot\{1\}^-,\{0\}^+),$$

$$p_1\cdot\{1\}^-\cdot q_2\cdot\{1\}^-=q_1\cdot\{1\}^-\cdot p_2\cdot\{1\}^-,$$

$$p_1\cdot q_2=q_1\cdot p_2,$$

$$\frac{p_1}{q_1}=\frac{p_2}{q_2},$$

was zu zeigen war.

Im weiteren wird gezeigt, daß die Verknüpfungen bei der Abbildung erhalten bleiben

$$\varphi\left(\frac{p}{q}+\frac{r}{\varrho}\right)=\varphi\left(\frac{p\cdot\varrho+q\cdot r}{q\cdot\varrho}\right)=\frac{((p\cdot\varrho+q\cdot r)\cdot\{1\}^-,\{0\}^+)}{(q\cdot\varrho\cdot\{1\}^-,y)}=$$

$$=\frac{(p\cdot\varrho\{1\}^-+q\cdot r\cdot\{1\}^-,\{0\}^+)}{(q\cdot\varrho\cdot\{1\}^-,y)}=\frac{(p\cdot\varrho\cdot\{1\}^-,\{0\}^+)}{(q\cdot\varrho\cdot\{1\}^-,y)}+\frac{(q\cdot r\cdot\{1\}^-,\{0\}^+)}{(q\cdot\varrho\cdot\{1\}^-,y)}=$$

$$=\frac{(p\cdot\{1\}^-,\{0\}^+)}{(q\cdot\{1\}^-,y)}+\frac{(r\cdot\{1\}^-,\{0\}^+)}{(\varrho\cdot\{1\}^-,y)}=\varphi\left(\frac{p}{q}\right)+\varphi\left(\frac{r}{\varrho}\right),$$

$$\varphi\left(\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{\varrho}\right)=\varphi\left(\frac{p\cdot r}{q\cdot\varrho}\right)=\frac{(p\cdot r\cdot\{1\}^-,\{0\}^+)}{(q\cdot\varrho\cdot\{1\}^-,y)}=\frac{(p\cdot\{1\}^-\cdot r\cdot\{1\}^-,\{0\}^+)}{(q\cdot\{1\}^-\cdot\varrho\cdot\{1\}^-,\{0\}^+)}=$$

$$=\frac{(p\cdot\{1\}^-,\{0\}^+)\cdot(r\cdot\{1\},\{0\}^+)}{(q\cdot\{1\}^-,y)\cdot(\varrho\cdot\{1\}^-,y)}=\frac{(p\cdot\{1\}^-,\{0\}^+)}{(q\cdot\{1\}^-,y)}\cdot\frac{(r\cdot\{1\}^-,\{0\}^+)}{(\varrho\cdot\{1\}^-,y)}=$$

$$=\varphi\left(\frac{p}{q}\right)\cdot\varphi\left(\frac{r}{\varrho}\right).$$

Die Existenz der **Einbettung** (3. 2) können wir ganz analog verifizieren.

Bemerkung 3. 1. Nach diesen Einbettungen können wir genau durch die Elemente von $M^- \cup M^+$ in R nicht dividieren. Ferner haben die Verknüpfungen (2. 11) und (2. 12) einen Sinn für die Elemente der Körper M^- und M^+.

Satz 3. 2. *Der Ring R ist die direkte Summe (im Sinne der Ringtheorie) der Körper M^- und M^+, d. h.*

$$R = M^- \oplus M^+.$$

BEWEIS. Die Elemente von R lassen sich in der Form

$$r = n + p \qquad (n \in M^-,\ p \in M^+) \tag{3. 3}$$

schreiben.

Ist $\frac{f}{g} \in R$, dann gilt

$$\frac{f}{g} = \frac{f \cdot \{1\}}{g \cdot \{1\}} = \frac{(f^- \cdot \{1\}^-, f^+ \cdot \{1\}^+)}{(g^- \cdot \{1\}^-, g^+ \cdot \{1\}^+)} = \frac{(f^- \cdot \{1\}^-, \{0\}^+) + (\{0\}^-, f^+ \cdot \{1\}^+)}{(g^- \cdot \{1\}^-, g^+ \cdot \{1\}^+)} =$$

$$= \frac{(f^- \cdot \{1\}^-, \{0\}^+)}{(g^- \cdot \{1\}^-, g^+ \cdot \{1\}^+)} + \frac{(\{0\}^-, f^+ \cdot \{1\}^+)}{(g^- \cdot \{1\}^-, g^+ \cdot \{1\}^+)} = \frac{f^-}{g^-} + \frac{f^+}{g^+}.$$

Wenn $\frac{g}{\varrho} \in M^-$ und $\frac{u}{v} \in M^+$ ist, dann gilt

$$\frac{q}{\varrho} \cdot \frac{u}{v} = 0. \tag{3. 4}$$

Es ist nämlich

$$\frac{q}{\varrho} \cdot \frac{u}{v} = \frac{(q \cdot \{1\}^-, \{0\}^+)}{(\varrho \cdot \{1\}^-, y)} \cdot \frac{(\{0\}^-, u \cdot \{1\}^+)}{(x, v \cdot \{1\}^+)} = \frac{(\varrho \cdot \{1\}^-, \{0\}^+) \cdot (\{0\}^-, u \cdot \{1\}^+)}{(\varrho \cdot \{1\}^-, y) \cdot (x, v \cdot \{1\}^+)} =$$

$$= \frac{(\{0\}^-, \{0\}^+)}{(\varrho \cdot \{1\}^- \cdot x, y \cdot v \cdot \{1\}^+)} = \frac{\{0\}}{\{1\}} = 0.$$

Die Darstellung (3. 3) der Elemente von R ist eindeutig.

Setzen wir für irgendein $r \in R$

$$r = n_1 + p_1 (n_1 \in M^-, p_1 \in M^+),$$

und

$$r = n_2 + p_2 (n_2 \in M^-, p_2 \in M^+).$$

Dann gilt

$$n_1 + p_1 = n_2 + p_2.$$

Daraus ergibt sich nach (3. 3)

$$n_1 \cdot n_1 = n_1 \cdot n_2 \quad \text{und} \quad p_1 \cdot p_1 = p_2 \cdot p_1,$$

und folglich

$$n_1 = n_2 \quad \text{und} \quad p_1 = p_2,$$

was zu zeigen war. Damit ist der Satz 3. 2. bewiesen. Aus diesen Sätzen ergeben sich einige einfache Folgerungen.

Folgerung 1. Aus $r \in M^-$ und $r \in M^+$ folgt $r=0$.

Folgerung 2. Sind $r \in R$ und $m \in M^- \cup M^+$, dann gilt $r \cdot m \in M^- \cup M^+$.

Folgerung 3.

$$\frac{q}{\varrho}+\frac{u}{v}=\frac{(q\cdot\{1\}^-, u\cdot\{1\}^+)}{(\varrho\cdot\{1\}^-, v\cdot\{1\}^+)} \qquad \left(\frac{q}{\varrho}\in M^-,\ \frac{u}{v}\in M^+\right). \tag{3.5}$$

Wenn $q(0)=u(0)$ und $\varrho(0)=v(0)$ sind, dann gilt die einfachere Formel

$$\frac{q}{\varrho}+\frac{u}{v}=\frac{(q,u)}{(\varrho,v)}. \tag{3.6}$$

Folgerung 4. Für eine beliebige komplexe Zahl α und $f \in C$ gilt

$$\alpha=\alpha^-+\alpha^+, \tag{3.7}$$

$$f=f^-+f^+. \tag{3.8}$$

Ich beweise (3. 8). Der Beweis von (3. 7) verläuft analog.

$$f=\frac{f\cdot\{1\}}{\{1\}}=\frac{(f^-\cdot\{1\}^-, f^+\cdot\{1\}^+)}{(\{1\}^-,\{1\}^+)}=\frac{(f^-\cdot\{1\}^-,\{0\}^+)+(\{0\}^-,f^+\cdot\{1\}^+)}{(\{1\}^-,\{1\}^+)}=$$

$$=\frac{(f^-\cdot\{1\}^-,\{0\}^+)}{(\{1\}^-,\{1\}^+)}+\frac{(\{0\}^-, f\cdot\{1\}^+)}{(\{1\}^-,\{1\}^+)}=\frac{f^-\cdot\{1\}^-}{\{1\}^-}+\frac{f^+\cdot\{1\}^+}{\{1\}^+}=f^-+f^+.$$

Bemerkung 3. 2. Wegen des Satzes 3. 2. können wir von der negativen und der positiven Komponente eines beliebigen Operators von R sprechen, für die folgende Rechenregeln gelten:

$$a+b=(a^-+b^-)+(a^++b^+),$$

$$a\cdot b=a^-\cdot b^-+a^+\cdot b^+.$$

Bemerkung 3. 3. Auf Grund der Mikusińskischen Theorie läßt sich eine allgemeinere Theorie mit Hilfe des Satzes 3. 2. und der Abbildung L in R leicht aufbauen. Aber oft ist es zweckmäßiger, sich auf die Analogie zwischen M^+ und R zu stützen.

