Nilpotente Endomorphismen von freien abelschen Gruppen

Von HORST MICHEL (Halle/S.)

Durch Anwendungen in der Theorie der vollergodischen maßtreuen Transformationen mit quasidiskretem Spektrum wird das Studium nilpotenter Endomorphismen abzählbarer torsionsfreier abelscher Gruppen nahegelegt ([1], [4], [5]). Insbesondere interessieren (vollständige) Invariantensysteme im unten beschriebenen Sinn für solche Endomorphismen.

In vollständigen torsionsfreien abelschen Gruppen endlichen Ranges hat P. R. HALMOS [2] ein vollständiges Invariantensystem für nilpotente Endomorphismen angegeben.

Hier soll die Frage nach einem Invariantensystem für nilpotente Endomorphismen von endlich erzeugten freien abelschen Gruppen untersucht werden, die in Satz 3. 1 beantwortet wird. Bezüglich der Vollständigkeit dieses Systems sei auf die die Arbeit abschließende Bemerkung verwiesen.

Die erhaltenen Resultate liefern eine wichtige Klasse von Beispielen für die oben erwähnte Anwendung.

1. Bezeichnungen und Definitionen

N bezeichne die Menge der natürlichen Zahlen, $[m, n]$ das kleinste gemeinsame Vielfache und (m, n) den größten gemeinsamen Teiler zweier ganzer Zahlen m, n.

Ein Endomorphismus S einer Gruppe A heißt *nilpotent*, wenn ein $q \in N$ mit $S^q x = 0$ für alle $x \in A$ existiert. Das dabei kleinstmögliche q heißt der *Nilpotenzindex* von S.

Ist für jedes ι einer gewissen Indexmenge I eine Abbildung Φ_ι der Menge $\mathfrak{S}$ der nilpotenten Endomorphismen von A in eine Teilmenge $N_\iota \subset N$ definiert, so heißt

$$\{\Phi_\iota(S) | \iota \in I\}$$

ein *numerisches Invariantensystem von* S, falls gilt:

a) Existiert zu zwei Endomorphismen $S, S' \in \mathfrak{S}$ ein Automorphismus T von A mit $S' = TST^{-1}$, so ist $\Phi_\iota(S) = \Phi_\iota(S')$, $(\iota \in I)$.

Ein Invariantensystem heißt *vollständig*, wenn weiter gilt:

b) Ist $\Phi_\iota(S) = \Phi_\iota(S')$, $(\iota \in I)$, so existiert ein Automorphismus T von A mit $S' = TST^{-1}$.

c) Zu jeder Wahl von Elementen $n_\iota \in N_\iota$, $(\iota \in I)$ existiert ein $S \in \mathfrak{S}$ mit $\Phi_\iota(S) = n_\iota$, $(\iota \in I)$.

Es wird sich zeigen, daß in unserem Fall I eine endliche Menge, also das Invariantensystem endlich ist und daß alle N_ι so gewählt werden können, daß sie mit N übereinstimmen.

Eine Untergruppe A' einer abelschen Gruppe heißt *Servanzuntergruppe* (engl.: pure subgroup), falls jede Gleichung $nx=a'$, $(n\in N, a'\in A')$ in A' lösbar ist, wenn sie in A lösbar ist. Ist eine abelsche Gruppe A torsionsfrei, so ist jede Gleichung $nx=a$, $(n\in N, a\in A)$ in A eindeutig lösbar. Daraus folgt leicht, daß in einer solchen Gruppe der *Durchschnitt eines beliebigen Systems von Servanzuntergruppen* wieder Servanzuntergruppe ist. Also hat in einer torsionsfreien abelschen Gruppe A der Begriff *kleinste A' enthaltende Servanzuntergruppe $\Sigma(A')$ in A* für jede Untergruppe $A'\subset A$ einen eindeutig bestimmten Sinn, wenn man $\Sigma(A')$ als den Durchschnitt aller A' enthaltenden Servanzuntergruppen von A definiert.

In einer *endlich erzeugten freien abelschen Gruppe A* ist jedes Element x eindeutig in der Form

$$x = m_1 x_1 + \cdots + m_r x_r, \qquad (m_i \text{ ganzrational}, \; x_i\in A)$$

darstellbar, wenn r der Rang der Gruppe ist. Gruppen dieses Typs sind torsionsfrei, so daß für sie insbesondere die Definition von $\Sigma(A')$ für jede Untergruppe A' Sinn hat.