§ 4. Der Differentiationsoperator

Definition 4. 1. Den Operator $s=\dfrac{1}{\{1\}}$ werden wir den Differentiationsoperator nennen.

Diese Benennung ist durch den folgenden Satz begründet:

Satz 4. 1. *Wenn die Funktion $f(t)$ eine im Intervall $-\infty<t<\infty$ stetige Ableitung $f'(t)$ hat, dann gilt*

$$s\cdot\{f(t)\}=\{f'(t)\}+f(0) \qquad (-\infty<t<\infty). \tag{4.1}$$

Beweis. Wegen der Stetigkeit von $f'(t)$ ist

$$f(t) = \int_0^t f'(\tau)\, d\tau + f(0),$$

d. h.

$$\{f(t)\} = \left\{\int_0^t f'(\tau)\, d\tau\right\} + \{f(0)\},$$

bzw.

$$\{f(t)\} = \{1\} \cdot \{f'(t)\} + \{f(0)\}.$$

Daraus ergibt sich unmittelbar

$$s \cdot \{f(t)\} = \{f'(t)\} + s \cdot \{f(0)\} = \{f'(t)\} + \frac{\{f(0)\}}{\{1\}},$$

und damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Satz 4. 2. *Für eine beliebige komplexe Zahl α gilt*

$$\frac{1}{(s-\alpha)^n} = \left\{\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \cdot e^{\alpha \cdot t}\right\}, \tag{4. 2}$$

wobei n eine natürliche Zahl ist.

Beweis. Zuerst zeigen wir, daß der Operator $(s-\alpha)^n$ ein Inverses in R hat. Dazu genügt es einzusehen, daß $s-\alpha$ ein Inverses in R hat, d. h. $s-\alpha \notin M^- \cup M^+$.

$$s-\alpha = \frac{1}{\{1\}} - \frac{\{\alpha\}}{\{1\}} = \frac{\{1\}}{\{1\}^2} - \frac{\{\alpha\}}{\{1\}} = \frac{\{1\} - \{\alpha\} \cdot \{\alpha\}}{\{1\}^2} = \frac{\{1\} - \{\alpha \cdot t\}}{\{1\}^2} = \frac{\{1 - \alpha \cdot t\}}{\{t\}},$$

wobei die Funktion $1-\alpha \cdot t$ auf keinem Intervall identisch gleich Null ist. Also hat die linke Seite von (4. 2) einen Sinn. Die Gültigkeit der Formel (4. 2) können wir durch vollständige Induktion leicht beweisen.

Satz 4. 3. *Ein Operator der Gestalt*

$$P_n(s) = \alpha_n \cdot s^n + \alpha_{n-1} \cdot s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 \cdot s + \alpha_0 \qquad (\alpha_n \neq 0),$$

wobei die α_i ($i=0, 1, \ldots, n$) beliebige, komplexe Zahlen sind, hat ein Inverses in R, d. h. es läßt sich durch ihn in R dividieren.

Beweis. Mit der Anwendung von (4. 2) ergibt sich

$$P_n(s) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_{n-i} \cdot s^{n-i} = \frac{\sum_{i=0}^{n} \alpha_{n-i} \cdot \{1\}^{n+1} \cdot s^{n-i}}{\{1\}^{n+1}} = \frac{\sum_{i=0}^{n} \alpha_{n-i} \cdot \{1\}^{i+1}}{\{1\}^{n+1}} =$$

$$= \frac{\sum_{i=0}^{n} \alpha_{n-i} \cdot \left\{\frac{t^i}{i!}\right\}}{\left\{\frac{t^n}{n!}\right\}} = \frac{\left\{\sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha_{n-i}}{i!} \cdot t^i\right\}}{\left\{\frac{t^n}{n!}\right\}}.$$

Das Polynom $\sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha_{n-i}}{i!} \cdot t_i$ ist auf keinem Intervall identisch gleich Null. So ist dieses Polynom ein Nichtnullteiler in R, womit unsere Behauptung bewiesen ist. Man kann ganz analog den folgenden Satz beweisen:

Satz 4. 4. *Aus dem Zusammenhang*

$$\alpha_n \cdot s^n + \alpha_{n-1} \cdot s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 \cdot s + \alpha_0 = \beta_n \cdot s^n + \beta_{n-1} \cdot s^{n-1} + \cdots + \beta_1 \cdot s + \beta_0$$

folgt

$$\alpha_i = \beta_i \qquad (i = 0, 1, \dots, n).$$

Mit Hilfe der in diesem Paragraphen angeführten Theorie können wir lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten lösen.

Suchen wir *zum Beispiel* diejenige Lösung y der Differentialgleichung

$$y'' - 3 \cdot y' + 2 \cdot y = e^t \qquad (-\infty < t < \infty), \tag{4. 3}$$

welche die Bedingungen

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \tag{4. 4}$$

erfüllen soll.

Aus der Gleichung (4. 3) folgt, daß die gesuchte Lösung y auf dem Intervall $-\infty < t < \infty$ zweimal stetig differentierbar sein muß.

Aus den Zusammenhängen (4. 1), (4. 2) und (4. 4) ergibt sich

$$y' = s \cdot y - 1, \quad \{e^t\} = \frac{1}{s-1},$$

$$y'' = s^2 \cdot y - s.$$

Substitutieren wir diese in die Operatorform der Differentialgleichung

$$y'' - 3 \cdot y' + 2 \cdot y = \{e^t\}, \tag{4. 3}$$

dann folgt

$$s^2 \cdot y - s - 3 \cdot s \cdot y + 3 + 2 \cdot y = \frac{1}{s-1},$$

und hieraus

$$y = \frac{s^2 - 4 \cdot s + 4}{(s-1) \cdot (s^2 - 3 \cdot s + 2)} = \frac{(s-2)^2}{(s-1)^2 \cdot (s-1)} = \frac{s-2}{(s-1)^2}.$$

Nach der Zerlegung in Partialbrüche erhalten wir die Gestalt

$$y = \frac{1}{s-1} - \frac{(s-1)^2}{1}.$$

Daraus ergibt sich nach (4. 2)

$$y = \{e^t\} - \{t \cdot e^t\} = \{e^t - t \cdot e^t\}, \tag{4. 5}$$

womit die Differentialgleichung (4. 3) unter den Bedingungen (4. 4) gelöst ist.

Mit Rücksicht darauf, daß wir in der Mikusińskischen Theorie die Differentialgleichung (4. 3) im Intervall $(-\infty, \infty)$ als Operatorgleichung nicht betrachten können, erhalten wir ihre Lösung bei dieser Mikusińskischen Methode unmittelbar in dem Intervall $[0, \infty)$, beziechungsweise im Intervall $[\lambda, \infty)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$, wenn wir die Formel (7. 5) von [4] benutzen. Es scheint zweckmäßiger zu sein bei der Lösung der Differentialgleichungen die in dieser Arbeit angeführte Theorie zu verwenden, weil man jetzt keine Schwierigkeiten mehr damit hat, daß wir nicht durch gewisse Operatoren in R dividieren können.

Ganz anders ist die Lage im Zusammenhang mit der Verschiebung entlang der t-Achse.

In R existiert der Verschiebungsoperator nicht, d. h. es gibt keinen solchen Operator a_λ aus R $(\lambda \neq 0)$, so daß die Formel

$$a_\lambda \cdot f = \{f(t-\lambda)\} \tag{4.6}$$

für beliebige Funktionen aus C gilt.

Wenn es einen solchen Operator a_λ gäbe, dann würde für $f = \{1\}$ aus (4. 6) folgen

$$a_\lambda \cdot \{1\} = \{1\},$$

$$a_\lambda = 1,$$

was offensichtlich ein Widerspruch ist.

Da die Verschiebung entlang der t-Achse in der Mikusińskischen Theorie durch die Multiplikation mit dem Operator $e^{-s^+ \cdot \lambda}$ (siehe [1]) realisiert wird, ergibt sich folgende Frage: Existiert der Operator $e^{-s \cdot \lambda}$ in R? Und wenn er existiert, was ergibt dann das Produkt $e^{-s \cdot \lambda} \cdot f$ $(f \in C)$?