2. Vorbereitende Sätze

Für Servanzuntergruppen in endlich erzeugten freien abelschen Gruppen gelten zwei einfache Eigenschaften:

Hilfssatz 2. 1. *Die Untergruppe A' einer endlich erzeugten freien abelschen Gruppe ist genau dann direkter Summand in A, wenn A' Servanzuntergruppe ist.*

Beweis. Ein direkter Summand ist stets Servanzuntergruppe. Ist umgekehrt A' Servanzuntergruppe, so wähle man in A und A' zwei Basen $a_1, \ldots, a_s$ und $a'_1, \ldots, a'_r$, $(r\leqq s)$ mit $a'_i=\varepsilon_i a_i$, $(i=1, \ldots, r)$, was nach [3], S. 126 stets möglich ist. Aus der Servanz von A' folgt $\varepsilon_i=1$, $(i=1, \ldots, r)$. Die a'_i bilden also eine Teilbasis der a_i, woraus die direkte Zerlegbarkeit von A folgt.

Folgerung 2. 2. Der Durchschnitt $A'_1\cap A'_2$ zweier direkter Summanden A'_1, A'_2 einer endlich erzeugten freien abelschen Gruppe A ist direkter Summand in A.

Satz 2. 3. *Ist S ein nilpotenter Endomorphismus mit dem Index q in einer endlichdimensionalen Linearformengruppe A, bezeichnet weiter*

$$A_S = \{x\in A \mid S^{q-1}x \neq 0\}$$

die Menge aller Elemente aus A mit dem Index q, so gilt für die durch

$$\varepsilon_i = \max\left\{\varepsilon\in N \,\middle|\, \frac{S^i x}{\varepsilon}\in A \quad \textit{für alle} \quad x\in A_S\right\}, \qquad (i=1, \ldots, q-1)$$

definierten natürlichen Zahlen ε_i die Teilbarkeitsbedingung

$$\varepsilon_i | \varepsilon_{i+1}, \qquad (i=1, \ldots, q-2).$$

Beweis. Nach Definition von ε_i, ε_{i+1} gelten die Beziehungen $S^i x/\varepsilon_i \in A$, $S^{i+1} x/\varepsilon_{i+1} \in A$, $(x \in A_S)$. Aus der ersten von diesen folgt aber $S^{i+1} x/\varepsilon_i \in A$ und man hat somit $S^{i+1} x/[\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1}] \in A$, $(x \in A_S)$. Das ist aber mit der Definition von ε_{i+1} nur vereinbar, wenn $\varepsilon_i | \varepsilon_{i+1}$ gilt.

Satz 2. 4. *Ist S ein nilpotenter Endomorphismus mit dem Index q in einer endlich-dimensionalen Linearformengruppe A, so existiert ein Element $x_0 \in A$ mit $S^{q-1} x_0 \neq 0$ derart, daß die Elemente*

$$x_0, \quad \frac{Sx_0}{\varepsilon_1}, \ldots, \frac{S^{q-1} x_0}{\varepsilon_{q-1}}$$

linear unabhängig sind und einen direkten Summanden B in A erzeugen.

Beweis (durch Induktion nach q): Ist $q=1$, so wähle man ein unteilbares x_0 aus A. Dann ist $B = \{x_0\}$ direkter Summand in A. Ist der Satz für $q-1$ bewiesen, so auch für den Endomorphismus S auf dem Wertebereich SA, der selbst eine Linearformengruppe darstellt, auf der aber S den Index $q-1$ hat. In SA mögen also die Elemente

$$x_0', \quad \frac{Sx_0'}{\varepsilon_1'}, \ldots, \frac{S^{q-2} x_0'}{\varepsilon_{q-2}'}$$

linear unabhängig sein und einen direkten Summanden B in SA erzeugen. Zunächst zeigen wir, daß $\varepsilon_i' = \varepsilon_i$, $(i=1, \ldots, q-2)$ gilt. Nach Definition gilt

$$\text{(1)} \qquad \varepsilon_i = \max\left\{\varepsilon \in N \,\middle|\, \frac{S^i x}{\varepsilon} \in A \quad \text{für alle} \quad x \in A_S\right\}, \qquad (i = 1, \ldots, q-1),$$

$$\text{(2)} \qquad \varepsilon_i' = \max\left\{\varepsilon \in N \,\middle|\, \frac{S^i x'}{\varepsilon'} \in SA \quad \text{für alle} \quad x \in (SA)_S\right\}, \qquad (i = 1, \ldots, q-2).$$

Aus (1) folgt $S\dfrac{S^i x}{\varepsilon_i} = \dfrac{S^i(Sx)}{\varepsilon_i} \in SA$ für alle $Sx \in S(A_S) = (SA)_S$ und daher wegen (2) $\varepsilon_i \leqq \varepsilon_i'$. Aus (2) folgt weiter wegen $(SA)_S = S(A_S)$ $\dfrac{S^i x}{\varepsilon_i'} \in A$ für alle $x \in A_S$, also mit (1) $\varepsilon_i' \leqq \varepsilon_i$. Es sind also die Elemente

$$x_0', \quad \frac{Sx_0'}{\varepsilon_1}, \ldots, \frac{S^{q-2} x_0'}{\varepsilon_{q-2}},$$

die in SA — wie vorausgesetzt — einen direkten Summanden $\tilde{B}$ bilden. Sei nun x_0 ein Urbild von x_0' unter S (also $x_0' = Sx_0$), dann gilt

$$\text{(3)} \qquad \frac{S^{q-1} x_0}{\varepsilon} \in A \rightarrow \varepsilon | \varepsilon_{q-1}.$$

Denn andernfalls wäre $[\varepsilon, \varepsilon_{q-1}] > \varepsilon_{q-1}$ und $\dfrac{S^{q-1} x_0}{[\varepsilon, \varepsilon_{q-1}]}$ als ganzzahlige Linearkombination von $S^{q-1} x_0/\varepsilon$ und $S^{q-1} x_0/\varepsilon_{q-1}$ darstellbar, also selbst Element von A, was aber der Definition von ε_{q-1} widerspricht.

Wir zeigen nun, daß

$$x_0, \quad \frac{Sx_0}{\varepsilon_1}, \ldots, \frac{S^{q-1}x_0}{\varepsilon_{q-1}}$$

linear unabhängig sind. Sonst wäre

$$m_0 x_0 + m_1 \frac{Sx_0}{\varepsilon_1} + \cdots + m_{q-1} \frac{S^{q-1}x_0}{\varepsilon_{q-1}} = 0 \tag{4}$$

mit $\sum_{i=0}^{q-1} |m_i| \neq 0$ möglich. Durch Anwendung von S folgt hieraus (man beachte $S^q x_0 = 0$!) wegen der vorausgesetzten Unabhängigkeit der so entstehenden Elemente in SA die Beziehung $m_0 = m_1 = \cdots = m_{q-2} = 0$. $m_{q-1} \neq 0$ hätte aber $S^{q-1}x_0 = S^{q-2}x_0' = 0$ zur Folge, entgegen der Voraussetzung. Nun sieht man leicht, daß die

$$x_0, \frac{Sx_0}{\varepsilon_1}, \ldots, \frac{S^{q-1}x_0}{\varepsilon_{q-1}}$$

einen direkten Summanden B in A aufspannen. Ist nämlich für $y \in A$

$$my = m_0 x_0 + m_1 \frac{Sx_0}{\varepsilon_1} + \cdots + m_{q-2} \frac{S^{q-2}x_0}{\varepsilon_{q-2}} + m_{q-1} \frac{S^{q-1}x_0}{\varepsilon_{q-1}}, \tag{5}$$

was mit $my \in B$ gleichbedeutend ist, so gilt

$$mSy = m_0 x_0' + m_1 \frac{Sx_0'}{\varepsilon_1} + \cdots + m_{q-2} \frac{S^{q-2}x_0'}{\varepsilon_{q-2}},$$

also $mSy \in \tilde{B}$. Als direkter Summand ist $\tilde{B}$ nach Satz 2. 1 auch Servanzuntergruppe in SA, also gilt sogar $Sy \in \tilde{B}$ und daher $m | m_i$, $(i = 0, 1, \ldots, q-2)$. Unter Verwendung der Bezeichnungen $m_i' = m_i/m$, $(i = 0, 1, \ldots, q-2)$ hat man nach (5) mit

$$y - \left(m_0' x_0 + m_1' \frac{Sx_0}{\varepsilon_1} + \cdots + m_{q-2}' \frac{S^{q-2}x_0}{\varepsilon_{q-2}} \right) = \frac{m_{q-1}}{m} \frac{S^{q-1}x_0}{\varepsilon_{q-1}}$$

ein Element aus A und folglich ist auch

$$\frac{(m, m_{q-1})}{m} \frac{S^{q-1}x_0}{\varepsilon_{q-1}} \in A.$$

Nach (3) erhält man hieraus $\frac{m}{(m, m_{q-1})} \varepsilon_{q-1} | \varepsilon_{q-1}$, also $m | m_{q-1}$. Damit ist gezeigt, daß alle auf der rechten Seite von (5) vorkommenden m_i, $(i = 0, 1, \ldots, q-1)$ Vielfache von m sind, woraus $y \in B$ folgt. Also ist B Servanzuntergruppe in A und nach Satz 2. 1 direkter Summand in A.