Um dies zu beantworten, werden wir uns jetzt mit der stetigen Ableitung von Operatorfunktionen beschäftigen.

§ 5. Stetige Ableitung der Operatorfunktionen

Definition 5. 1. Eine Funktion einer reellen Variablen, deren Wertebereich in R liegt, werden wir eine Operatorfunktion nennen.

Definition 5. 2. Ist $f(\lambda)$ eine auf einem endlichen Intervall I definierte Operatorfunktion, und existieren ein Operator p und eine Funktion $f_1(\lambda, t)$ so, daß die Bedingungen

1. $p^{-1}, f_1(\lambda, t) \in C$ $(\lambda \in I)$,
2. $f(\lambda) = p \cdot \{f_1(\lambda, t)\}$,
3. $\dfrac{\partial f_1(\lambda, t)}{\partial \lambda}$ ist im Gebiet $D = \left\{ \begin{matrix} \lambda \in I \\ -\infty < t < \infty \end{matrix} \right\}$ stetig gelten, dann sagt man, daß

die Funktion $f(\lambda)$ in I stetig differenzierbar ist, und

$$f'(\lambda) = p \cdot \left\{ \frac{\partial f_1(\lambda, t)}{\partial \lambda} \right\} \tag{5.1}$$

ihre stetige Ableitung ist.

Bemerkung 5. 1. Die Stetigkeit von $f_1(\lambda, t)$ folgt aus den Bedingungen 1. und 3.

Bemerkung 5. 2. Jede reellvariable komplexvertige Funktion (d. h. jede Zahlenfunktion) ist auch eine Operatorfunktion. Im Falle einer Zahlenfunktion, die im gewöhnlichen Sinne eine stetige Ableitung besitzt, fällt die oben gegebene Definition mit der gewöhnlichen Definition der stetigen Ableitung zusammen.

Die stetigen Ableitungen von Operatorfunktionen haben die folgenden Eigenschaften, die man ganz analog beweist, wie die Entsprechenden bei Mikusiński ([1]).

Satz 5. 1. *Die stetige Ableitung einer Operatorfunktion ist eindeutig bestimmt, d. h. sie ist unabhängig von der Wahl des Operators p.*

Satz 5. 2. *Sind die Operatorfunktionen $f(\lambda)$ und $g(\lambda)$ in einem endlichen Intervall I stetig differenzierbar, so ist auch die Funktion $a\cdot f(\lambda)+b\cdot g(\lambda)$ $(a, b\in R)$ in I stetig differenzierbar, und zwar ist*

$$(5.2)\qquad \big(a\cdot f(\lambda)+b\cdot g(\lambda)\big)' = a\cdot f'(\lambda)+b\cdot g'(\lambda).$$

Satz 5. 3. *Sind die Operatorfunktionen $f(\lambda)$ und $g(\lambda)$ in einem endlichen Intervall I stetig differenzierbar, so ist ihr Produkt $f(\lambda)\cdot g(\lambda)$ ebenfalls in diesem Intervall stetig differenzierbar, und es gilt die Formel*

$$(5.3)\qquad \big(f(\lambda)\cdot g(\lambda)\big)' = f'(\lambda)\cdot g(\lambda)+f(\lambda)\cdot g'(\lambda).$$

Satz 5. 4. *Ist die Operatorfunktion $f(\lambda)$ in dem endlichen Intervall K stetig differenzierbar und $\varphi(\lambda)$ eine Zahlenfunktion, deren Werte in K liegen und die in einem endlichen Intervall I stetig differenzierbar ist, so ist die mittelbare Funktion $F(\lambda)= =f\big(\varphi(\lambda)\big)$ in I stetig differenzierbar, und es gilt die Formel*

$$(5.4)\qquad F'(\lambda) = f'\big(\varphi(\lambda)\big)\cdot\varphi(\lambda).$$

Satz 5. 5. *Die in einem endlichen Intervall I stetig differenzierbare Funktion $f(\lambda)$ ist in I konstant, dann und nur dann, wenn $f'(\lambda)\equiv 0$ in I ist.*

Definition 5. 2. Wir sagen, eine Operatorfunktion $f(\lambda)$ ist in einem unendlichen Intervall stetig differenzierbar und ihre stetige Ableitung ist $f'(\lambda)$, wenn dies für jedes seiner endlichen Teilintervalle gilt.

Die vorigen Eigenschaften der stetigen Ableitung übertragen sich unmittelbar auf die stetige Ableitung in unendlichen Intervallen.

§ 6. Die Exponentialfunktionen

Satz 6. 1. *Wenn die Operatorfunktion $f(\lambda)$ den Bedingungen*

$$(6.1)\qquad f'(\lambda) = w\cdot f(\lambda) \qquad (w\in R,\ -\infty<\lambda<\infty),$$

$$(6.2)\qquad f(0) = 1$$

genügt, dann gilt

$$(6.3)\qquad f(-\lambda) = \frac{1}{f(\lambda)} \qquad (-\infty<\lambda<\infty).$$

BEWEIS. Betrachten wir die Operatorfunktion $g(\lambda) = f(\lambda) \cdot f(-\lambda)$. Es gilt dann nach (6. 1), (5. 2) und (5. 3)

$$g'(\lambda) = f'(\lambda) \cdot f(\lambda) - f(\lambda) \cdot f'(-\lambda) - w \cdot f(\lambda) \cdot f(-\lambda) - f(\lambda) \cdot w \cdot f(-\lambda) = 0 \qquad (-\infty < \lambda < \infty).$$

Demzufolge ist die Funktion $g(\lambda)$ nach Satz 5. 5. für alle reelle λ konstant. Nun gilt aber wegen (6. 2)

$$g(0) = f(0) \cdot f(0) = 1.$$

Folglich ist

$$g(\lambda) = f(\lambda) \cdot f(-\lambda) = 1 \qquad (-\infty < \lambda < \infty).$$

Daraus ergibt sich nach Folgerung 2 der Sätze 3. 1. und 3. 2.

$$f(\lambda) \notin M^- \cup M^+, \tag{6. 4}$$

und die Formel (6. 3).

Satz 6. 2. *Es gibt höchstens eine Operatorfunktion $f(\lambda)$, die den Bedingungen (6. 1) und (6. 2) genügt.*

BEWEIS. Angenommen, es gäbe zwei Operatorfunktionen $f_1(\lambda)$ und $f_2(\lambda)$, die den Bedingungen (6. 1) und (6. 2) genügen. Wegen (6. 4) können wir die Hilfsfunktion

$$g(\lambda) = \frac{f_1(\lambda)}{f_2(\lambda)}$$

einführen, und es gilt nach Satz 6. 1.

$$g(\lambda) = f_1(\lambda) \cdot f_2(-\lambda).$$

Offenbar ist

$$g'(\lambda) = f_1'(\lambda) \cdot f_2(-\lambda) - f_1(\lambda) \cdot f_2'(-\lambda) = w \cdot f_1(\lambda) \cdot f_2(-\lambda) - f_1(\lambda) \cdot w \cdot f_2(-\lambda) = 0 \qquad (-\infty < \lambda < \infty),$$

und

$$g(0) = 1.$$

Hieraus folgt

$$g(\lambda) = \frac{f_1(\lambda)}{f_2(\lambda)} = 1 \qquad (-\infty < \lambda < \infty),$$

d.h. es ist

$$f_1(\lambda) = f_2(\lambda) \qquad (-\infty < \lambda < \infty),$$

was zu zeigen war.

Definition 6. 1. Diejenige Operatorfunktion, die den Bedingungen (6. 1) und (6. 2) genügt, nennen wir Exponentialfunktion und schreiben

$$f(\lambda) = e^{w\lambda}. \tag{6. 5}$$

Nämlich, wenn w eine komplexe Zahl ist, dann genügt die reellvariable komplexwertige Funktion $e^{w \cdot \lambda}$ den Bedingungen (6. 1) und (6. 2), und sie ist nach Satz 6. 2.

die einzige derartige Funktion. In diesem Fall schreibt man

$$e^{w\cdot\lambda}=(e^{w})^{\lambda}=a^{\lambda} \tag{6.6}$$

wodurch unsere Benennung begründet ist.