Satz 2. 5. *Ist S ein nilpotenter Endomorphismus in einer endlichdimensionalen Linearformengruppe A, so bilden der Index q von S und die durch Satz 2. 3 definierten natürlichen Zahlen $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{q-1}$ ein Invariantensystem für S.*

Beweis. Es sei S' ein weiterer nilpotenter Endomorphismus aus $\mathfrak{S}$ und es existiere ein Automorphismus T von A mit $S' = TST^{-1}$.

1. Es gilt $S^q x = 0$, $(x \in A)$, also $T^{-1} S'^q Tx = 0$ und $S'^q y = 0$, $(y \in A)$. Weiter folgt aus der Existenz eines $x_0 \in A$ mit $S^{q-1} x_0 \neq 0$ die Existenz eines $y_0 \in A$ mit $S'^{q-1} y_0 \neq 0$, man braucht nur $y_0 = Tx_0$ zu nehmen und zu berücksichtigen, daß T als Automorphismus von Null verschiedene Elemente der Gruppe wieder in solche überführt.

2. Setzt man für $i = 1, \dots, q-1$

$$\varepsilon_i(S) = \max\left\{\varepsilon \in N \,\middle|\, \frac{S^i x}{\varepsilon} \in A \quad \text{für alle} \quad x \in A_S\right\},$$

$$\varepsilon_i(S') = \max\left\{\varepsilon' \in N \,\middle|\, \frac{S'^i x'}{\varepsilon'} \in A \quad \text{für alle} \quad x' \in A_{S'}\right\},$$

so folgt wegen $A_{S'} = TA_S$ und $S'^i T = TS^i$ aus

$$\frac{S^i x}{\varepsilon} \in A \quad \text{für alle} \quad x \in A_S$$

die Beziehung

$$\frac{S'^i x'}{\varepsilon} \in A \quad \text{für alle} \quad x' \in A_{S'},$$

also $\varepsilon \leqq \varepsilon_i(S')$ und daraus nach Definition von $\varepsilon_i(S)$ auch $\varepsilon_i(S) \leqq \varepsilon_i'(S')$. Aus Symmetriegründen erhält man auch $\varepsilon_i'(S') \leqq \varepsilon_i(S)$ und damit die Gleichheit.

Der Satz 2. 4 lieferte ein Verfahren, um von A einen direkten Summanden B mit der Eigenschaft $SB \subset B$ abzuspalten. Um dieses Abspaltungsverfahren auch auf den i. a. nicht eindeutig bestimmten komplementären direkten Summanden $\overline{B}$, $(A = B \oplus \overline{B})$ anwenden zu können, muß man zeigen, daß $\overline{B}$ so gewählt werden kann, daß S einen Endomorphismus von $\overline{B}$ induziert.

Satz 2. 6. *Ist S ein nilpotenter Endomorphismus mit dem Index q in einer endlich-dimensionalen Linearformengruppe A und erzeugen die Elemente*

$$x_0, \quad \frac{Sx_0}{\varepsilon_1}, \dots, \frac{S^{q-1} x_0}{\varepsilon_{q-1}}$$

einen direkten Summanden B in A, so existiert eine Untergruppe $\overline{B}$ in A mit $A = B \oplus \overline{B}$ und $S\overline{B} \subset \overline{B}$.

Beweis. (durch Induktion nach q). Für $q = 1$ ist die Behauptung trivial, offenbar leistet dann jeder zu $B = \{x_0\}$ komplementäre direkte Summand $\overline{B}$ das Verlangte.

Nehmen wir den Satz für $q-1$ als bewiesen an. Ist S ein nilpotenter Endomorphismus mit dem Index q, so ist $S(SA) \subset SA$, also S auf SA einschränkbar und dort vom Index $q-1$. SB ist direkter Summand in SA und es existiert nach Induktionsvoraussetzung eine Darstellung $SA = B_0 \oplus \overline{B}_0$ mit $B_0 = S\overline{B}$, $SB_0 \subset \overline{B}_0$.

Es sei $B_1 = \{x \in A \mid Sx \in \overline{B}_0\}$. Dann ist B_1 Untergruppe von A und sogar Servanzuntergruppe in A, denn ist $y \in A$ und $my \in B_1$, also $mSy \in \overline{B}_0$, so ist, da $\overline{B}_0$ als direkter Summand in SA Servanzuntergruppe in SA ist (Satz 2. 1), auch $Sy \in \overline{B}_0$, also $y \in B_1$.

Es gilt $\{B, B_1\}=A$. Ist nämlich $x\in A$, so gibt es eine eindeutige Darstellung $Sx = y+z$, $(y\in B_0, z\in \overline{B}_0)$. Zu $y\in B_0\subset SA$ existiert ein $y_1\in B$ mit $Sy_1=y$. Also gilt $S(x-y_1) = z$ und somit $x-y_1\in B_1$. $x\in A$ ist also wegen $x = y_1+(x-y_1)$ Summe zweier Elemente aus B bzw. B_1. Weiter gilt $B\cap \overline{B}_0 = \{0\}$, denn $x\in B\cap \overline{B}_0$ hat $Sx\in B_0\cap \overline{B}_0$ zur Folge, also $Sx=0$. Da $q\geqq 2$, so gilt wegen

$$x = \alpha_0 x_0+\alpha_1 \frac{Sx_0}{\varepsilon_1}+\cdots+\alpha_{q-2}\frac{S^{q-2}x_0}{\varepsilon_{q-2}}+\alpha_{q-1}\frac{S^{q-1}x_0}{\varepsilon_{q-1}}$$

die Beziehung

$$0 = Sx = \alpha_0 Sx_0+\alpha_1 \frac{S^2x_0}{\varepsilon_1}+\cdots+\alpha_{q-2}\frac{S^{q-1}x_0}{\varepsilon_{q-2}},$$

woraus $\alpha_0=\alpha_1=\cdots=\alpha_{q-2}=0$ folgt und $x=\alpha_{q-1}\dfrac{S^{q-1}x_0}{\varepsilon_{q-2}}$, also $\varepsilon_{q-2}x=\alpha_{q-1}S^{q-1}x_0= = S(\alpha_{q-1}S^{q-2}x_0)\in SB=B_0$. Man hat daher $\varepsilon_{q-2}x\in B_0\cap \overline{B}_0$, was wegen der Komplementarität von B_0 und $\overline{B}_0$ nur mit $x=0$ möglich ist. Daraus folgt $\overline{B}_0\cap(B\cap B_1) = = \{0\}$. $\overline{B}_0$ und $B\cap B_1$ sind Untergruppen von B_1 und $B\cap B_1$ sogar Servanzuntergruppe in B_1 (denn $B\cap B_1$ ist direkter Summand in A, also auch in B_1). Bezeichnet $\Sigma(\overline{B}_0)$ die von $\overline{B}_0$ erzeugte Servanzuntergruppe in B_1, so gilt auch jetzt noch

$$\Sigma(\overline{B}_0)\cap(B\cap B_1)=\{0\}.$$

Aus $x\in\Sigma(\overline{B}_0)\cap(B\cap B_1)$ folgt nämlich wegen $mx\in\overline{B}_0$ (für gewisses natürliches m) auch $mx\in\overline{B}_0\cap(B\cap B_1) = \{0\}$, also $x=0$.

Nach Satz 2. 1 ist $\Sigma(\overline{B}_0)\oplus(B\cap B_1)$ direkter Summand in B_1 und es existiert ein B_0' mit

$$B_1 = B_0'\oplus\Sigma(\overline{B}_0)\oplus(B\cap B_1).$$

Jetzt kann man die gesuchte Untergruppe $\overline{B}$ in der Form

$$\overline{B} = B_0'\oplus\Sigma(\overline{B}_0)$$

angeben. Dann ist nämlich wegen $\overline{B}\subset B_1$ auch $B\cap\overline{B} = (B\cap B_1)\cap\overline{B} = \{0\}$ und weiter

$$B\oplus\overline{B}\subset A = \{B, B_1\}\subset\{B\oplus\overline{B}, \overline{B}\oplus(B\cap B_1)\}\subset B\oplus\overline{B},$$

also $A = B\oplus\overline{B}$. Schließlich folgt aus $\overline{B}\subset B_1$ und der Definition von B_1 die Beziehung $S\overline{B}\subset\overline{B}_0\subset\Sigma(\overline{B}_0)\subset\overline{B}$ und damit ist der Satz vollständig bewiesen.