Satz 6. 3. *Wenn die Exponentialfunktionen* $e^{w\lambda}$ *und* $e^{w\lambda}$ *existieren, und* τ, μ *beliebige reelle Zahlen sind, dann gelten die folgenden Formeln:*

$$(e^{w\lambda})' = w\cdot e^{w\lambda}, \tag{6.7}$$

$$e^{w0} = 1, \tag{6.8}$$

$$(e^{w\lambda})'_{\lambda=0} = w, \tag{6.9}$$

$$e^{w\lambda}\cdot e^{\omega\lambda} = e^{(w+\omega)\lambda}, \tag{6.10}$$

$$e^{w(\tau\cdot\mu)} = e^{(w\cdot\tau)\mu}, \tag{6.11}$$

$$e^{w\tau}\cdot e^{w\mu} = e^{w(\tau+\mu)}. \tag{6.12}$$

Beweis. (6. 7) und (6. 8) sind die Definition von $e^{w\lambda}$. (6. 9) ist eine einfache Folgerung von (6. 7) und (6. 8). (6. 10) beweist man folgenderweise: Nach den Bedingungen des Satzes 6. 3. existieren die Exponentialfunktionen $f_w=e^{w\lambda}$ und $f_\omega=$ $=e^{\omega\lambda}$, für die gelten

$$f_w' = w\cdot f_w,\quad f_\omega' = \omega\cdot f_\omega,$$

$$f_w(0) = 1,\quad f_\omega(0) = 1.$$

Daraus ergibt sich

$$(f_w\cdot f_\omega)' = f_w'\cdot f_\omega + f_w\cdot f_\omega' = w\cdot f_w\cdot f_\omega + f_w\cdot\omega\cdot f_\omega = (w+\omega)\cdot f_w\cdot f_\omega,$$

und

$$f_w(0)\cdot f_\omega(0) = 1,$$

womit (6. 10) bewiesen ist.

Zum Beweis von (6. 11) betrachten wir die mittelbare Funktion $e^{w(\tau\cdot\lambda)}$. Nach (5. 4) gilt

$$(e^{w(\tau\cdot\lambda)})' = w\cdot e^{w(\tau\cdot\lambda)}\cdot\tau = w\cdot\tau\cdot e^{w(\tau\cdot\lambda)}.$$

Daraus folgt wegen

$$e^{w(\tau\cdot 0)} = e^{w0} = 1$$

die Formel (6. 11).

(6. 12) ist eine Folgerung von (6. 10) und (6. 11). Wegen (6. 11) existieren nämlich die Operatoıfunktionen $e^{(w\cdot\tau)\lambda}$ und $e^{(w\cdot\mu)\lambda}$, für die

$$e^{(w\cdot\tau)\lambda}\cdot e^{(w\cdot\mu)\lambda} = e^{(w\cdot\tau+w\cdot\mu)\lambda} = e^{(w\cdot(\tau+\mu))\lambda}$$

nach (6. 10) gilt.

Für $\lambda=1$ ist aber

$$e^{(w\cdot\tau)1}\cdot e^{(w\cdot\mu)1} = e^{(w\cdot(\tau+\mu))1},$$

also ist nach (6. 11)

$$e^{w\tau}\cdot e^{w\mu} = e^{w(\tau+\mu)}.$$

Damit ist der Satz 6. 3 vollständig bewiesen.

Bemerkung 6. 1. Wenn wir

(6. 13) $$e^{w}=e^{w1}$$

setzen, dann gilt nach (6. 11)

$$e^{w\lambda}=e^{w(\lambda\cdot 1)}=e^{(w\cdot\lambda)1}=e^{w\cdot\lambda}.$$

Auf Grund der Exponentialfunktionen können wir weitere Funktionen erklären, damit werden wir uns aber jetzt nicht beschäftigen.

§ 7. Die Exponentialfunktion $e^{-s\cdot\lambda}$

Wir werden eine Operatorfunktion angeben, und zeigen, daß sie mit $e^{-s\cdot\lambda}$ identisch ist. Dazu ist der folgende Satz notwendig:

Satz 7. 1. *Wenn die Operatorfunktion $f(\lambda)$ den Bedingungen*

(7. 1) $$f'(\lambda)=w\cdot f(\lambda)\qquad (w\in R,\ 0\leqq\lambda<\infty)$$

(7. 2) $$f(0)=1$$

genügt, dann genügt die Operatorfunktion

(7. 3) $$F(\lambda)=\begin{cases} f(\lambda) & \text{für}\quad 0\leqq\lambda\\ \dfrac{1}{f(-\lambda)} & \text{für}\quad \lambda<0\end{cases}$$

den Bedingungen

(7. 4) $$F'(\lambda)=w\cdot F(\lambda)\qquad (-\infty<\lambda<\infty),$$

(7. 5) $$F(0)=1$$

d.h. $$F(\lambda)=e^{w\lambda}.$$

Der Beweis erfolgt in vier Schritten.

(a) $$f(\tau)\cdot f(\mu)=f(\tau+\mu)\qquad (0\leqq\tau<\infty,\ 0\leqq\mu<\infty).$$

Die Formel (a) können wir genau so, wie die Formel (6. 12), einsehen.

(b) Es existiert eine reelle Zahl λ_0, mit $\lambda_0>0$ und $f(\lambda_0)\notin M^-\cup M^+$. Entgegen der Behauptung (b) nehmen wir an, daß $f(\lambda)\in M^-\cup M^+$ für beliebige $\lambda>0$ erfüllt ist. Da die Operatorfunktion $f(\lambda)$ in dem Intervall $[0,\infty)$ stetig differenzierbar ist, schreibt man sie auf einem beliebigen endlichen Intervall $[0, \Lambda]$ in der Form

(7. 6) $$f(\lambda)=p\cdot\{f_1(\lambda,t)\}\qquad (p^{-1}\in C),$$

wobei die Funktion $f_1(\lambda, t)$ in dem Gebiet $D=\left\{\begin{matrix}0\leqq\lambda\leqq\Lambda\\ -\infty<t<\infty\end{matrix}\right\}$ stetig ist. Wegen der Stetigkeit von $f_1(\lambda, t)$ gilt

(7. 7) $$\lim_{n\to\infty} f_1(\lambda_n, t)=f(0,t)\ \ (-\infty<t<\infty)$$

falls $\lambda_n\to 0$ $(0<\lambda_n\leqq\Lambda)$.

Aus der Formel (7. 6) folgt wegen unserer Annahme, daß

$$f_1(\lambda, t) \in M^- \cup M^+ \tag{7.8}$$

für beliebige $\lambda > 0$ gilt, d.h. $f_1(\lambda, t)$ ist als Funktion von t identisch gleich Null auf mindestens einem der Intervalle $(-\infty, 0]$ oder $[0, \infty)$.

Daraus ergibt sich wegen (7. 7)

$$f(0, t) \in M^- \cup M^+, \tag{7.9}$$

welches der Formel (7. 2) widerspricht.

Damit ist die Behauptung (b) bewiesen.

(c) Ist $f(\lambda_0) \notin M^- \cup M^+$ für irgendein $\lambda_0 > 0$, dann ist $f(\lambda) \notin M^- \cup M^+$ für jedes $\lambda > 0$. In diesem Fall gilt nach (a)

$$f(\lambda) \cdot f(\lambda - \lambda_0) = f(\lambda_0) \qquad (0 < \lambda_0 \leqq \lambda < \infty), \tag{7.10}$$

woraus sich die Behauptung (c) aus der Folgerung 2. der Sätze 3. 1. und 3. 2. unmittelbar ergibt.

(d) Die Funktion $F(\lambda)$ genügt den Bedingungen (7. 4) und (7. 5). Wegen der Gültigkeit von (b) und (c) hat die Definition (7. 3) von $F(\lambda)$ einen Sinn. Aus (7. 3) und (a) folgt, daß die Funktion $F(\lambda)$ auch die Eigenschaft

$$F(\tau) \cdot F(\mu) = F(\tau + \mu) \qquad (-\infty < \tau < \infty,\ -\infty < \mu < \infty) \tag{7.11}$$

hat. Es sei $[a, b]$ ein endliches Intervall. Nach (7. 11) und (7. 3) gilt

$$F(\lambda) = F(a) \cdot F(\lambda - a) = F(a) \cdot f(\lambda - a) \qquad (a \leqq \lambda \leqq b), \tag{7.12}$$

und wegen (5. 2), (5. 4), (7. 1) und (7. 3) folgt

$$F'(\lambda) = F(a) \cdot f'(\lambda - a) = F(a) \cdot w \cdot f(\lambda - a) = w \cdot F(\lambda) \qquad (a \leqq \lambda \leqq b).$$

Damit, denn $F(0) = 1$ ist trivial, ist der Satz (7. 1) vollständig bewiesen.