Wir wollen nun zeigen, daß S in jedem direkten Summanden $\overline{B}$, der gemäß Satz 2. 6 nach der Aufspaltung $A = B\oplus\overline{B}$ verbleibt, einen eindeutig bestimmten Nilpotenzindex $\bar{q}$ hat, obwohl die Aufspaltung von A i. a. nicht eindeutig ist.

Satz 2. 7. *Ist S ein nilpotenter Endomorphismus mit dem Index q in einer endlichdimensionalen Linearformengruppe A und erzeugen die Elemente*

$$x_0, \frac{Sx_0}{\varepsilon_1}, \ldots, \frac{S^{q-1}x_0}{\varepsilon_{q-1}} \quad \text{bzw.} \quad x_0^*, \frac{Sx_0^*}{\varepsilon_1}, \ldots, \frac{S^{q-1}x_0^*}{\varepsilon_{q-1}}$$

zwei direkte Summanden B bzw. B^* in A, so sind die Nilpotenzindizes $\bar{q}$ bzw. $\bar{q}^*$ des (auf die direkten Summanden $\overline{B}$ bzw. $\overline{B}^*$) eingeschränkten Endomorphismus S gleich:

$$\bar{q}=\bar{q}^*.$$

BEWEIS. A besitzt die Darstellungen $A = B \oplus \bar{B}$ und $A = B^* \oplus \bar{B}^*$. Nimmt man $\bar{q} \leqq \bar{q}^*$ an, so folgt aus

$$S^{\bar{q}} B \oplus S^{\bar{q}} \bar{B} = S^{\bar{q}} B^* \oplus S^{\bar{q}} \bar{B}^*$$

wegen

$$\dim (S^{\bar{q}} B) + \dim (S^{\bar{q}} \bar{B}) = \dim (S^{\bar{q}} B^*) + \dim (S^{\bar{q}} \bar{B}^*)$$

die Beziehung

$$(q - \bar{q}) + 0 = (q - \bar{q}) + \dim (S^{\bar{q}} \bar{B}^*),$$

also $\bar{q} \geqq \bar{q}^*$ und damit $\bar{q} = \bar{q}^*$.

Für den Beweis, daß (in den Bezeichnungen des Satzes 2. 7) nicht nur die Nilpotenzindizes in den direkten Summanden $\bar{B}$ und $\bar{B}^*$ dieselben sind, sondern daß auch

$$\bar{\varepsilon}_1 = \bar{\varepsilon}_1^*, \ \ldots, \ \bar{\varepsilon}_{\bar{q}-1} = \bar{\varepsilon}_{\bar{q}-1}^*$$

gilt, sind weitere Hilfsmittel nötig.

Satz 2. 8. *Es seien die* α_{ij}, $(i, j = 1, \ldots, n)$ *ganze Zahlen und* ε_i, ε_i^*, $(i = 1, \ldots, n)$ *natürliche Zahlen mit* $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n = \varepsilon_1^* \varepsilon_2^* \ldots \varepsilon_n^*$ *und den Teilbarkeitsbeziehungen* $\varepsilon_1 | \varepsilon_2 | \ldots | \varepsilon_n$, $\varepsilon_1^* | \varepsilon_2^* | \ldots | \varepsilon_n^*$. *Dann folgen aus*

$$\left| \det \left\| \frac{\varepsilon_i^*}{(\varepsilon_i^*, \varepsilon_j)} \alpha_{ij} \right\| \right| = 1$$

die Beziehungen

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i^*, \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

BEWEIS. Es sei $\mathfrak{S}^n = \{\pi\}$ die symmetrische Gruppe von n Elementen. Nach Voraussetzung gilt

$$\left| \det \left\| \frac{\varepsilon_i^*}{(\varepsilon_i^*, \varepsilon_j)} \alpha_{ij} \right\| \right| = \left| \sum_{\pi \in \mathfrak{S}^n} \prod_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_i^*}{(\varepsilon_i^*, \varepsilon_{\pi(i)})} \prod_{i=1}^{n} \alpha_{i, \pi(i)} \right| = 1.$$

Da beide Produkte der letzten Zeile jeweils ganze Zahlen sind, so ist der größte gemeinsame Teiler

$$GGT \left\{ \prod_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_i^*}{(\varepsilon_i^*, \varepsilon_{\pi(i)})} \middle| \pi \in \gamma^n \right\} = 1,$$

woraus mit den Darstellungen $\varepsilon_i = \prod_{\lambda=1}^{\infty} p_\lambda^{e_{i\lambda}}$, $\varepsilon_i^* = \prod_{\lambda=1}^{\infty} p_\lambda^{e_{i\lambda}^*}$ die Gleichungen