Satz 7. 2. *Es gilt*

$$e^{-s \cdot \lambda} = \begin{cases} \dfrac{\{\varphi_\lambda(t)\}}{\{\varphi_\lambda(t+\lambda)\}} & \text{für} \quad 0 \leqq \lambda, \\[2ex] \dfrac{\{\varphi_{-\lambda}(t-\lambda)\}}{\{\varphi_{-\lambda}(t)\}} & \text{für} \quad \lambda < 0, \end{cases} \tag{7.13}$$

wobei

$$\varphi_\mu(t) = \begin{cases} t - \mu & \text{für} \quad \mu \leqq t, \\ 0 & \text{für} \quad 0 < t < \mu, \\ t & \text{für} \quad t \leqq 0. \end{cases} \qquad (0 \leqq \mu) \tag{7.14}$$

Beweis. Wegen des Satzes 7. 1. genügt es zu zeigen, daß die in dem Satz 7. 2. gegebene Operatorfunktion auf dem endlichen Intervall $[0, \lambda_0]$ $(0 < \lambda_0)$ die folgenden Bedingungen befriedigt:

$$f'(\lambda) = -s \cdot f(\lambda), \tag{7.15}$$

$$f(0) = 1. \tag{7.16}$$

Es seien

$$(7.17)\qquad p^{-1}=\begin{cases}\frac{1}{2}\cdot t^2 & \text{für}\quad 0\leqq t,\\ 0 & \text{für}\quad -\lambda_0<t<0,\\ -\frac{1}{2}\cdot(t+\lambda_0)^2 & \text{für}\quad t\leqq-\lambda_0,\end{cases}$$

und

$$(7.18)\qquad f_1(\lambda,t)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cdot(t-\lambda)^2 & \text{für}\quad \lambda\leqq t,\\ 0 & \text{für}\quad -\lambda_0+\lambda<t<\lambda,\\ -\frac{1}{2}\cdot(t+\lambda_0-\lambda)^2 & \text{für}\quad t\leqq-\lambda_0+\lambda,\end{cases}$$

dann sind die Funktion $f_1(\lambda, t)$ und

$$(7.19)\qquad \frac{\partial f_1(\lambda,t)}{\partial\lambda}=\begin{cases}-t+\lambda & \text{für}\quad \lambda\leqq t,\\ 0 & \text{für}\quad -\lambda_0+\lambda<t<\lambda,\\ t+\lambda_0-\lambda & \text{für}\quad t\leqq-\lambda_0+\lambda,\end{cases}$$

im Gebiet $D=\begin{Bmatrix}0\leqq\lambda\leqq\lambda_0\\ -\infty<t<\infty\end{Bmatrix}$ stetig. Ferner gilt die Formel

$$(7.20)\qquad f(\lambda)=\frac{\{\varphi_\lambda(t)\}}{\{\varphi_\lambda(t+\lambda)\}}=p\cdot\{f_1(\lambda,t)\}$$

im Intervall $[0, \lambda_0]$. Es gelten nämlich

$$\{\varphi_\lambda(t)\}\cdot p^{-1}=\begin{cases}\int\limits_\lambda^t \frac{1}{2}\cdot(t-\tau)^2\cdot(\tau-\lambda)\,d\tau & \text{für}\quad \lambda\leqq t,\\ 0 & \text{für}\quad -\lambda_0<t<\lambda,\\ -\int\limits_t^{-\lambda_0}(t-\tau)\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot(\tau+\lambda_0)^2\right)d\tau & \text{für}\quad t\leqq-\lambda_0,\end{cases}$$

und

$$\{\varphi_\lambda(t+\lambda)\}\cdot\{f_1(\lambda,t)\}=\begin{cases}\int\limits_\lambda^t(t-\tau)\cdot\frac{1}{2}\cdot(\tau-\lambda)^2\,d\tau & \text{für}\quad \lambda\leqq t,\\ 0 & \text{für}\quad -\lambda<t<0,\\ -\int\limits_t^{-\lambda} f_1(\lambda,t-\tau)\cdot(\tau+\lambda)\,d\tau & \text{für}\quad t\leqq-\lambda,\end{cases}$$

wobei

$$\int\limits_\lambda^t(t-\tau)\cdot\frac{1}{2}\cdot(\tau-\lambda)^2\,d\tau=\left[-\frac{1}{2}\cdot(t-\tau)^2\cdot\frac{1}{2}\cdot(\tau-\lambda)^2\right]_{\tau=\lambda}^{\tau=t}-$$

$$-\int\limits_\lambda^t-\frac{1}{2}\cdot(t-\tau)^2\cdot(\tau-\lambda)\,d\tau=\int\limits_\lambda^t\frac{1}{2}\cdot(t-\tau)^2\cdot(\tau-\lambda)\,d\tau,$$

und

$$-\int_{t}^{-\lambda} f_1(\lambda, t-\tau)\cdot(\tau+\lambda)\,d\tau = -\int_{t+\lambda}^{0} f_1(\lambda, x)\cdot(t-x+\lambda)\,dx =$$

$$= \left\{\begin{matrix} 0 & \text{für} \quad -\lambda_0+\lambda < t+\lambda \leqq 0, \\ \int\limits_{t+\lambda}^{-\lambda_0+\lambda} \frac{1}{2}\cdot(x+\lambda_0-\lambda)^2\cdot(t-x+\lambda)\,dx & \text{für} \quad t+\lambda \leqq -\lambda_0+\lambda, \end{matrix}\right\} =$$

$$= \left\{\begin{matrix} 0 & \text{für} \quad -\lambda_0 < t \leqq -\lambda, \\ \int\limits_{t+\lambda}^{-\lambda_0+\lambda} \frac{1}{2}\cdot(x+\lambda_0-\lambda)^2\cdot(t-x+\lambda)\,dx & \text{für} \quad t \leqq -\lambda_0, \end{matrix}\right\} =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{für} \quad -\lambda_0 < t \leqq -\lambda, \\ \int\limits_{t}^{-\lambda_0} \frac{1}{2}\cdot(y+\lambda)^2\cdot(t-y)\,dy & \text{für} \quad t \leqq -\lambda_0, \end{cases}$$

sind, wo $x = y+\lambda$.
So ist die Operatorfunktion $f(\lambda)$ im Intervall $[0, \lambda_0]$ stetig differenzierbar und es ist

$$f'(\lambda) = p\cdot\left\{\frac{\partial f_1(\lambda, t)}{\partial\lambda}\right\} \qquad (0 \leqq \lambda \leqq \lambda_0). \tag{7.21}$$

Anderseits gilt nach (4. 1)

$$-s\cdot\{f(\lambda)\} = -s\cdot p\cdot\{f_1(\lambda, t)\} = -p\cdot\left(\left\{\frac{\partial f_1(\lambda, t)}{\partial t}\right\}+f(\lambda, 0)\right) = -p\cdot\left\{\frac{\partial f_1(\lambda, t)}{\partial t}\right\} =$$

$$= p\cdot\left\{-\frac{\partial f_1(\lambda, t)}{\partial t}\right\} = p\cdot\left\{\frac{\partial f_1(\lambda, t)}{\partial\lambda}\right\} = f'(\lambda),$$

womit der Satz 7. 2. bewiesen ist, denn (7. 16) gilt offenbar.

Satz 7. 3. *Es sei $f\in C$.*

(A) *Wenn die Funktion f im Intervall $[-\lambda, 0]$ identisch gleich Null ist, dann und nur dann gilt*

$$e^{-s\cdot\lambda}\cdot f = \{f(t-\lambda)\} \qquad (-\infty < \lambda < \infty). \tag{7.22}$$

(B) *Wenn die Funktion f im Intervall $[-\lambda, 0]$ nicht identisch gleich Null ist, dann ist*

$$e^{-s\cdot\lambda}\cdot f \notin C. \tag{7.23}$$

BEWEIS. Es sei zum Beispiel $\lambda < 0$ und wir setzen

$$e^{-s\cdot\lambda}\cdot f = g \qquad (g\in C). \tag{7.24}$$

Die Formel (7. 24) ist mit

$$\frac{\{\varphi_{-\lambda}(t-\lambda)\}}{\{\varphi_{-\lambda}(t)\}} = f = g,$$

d.h. mit

$$\{\varphi_{-\lambda}(t-\lambda)\}\cdot f = \{\varphi_{-\lambda}(t)\}\cdot g \tag{7.25}$$