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^{n} e_{i\lambda}^* - \sum_{i=1}^{n} \min (e_{i\lambda}^*, e_{\pi(i), \lambda}) \middle| \pi \in \gamma^n \right\} = 0, \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots)$$

folgen. Dabei bezeichnen $p_1, p_2, \ldots$ die Primzahlen in natürlicher Reihenfolge. Zu jedem $\lambda = 1, 2, \ldots$ existiert also ein $\pi_\lambda \in \mathfrak{S}^n$ so, daß

$$\sum_{i=1}^{n} e_{i\lambda}^* = \sum_{i=1}^{n} \min (e_{i\lambda}^*, e_{\pi_\lambda(i), \lambda})$$

gilt und wegen

$$\sum_{i=1}^{n} \min(e_{i\lambda}^*, e_{\pi_\lambda(i),\lambda}) \leqq e_{\pi_\lambda(j),\lambda} + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} e_{i\lambda}^*$$

folgt daraus

$$(1) \qquad e_{i\lambda}^* \leqq e_{\pi_\lambda(i),\lambda}.$$

Wegen der vorausgesetzten Teilbarkeitseigenschaften hat man

$$\begin{aligned} e_{1\lambda} &\leqq e_{2\lambda} \leqq \cdots \leqq e_{n\lambda}, \\ e_{1\lambda}^* &\leqq e_{2\lambda}^* \leqq \cdots \leqq e_{n\lambda}^*, \end{aligned} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots),$$

so daß sich aus (1) in jedem Falle

$$(2) \qquad e_{i\lambda}^* \leqq e_{i\lambda}, \qquad (i=1, \ldots, n)$$

ergibt. Ist nämlich $\pi_\lambda(i) \leqq i$, so ist dies wegen $e_{\pi_\lambda(i),\lambda} \leqq e_{i\lambda}$ klar. Ist dagegen $\pi_\lambda(i) > i$, so existiert ein $j > i$ mit $\pi_\lambda(j) \leqq i$ und daher ist dann $e_{i\lambda}^* \leqq e_{j\lambda}^* \leqq e_{\pi_\lambda(j),\lambda} \leqq e_{i\lambda}$. Aus (2) folgt daher

$$\varepsilon_i^* \leqq \varepsilon_i, \qquad (i=1, \ldots, n)$$

und damit wegen der vorausgesetzten Produktbedingung die Behauptung.

Es ist möglich, daß bei der Aufspaltung gemäß Satz 2. 6 der Nilpotenzindex $\bar{q}$ von S in $\bar{B}$ mit dem Nilpotenzindex q von S in A übereinstimmt. Dann sind die Größen $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{q-1}$ in A und $\bar{\varepsilon}_1, \ldots, \bar{\varepsilon}_{q-1}$ in $\bar{B}$ nicht unabhängig voneinander, sondern es gilt der folgende

Satz 2. 9. *Ist S ein nilpotenter Endomorphismus mit dem Index q in einer Lonearformengruppe A, erzeugen die Elemente*

$$x_0, \frac{Sx_0}{\varepsilon_1}, \ldots, \frac{S^{q-1}x_0}{\varepsilon_{q-1}}$$

einen direkten Summanden B in A, hat weiter S in der zu B komplementären Untergruppe $\bar{B}$ auch den Index q und erzeugt in $\bar{B}$ das Elementensystem

$$\bar{x}_0, \frac{S\bar{x}_0}{\bar{\varepsilon}_1}, \ldots, \frac{S^{q-1}\bar{x}_0}{\bar{\varepsilon}_{q-1}}$$

einen direkten Summanden, so gilt $\varepsilon_i | \bar{\varepsilon}_i$, $(i=1, \ldots, q-1)$.

Beweis Offenbar ist wegen $S^i x_0/\varepsilon_i \in A$ und $S^i \bar{x}_0 \in \bar{B} \subset A$

$$\max\left\{\varepsilon \in N \,\middle|\, \frac{S^i(x_0 + \overline{x_0})}{\varepsilon} \in A\right\} = (\varepsilon_i, \bar{\varepsilon}_i).$$

Wegen $S^{q-1}x_0 \neq 0$, $S^{q-1}\bar{x}_0 \neq 0$ läßt sich $S^{q-1}(x_0 + \bar{x}_0)$, also $x_0 + \bar{x}_0 \in A_S$ notfalls dadurch erreichen, daß man $\bar{x}_0$ durch $-\bar{x}_0$ ersetzt. Daraus folgt

$$\varepsilon_i = \max\left\{\varepsilon \in N \,\middle|\, \frac{S^i x}{\varepsilon} \in A \quad \text{für alle} \quad x \in A_S\right\} \leqq (\varepsilon_i, \bar{\varepsilon}_i),$$

also $\varepsilon_i | \bar{\varepsilon}_i$.