äquivalent. Nach den Relationen

$$\{\varphi_{-\lambda}(t-\lambda)\}\cdot f=\begin{cases}\int\limits_0^t (t-\tau)\cdot f(\tau)\,d\tau & \text{für}\quad 0\leqq t,\\ 0 & \text{für}\quad \lambda<t<0,\\ -\int\limits_t^\lambda f(t-\tau)\cdot(\tau-\lambda)\,d\tau & \text{für}\quad t\leqq\lambda,\end{cases}$$

also nach der Substitution $\tau = t-y+\lambda$ folgt:

$$\{\varphi_{-\lambda}(t-\lambda)\}\cdot f=\begin{Bmatrix}\int\limits_0^t (t-\tau)\cdot f(\tau)\,d\tau & \text{für}\quad 0\leqq t,\\ 0 & \text{für}\quad \lambda<t<0,\\ -\int\limits_t^\lambda (t-y)\cdot f(y-\lambda)\,dy & \text{für}\quad t\leqq\lambda,\end{Bmatrix}=$$

$$=\{t\}\cdot\begin{cases}f(t) & \text{für}\quad 0\leqq t,\\ 0 & \text{für}\quad \lambda<t<0,\\ f(t-\lambda) & \text{für}\quad t\leqq\lambda,\end{cases}$$

und

$$\{\varphi_{-\lambda}(t)\}\cdot g=\begin{Bmatrix}\int\limits_{-\lambda}^t g(t-\tau)\cdot(\tau+\lambda)\,d\tau & \text{für}\quad -\lambda\leqq t,\\ 0 & \text{für}\quad 0<t<-\lambda,\\ -\int\limits_t^0 (t-\tau)\cdot g(\tau)\,d\tau & \text{für}\quad t\leqq 0,\end{Bmatrix}=$$

$$=\begin{Bmatrix}\int\limits_{-\lambda}^t (t-y)\cdot g(y+\lambda)\,dy & \text{für}\quad -\lambda\leqq t,\\ 0 & \text{für}\quad 0<t<-\lambda,\\ -\int\limits_t^0 (t-\tau)\cdot g(\tau)\,d\tau & \text{für}\quad t\leqq 0,\end{Bmatrix}=$$

$$=\{t\}\cdot\begin{cases}g(t+\lambda) & \text{für}\quad -\lambda\leqq t,\\ 0 & \text{für}\quad 0<t<-\lambda,\\ g(t) & \text{für}\quad t\leqq 0,\end{cases}$$

(— wo wir die Substitution $\tau = t-y-\lambda$ angewandt haben —) ist die Formel (7. 24) mit den Gleichungen

$$(7.26) \qquad f(t) = 0 \qquad (0 \leqq t \leqq -\lambda),$$

$$(7.27) \qquad g = \{f(t-\lambda)\}$$

äquivalent. (A) ist für $0 \leqq \lambda$ ganz analog einzusehen.

Die Behauptung (B) offensichtlich, nämlich dann führt die Voraussetzung (7. 24) zu einem Widerspruch mit (7. 26).

§ 8. Die Transformationen T^α, U_k und D

Definition 8. 1. Als Operatortransformation bezeichnen wir jede Funktion F die den Elementen x einer gewissen Teilmenge D_F von R Elemente $F(x)$ aus R zuordnet.

Die Operatortransformation F, mit dem Definitionsbereich D_F heißt *homogen*, wenn

$$(8.1) \qquad F(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot F(x) \qquad (x \in D_F,\ \alpha \text{ komplexe Zahl}),$$

additiv, wenn

$$(8.2) \qquad F(x+y) = F(x)+F(y) \qquad (x, y \in D_F),$$

multiplikativ wenn

$$(8.3) \qquad F(x \cdot y) = F(x) \cdot F(y) \qquad (x, y \in D_F).$$

Die Operatortransformation F heißt *linear*, wenn sie homogen und additiv ist ([4]).

Es gelten die folgenden allgemeinen Sätze, von denen wir nur den zweiten beweisen werden.

Satz 8. 1. *Ist F eine multiplikative Operatortransformation mit dem Definitionsbereich C, für die*

$$(8.4) \qquad F(f) \notin M^- \cup M^+, \quad \textit{falls} \quad f \notin M^- \cup M^+$$

gilt, dann ist

$$(8.5) \qquad \overline{F}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{F(f)}{F(g)} \qquad \left(\frac{f}{g} \in R\right)$$

die einzige multiplikative Operatortransformation in R, die die Eigenschaft

$$(8.5) \qquad \overline{F}(f) = F(f) \qquad (f \in C)$$

besitzt. Wenn F homogen ist, dann gilt für beliebige komplexe Zahlen

$$(8.7) \qquad \overline{F}(\alpha) = \alpha.$$

Wenn F linear ist, dann ist $\overline{F}$ auch linear.

Satz 8. 2. *Ist F eine Operatortransformation, mit dem Definitionsbereich C, für die*

$$(8.8) \qquad F(f \cdot g) = g \cdot F(f) + f \cdot F(g) \qquad (f, g \in C)$$

gilt, dann ist

$$(8.9) \qquad \overline{F}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot F(u) - u \cdot F(v)}{v^2} \qquad \left(\frac{u}{v} \in R\right)$$

die einzige Operatortransformation in R, die den Bedingungen

(8.10) $$\bar{F}(f) = F(f), \qquad (f \in C)$$

(8.11) $$\bar{F}(x \cdot y) = y \cdot \bar{F}(x) + x \cdot \bar{F}(y) \qquad (x, y \in R)$$

genügt. Ist F homogen, dann gilt für jede beliebige komplexe Zahl

(8.12) $$\bar{F}(\alpha) = 0.$$

Ist F linear, dann ist $\bar{F}$ auch linear.

Beweis. Es sei $x = \dfrac{u}{v}$ $(u, v \in C)$ und $y = \dfrac{p}{q}$ $(p, q \in C)$. Zuerst zeigen wir, daß die Definition (8.9) von $\bar{F}$ korrekt ist.

Ist
$$\frac{u}{v} = \frac{p}{q},$$
dann sind
$$u \cdot q = v \cdot p,$$
und nach (8.8)
$$q \cdot F(u) + u \cdot F(q) = p \cdot F(v) + v \cdot F(p).$$
Daraus ergibt sich
$$q \cdot F(u) - p \cdot F(v) = v \cdot F(p) - u \cdot F(q),$$
$$q^2 \cdot v \cdot F(u) - q \cdot v \cdot p \cdot F(v) = v^2 \cdot q \cdot F(p) - u \cdot q \cdot v \cdot F(q),$$
$$q^2 \cdot v \cdot F(u) - q^2 \cdot u \cdot F(v) = v^2 \cdot q \cdot F(p) - v^2 \cdot p \cdot F(q),$$
$$\frac{v \cdot F(u) - u \cdot F(v)}{v^2} = \frac{q \cdot F(p) - p \cdot F(q)}{q^2},$$
was zu zeigen war.

Jetzt zeigen wir, daß $\bar{F}$ den Bedingungen (8.10) und (8.11) genügt.:

$$\bar{F}(f) = \bar{F}\left(\frac{f \cdot q}{q}\right) = \frac{q \cdot F(f \cdot q) - f \cdot q \cdot F(q)}{q^2} = \frac{q^2 \cdot F(f) + q \cdot f \cdot F(q) - f \cdot q \cdot F(q)}{q^2} =$$
$$= \frac{q^2 \cdot F(f)}{q^2} = F(f),$$

$$\bar{F}(x \cdot y) = \bar{F}\left(\frac{u \cdot p}{v \cdot q}\right) = \frac{v \cdot q \cdot F(u \cdot p) - u \cdot p \cdot F(v \cdot q)}{(v \cdot q)^2} =$$
$$= \frac{v \cdot q \cdot p \cdot F(u) + v \cdot q \cdot u \cdot F(p) - u \cdot p \cdot q \cdot F(v) - u \cdot pvF(q)}{v^2 \cdot q^2} =$$
$$= \frac{q \cdot p(v \cdot F(u) - u \cdot F(v)) + u \cdot v \cdot (q \cdot F(p) - p \cdot F(q))}{v^2 \cdot q^2} =$$
$$= \frac{p}{q} \cdot \frac{v \cdot F(u) - u \cdot F(v)}{v^2} + \frac{u}{v} \cdot \frac{q \cdot F(p) - p \cdot F(q)}{q^2} = y \cdot \bar{F}(x) + x \cdot \bar{F}(y).$$

Die Existenz von $\bar{F}$ ist damit bewiesen.

Man muß nun noch die Eindeutigkeit einer solchen Operatortransformation zeigen. Nehmen wir an, daß die Transformation F^* auch die Eigenschaften (8. 10) und (8. 11) besitzt. Dann ist offenbar

$$F^*(1) = F^*(1\cdot 1) = 1\cdot F^*(1)+1\cdot F^*(1) = 2\cdot F^*(1).$$

Hieraus folgt

$$F^*(1) = 0.$$

Aus

$$0 = F^*(1) = F^*\left(\frac{v}{v}\right) = F^*\left(v\cdot\frac{1}{v}\right) = \frac{1}{v}\cdot F(v) - v\cdot F^*\left(\frac{1}{v}\right)$$

folgt noch

$$F^*\left(\frac{1}{v}\right) = -\frac{1}{v^2}\cdot F(v).$$

Es gilt also

$$F^*\left(\frac{u}{v}\right) = F^*\left(u\cdot\frac{1}{v}\right) = \frac{1}{v}\cdot F(u)+u\cdot F^*\left(\frac{1}{v}\right) = \frac{1}{v}\cdot F(u) - \frac{u}{v^2}\cdot F(v) =$$

$$= \frac{v\cdot F(u)-u\cdot F(v)}{v^2} = \overline{F}\left(\frac{u}{v}\right).$$

Die übrigen Behauptungen des Satzes 8. 2. beweist man sehr einfach.

Bemerkung 8. 1. Man sieht leicht, daß für beliebige $x, y\in R$ ($y\notin M^-\cup M^+$) im Zusammenhang mit den vorigen Sätzen

$$\overline{F}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\overline{F}(x)}{\overline{F}(y)}, \tag{8.13}$$

bzw.

$$\overline{F}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y\cdot\overline{F}(x)-x\cdot\overline{F}(y)}{y^2} \tag{8.14}$$

gilt.

Im weiteren werden wir uns mit den entsprechenden denjenigen Operatortransformationen beschäftigen, die bei Mikusiński eine wichtige Rolle spielen.

Definition 8. 2. Es sei für beliebige reelle $k\neq 0$ und komplexe α

$$T^\alpha(f) = \{e^{\alpha\cdot t}\cdot f(t), \tag{8.15}$$

$$U_k(f) = \{k\cdot f(k\cdot t)\} \qquad (f\in C), \tag{8.16}$$

$$D(f) = \{-t\cdot f(t)\}. \tag{8.17}$$

Offenbar sind diese Transformationen in C linear, ferner gilt der folgende.

Satz 8. 3. *T^α und U_k sind multiplikativ in C, und D besitzt die Eigenschaft* (8. 8).

Beweis. Ist $f, g \in C$, dann gilt

$$T^\alpha(f\cdot g) = T^\alpha\left(\left\{\int_0^t f(t-\tau)\cdot g(\tau)\,d\tau\right\}\right) = \left\{e^{\alpha\cdot t}\cdot\int_0^t f(t-\tau)\cdot g(\tau)\,d\tau\right\} =$$

$$= \left\{\int_0^t e^{\alpha(t-\tau)}\cdot f(t-\tau)\cdot e^{\alpha\cdot\tau}\cdot g(\tau)\,d\tau\right\} = T^\alpha(f)\cdot T^\alpha(g),$$

$$U_k(f\cdot g) = U_k\left(\left\{\int_0^t f(t-\tau)\cdot g(\tau)\,d\tau\right\}\right) = \left\{k\cdot\int_0^{k\cdot t} f(k\cdot t-\tau)\cdot g(\tau)\,d\tau\right\} =$$

$$= \left\{k\cdot\int_0^t f(kt-ky)\cdot g(k\cdot y)\cdot k\cdot dy\right\} =$$

$$= \left\{\int_0^t k\cdot f(k(t-y))\cdot k\cdot g(k\cdot y)\,dy\right\} = U_k(f)\cdot U_k(g),$$

und

$$D(f\cdot g) = D\left(\left\{\int_0^t f(t-\tau)\cdot g(\tau)\,d\tau\right\}\right) = \left\{-t\cdot\int_0^t f(t-\tau)\cdot g(\tau)\,d\tau\right\} =$$

$$= \left\{\int_0^t (-(t-\tau)-\tau)\cdot f(t-\tau)\cdot g(\tau)\,d\tau\right\} = \left\{\int_0^t -(t-\tau)\cdot f(t-\tau)\cdot g(\tau)\,d\tau\right\} +$$

$$+ \left\{\int_0^t f(t-\tau)\cdot(-\tau\cdot g(\tau))\,d\tau\right\} = g\cdot D(f) + f\cdot D(g).$$

Nach den Sätzen 8. 1. und 8. 2. können wir in der dort angegebene Weise die Transformationen T^α, U_k und D für R erweitern.

Bemerkung 8. 2. In der Mikusińskischen Theorie kann man die Transformation U_k nur für $k<0$ erklären.

Man sieht ferner leicht, daß die Transformation U_{-1} im Teil M^+ von R mit der Abbildung L (siehe § 1.) identisch ist.

Für den Differentiationsoperator s gilt der folgende

Satz 8. 4. *Es gelten*

(8. 18) $$T^\alpha(s) = s-\alpha,$$

(8. 19) $$U_k(s) = \frac{1}{k}\cdot s,$$

(8. 20) $$D(s) = 1.$$

Beweis.

$$T^\alpha(s) = T^\alpha\left(\frac{\{1\}}{1}\right) = \frac{1}{\{e^{\alpha\cdot t}\}} = s-\alpha,$$

$$U_k(s) = U_k\left(\frac{1}{\{1\}}\right) = \frac{\{k\}}{1} = \frac{1}{k\cdot\{1\}} = \frac{1}{k}\cdot s,$$

$$D(s) = D\left(\frac{1}{\{1\}}\right) = \frac{\{1\}\cdot D(1) - 1\cdot D(\{1\})}{\{1\}^2} = \frac{\{t\}}{\{1\}^2} = 1.$$

§ 9. Über den Quotientenring, der durch eine Basisfunktionbestimmt ist

Definition 9. 1. Eine auf einem endlichen oder unendlichen Intervall (a, b) definierte reelle Funktion $\mu(x)$ heißt Basisfunktion, wenn sie die folgenden Eigenschaften besitzt:

1. μ ist stetig,
2. μ ist streng monoton,
3. $\lim\limits_{x\to a+0} |\mu(x)| = \lim\limits_{x\to b-0} |\mu(x)| = \infty$.

Wir zeigen, daß man zu jeder Basisfunktion einen, zu R isomorfen Ring zuordnen kann, so daß R zu $\mu=\{x\}$ gehört.

Es sei μ eine beliebige Basisfunktion in (a, b), ferner sei μ^{-1} ihr Inverses und x_0 ihre Nullstelle, d.h. $\mu(x_0)=0$. Es bezeichne C_μ die Menge der in (a, b) stetigen, komplexwertigen Funktionen.

In C_μ betrachten wir neben der gewöhnlichen Addition die folgende Verallgemeinerung des erweiternten Faltungsbegriffes (2. 2)

$$f\cdot g = \Big\{\int\limits_{x_0}^{x} f(\mu^{-1}(\mu(x)-\mu(y)))\cdot g(y)\,d\mu(y)\Big\} \qquad (a<x<b). \tag{9. 1}$$

Aus (9. 1) ergibt sich (2. 2), wenn $\mu=\{x\}$ ist. Im weiteren werden wir unsere vorherigen Bezeichnungen beibehalten. Zum Beispiel wird $C_{\{x\}}$ einfach mit C bezeichnet.

Satz 9. 1. *Die Strukturen C und C_μ sind isomorph.*

Beweis. Betrachten wir die folgende Abbildung:

$$L_\mu(\{f(t)\})=\{f(\mu(x))\} \qquad (f\in C). \tag{9. 2}$$

Offenbar ist L_μ eine eineindeutige Abbildung von C auf C_μ. Wir zeigen, daß die Abbildung L_μ operationstreu ist. Ist $f, g\in C$, dann ist

$$L_\mu(f+g) = L_\mu(\{f(t)+g(t)\}) = \{f(\mu(x))+g(\mu(x))\} = \{f(\mu(x))\}+\{g(\mu(x))\} = \\ = L_\mu(f)+L_\mu(g),$$

und

$$L_\mu(f\cdot g) = L_\mu\Big(\Big\{\int\limits_0^t f(t-\tau)\cdot g(\tau)\,d\tau\Big\}\Big) = \Big\{\int\limits_0^{\mu(x)} f(\mu(x)-\tau)\cdot g(\tau)\,d\tau\Big\} =$$

$$= \Big\{\int\limits_{x_0}^{x} f(\mu(x)-\mu(y))\cdot g(\mu(y))\,d\mu(y)\Big\} =$$

$$= \Big\{\int\limits_{x_0}^{x} f(\mu(\mu^{-1}(\mu(x)-\mu(y))))\cdot g(\mu(y))\,d\mu(y)\Big\} =$$

$$= \{f(\mu(x))\}\cdot\{g(\mu(x))\} = L_\mu(f)\cdot L_\mu(g).$$

Damit ist der Satz 9. 1. bewiesen.

Folgerung 1. C_μ ist ein kommutativer Ring, in dem die Nullteiler genau diejenigen Funktionen sind, die auf mindestens einem der Intervalle $(a, x_0]$ und $[x_0, b)$ identisch gleich Null sind.

Folgerung 2. R und der Quotientenring R_μ von C_μ sind zueinander isomorph. Dieser Isomorphismus ist die folgende Erweiterung von L_μ:

$$L_\mu\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{L_\mu(f)}{L_\mu(g)} \qquad \left(\frac{f}{g} \in R\right). \tag{9. 3}$$

Im weiteren werden wir auch die Elemente von R_μ Operatoren nennen.

Definition 9. 2. Es sei $\{\alpha\}_\mu$ für jede beliebige komplexe Zahl α, diejenige in (a, b) definierte Funktion, die überall den Wert α annimmt. Wie man leicht sieht, lassen sich die komplexen Zahlen als

$$\alpha = \frac{\{\alpha\}_\mu}{\{1\}_\mu} \tag{9. 4}$$

in R_μ einbetten, und es gelten die folgenden Formeln:

$$\alpha \cdot f = \{\alpha \cdot f(x)\} \qquad (f \in C_\mu), \tag{9. 5}$$

$$L_\mu(\alpha) = \alpha \tag{9. 6}$$

Definition 9. 3. $f(x)$ und $g(x)$ seien zwei Funktionen, die auf einer Umgebung des Punktes ξ erklärt sind. Den Grenzwert

$$\left.\frac{df(x)}{dg\,(x)}\right|_{x=\xi} = \lim_{x \to \xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{g(x)-g(\xi)}, \tag{9. 7}$$

wenn er existiert, nennen wir die Ableitung der Funktion $f(x)$ nach der Funktion $g(x)$ im Punkte ξ. Wenn der Grenzwert (9. 7) endlich ist, so sagen wir, daß die Funktion $f(x)$ nach der Funktion $g(x)$ im Punkte ξ differenzierbar ist.

Definition 9. 4. Den Operator $s_\mu = \dfrac{1}{\{1\}_\mu}$ werden wir den Differentiationsoperator nach μ nennen.

Diese Benennung ist durch den folgenden Satz begründet:

Satz 9. 2. *Wenn die Funktion $f(x)$ eine im Intervall $a<x<b$ stetige Ableitung nach der Funktion $\mu(x)$ hat, d.h. die Funktion $\dfrac{df(x)}{d\mu(x)}$ ist im Intervall $a<x<b$ stetig, dann gilt*

$$s_\mu \cdot \{f(x)\} = \left\{\frac{df(x)}{d\mu\,(x)}\right\} + f(x_0) \qquad (a < x < b). \tag{9. 8}$$

Beweis. Man sieht leicht, daß die Stetigkeit der Funktion $f(x)$ aus der Differenzierbarkeit von $f(x)$ nach $\mu(x)$ wegen der Stetigkeit der Funktion $\mu(x)$ folgt, somit hat das Produkt $s_\mu \cdot \{f(x)\}$ einen Sinn.

Es bezeichne L_μ^{-1} das Inverse von L_μ, dann gilt offenbar

$$L_\mu^{-1}(\{f(x)\}) = \{f(\mu^{-1}(t))\} \qquad (f \in C_\mu), \tag{9. 9}$$

und

$$L_\mu^{-1}(s_\mu) = L_\mu^{-1}\left(\frac{1}{\{1\}_\mu}\right) = \frac{L_\mu^{-1}(1)}{L_\mu^{-1}(\{1\}_\mu)} = \frac{1}{\{1\}} = s. \tag{9.10}$$

Daraus ergibt sich

$$(9.11) \qquad s_\mu \cdot \{f(x)\} = L_\mu(L_\mu^{-1}(s_\mu \cdot \{f(x)\})) = L_\mu(L_\mu^{-1}(s_\mu) \cdot L_\mu^{-1}(\{f(x)\})) = $$
$$= L_\mu(s \cdot \{f(\mu_\mu^{-1}(t))\}).$$

Wir zeigen, ist die Funktion $f(x)$ nach der Funktion $\mu(x)$ im Punkte ξ differenzierbar, dann ist die mittelbare Funktion $F(t)=f(\mu^{-1}(t))$ im Punkte $\mu(\xi)$ im gewöhnlichen Sinne differenzierbar und zwar ist

$$(9.12) \qquad F'(\mu(\xi)) = \left.\frac{df(x)}{d\mu(x)}\right|_{x=\xi}.$$

Nach einem Satz; der sich auf den Grenzwert der mittelbaren Funktion bezieht, gilt

$$F'(\mu(\xi)) = \lim_{t\to\mu(\xi)} \frac{F(t)-F(\mu(\xi))}{t-\mu(\xi)} = \lim_{t\to\mu(\xi)} \frac{f(\mu^{-1}(t))-f(\xi)}{t-\mu(\xi)} =$$
$$= \lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{\mu(x)-\mu(\xi)} = \left.\frac{df(x)}{d\mu(x)}\right|_{x=\xi},$$

womit die Formel (9. 12) bewiesen ist.

So ist

$$\{F'(\mu(x))\} = \left\{\frac{df(x)}{d\mu(x)}\right\} \qquad (a < x < b),$$

woraus die Stetigkeit der Funktion $F'(t)$ wegen der Stetigkeit der Funktion $\dfrac{df(x)}{d\mu(x)}$ folgt.

Nach (9. 11), (9. 13) und (4. 1) ergibt sich

$$s_\mu \cdot \{f(x)\} = L_\mu(s \cdot \{f(\mu^{-1}(t))\}) = L_\mu(s \cdot \{F(t)\}) = L_\mu(\{F'(t)\} + F(0)) =$$
$$= L_\mu(\{F'(t)\}) + L_\mu(F(0)) = \{F'(\mu(x))\} + F(0) = \left\{\frac{df(x)}{d\mu(x)}\right\} + f(x_0),$$

womit der Satz 9. 2. vollständig bewiesen ist.

Wir können ganz analog aus (4. 2) den folgenden Satz einsehen.

Satz 9. 3. *Für eine beliebige komplexe Zahl α ist*

$$(9.14) \qquad \frac{1}{(s_\mu-\alpha)^n} = \left\{\frac{\mu(x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{\alpha\cdot\mu(x)}\right\}.$$

Bemerkung 9. 1. Mit Hilfe der Abbildung L_μ können wir die Ergebnisse der Theorie, die man in R aufbauen kann, auf R_μ leicht übertragen.

Im weiteren werden wir auf gewisse Anwendungen der in diesem Paragraphen angeführten Theorie verweisen. Die Anwendung der Theorie die zu der Basisfunktion $\mu = \{x-x_0\}$ gehört, ist zweckmäßig bei der Lösung der linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, für den Fall, daß die Anfangsbedingungen im Punkte $x_0 \neq 0$ vorgeschrieben sind.

Nähmlich, dann gilt nach (9. 8)

$$s_{\{x-x_0\}} \cdot \{f(x)\} = \{f'(x)\} + f(x_0) \qquad (-\infty < x < \infty). \tag{9.15}$$

Bei der Lösung der Differentialgleichung von Euler

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \cdot x^{n-i} \cdot y^{(n-i)} = V(x) \qquad (a_i \text{ sind komplexe Zahlen})$$

ist die Anwendung der Theorie, die zu der Basisfunktion $\mu = \{\ln x\}$ gehört, oft vorteilhaft.

Bei dieser gilt nämlich

$$s_{ln} \cdot \{f(x)\} = \{x \cdot f'(x)\} + f(1) \qquad (0 < x < \infty).$$

Die vorigen Differentialgleichungen kann man auch mit anderen Methoden der Operatorenrechnung lösen (siehe [1] und [6]).

Literatur

[1] J. Mikusiński, Operatorenrechnung, *Berlin*, 1957.
[2] L. Rédei, Algebra (Erster Teil), *Leipzig*, 1959.
[3] P. Strausz, Az operátorszámítás különböző algebrai felépítései és általánosítása, *Tanulmányok a természettudományok köréből* ELTE TKD *Budapest* (1967), 294—325.
[4] E. Gesztelyi und Á. Száz, On generalized convolution quotient *Publ. Math. Debrecen* **16** (1969), 297—305.
[5] E. Gesztelyi, Über lineare Operatortransformationen, *Publ. Math. Debrecen* **14** (1967), 169—206.
[6] E. Geszelyi, Anwendung der Operatorenrechnung auf lineare Differentialgleichungen mit Polynom-Koeffizienten, *Publ. Math. Debrecen* **10** (1963), 215—243.

(Eingegangen am 7. Januar 1970.)