3. Der Zerlegungssatz

Mit diesen Vorbereitungen kann nun die vollständige Zerlegung von A vorgenommen werden und man erhält einen zu [2], S. 111 analogen Satz.

Satz 3. 1. *Ist S ein nilpotenter Endomorphismus mit dem Index q in einer endlichdimensionalen Linearformengruppe A, so existieren natürliche Zahlen r, q_i, s_i, ε_{ijk}, $(i=1, \ldots, r; j=1, \ldots, q_i-1; k=1, \ldots, s_i)$ und Elemente x_{ik}, $(i=1, \ldots, r; k=1, \ldots, s_i)$ mit den Eigenschaften*

(1) $$q=q_1>q_2>\cdots>q_r,$$

(2) $$\varepsilon_{ijk}|\varepsilon_{i,j+1,k}, \qquad (i=1, \ldots, r;\ j=1, \ldots, q_i-2;\ k=1, \ldots, s_i),$$

(3) $$\varepsilon_{ijk}|\varepsilon_{i,j,k+1}, \qquad (i=1, \ldots, r;\ j=1, \ldots, q_i-1;\ k=1, \ldots, s_i-1),$$

die Elemente

$$\begin{array}{l}
x_{11}, \dfrac{Sx_{11}}{\varepsilon_{111}}, \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad, \dfrac{S^{q_1-1}x_{11}}{\varepsilon_{1,q_1-1,1}}, \\
\vdots \\
x_{1s_1}, \dfrac{Sx_{1s_1}}{\varepsilon_{11s_1}}, \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad, \dfrac{S^{q_1-1}x_{1s_1}}{\varepsilon_{1,q_1-1,s_1}}, \\
x_{21}, \dfrac{Sx_{21}}{\varepsilon_{211}}, \quad \cdots \quad \cdots \quad, \dfrac{S^{q_2-1}x_{21}}{\varepsilon_{2,q_2-1,1}}, \\
\vdots \\
x_{2s_2}, \dfrac{Sx_{2s_2}}{\varepsilon_{21s_2}}, \quad \cdots \quad \cdots \quad, \dfrac{S^{q_2-1}x_{2s_2}}{\varepsilon_{2,q_2-1,s_2}}, \\
\vdots \\
x_{r1}, \dfrac{Sx_{r1}}{\varepsilon_{r11}}, \quad \cdots \quad, \dfrac{S^{q_r-1}x_{r1}}{\varepsilon_{r,q_r-1,1}}, \\
\vdots \\
x_{rs}, \dfrac{Sx_{rs}}{\varepsilon_{r1s_r}}, \quad \cdots \quad, \dfrac{S^{q_r-1}x_{rs}}{\varepsilon_{r,q_r-1,s_r}},
\end{array}$$

bilden eine Basis in A, es gilt

(5) $$S^{q_i}x_{ik}=0, \qquad (i=1, \ldots, r;\ k=1, \ldots, s_i)$$

und die natürlichen Zahlen r, q_i, s_i, ε_{ijk} sind eindeutig durch (1), (2), (3), (5) *festgelegt.*

BEWEIS. Die Existenz einer Basis (4) mit den Eigenschaften (1), (2), (3), (5) folgt aus den vorangehenden Sätzen durch sukzessive Aufspaltung von A in direkte Summanden, wenn man $q_1=q$ und $\varepsilon_{1i1}=\varepsilon_i$ (gemäß Satz 2. 4) setzt und in dieser Weise fortfährt. Die Eindeutigkeit von r, q_i, s_i ist schon aus Satz 2. 7 klar. Es bleibt zu zeigen, daß zu zwei Basen stets die gleichen ε_{ijk} gehören. Zur Vereinfachung der Schreibweise setzen wir $\varepsilon_{i0k}=1$ für alle zulässigen i, k. Die Basis (4) besteht dann aus den Elementen

$$\frac{S^j x_{ik}}{\varepsilon_{ijk}}, \qquad (i=1,\ldots,r;\ j=0,1,\ldots,q_i-1;\ k=1,\ldots,s_i).$$

Es sei durch $\dfrac{S^j x_{ik}^*}{\varepsilon_{ijk}^*}$ eine zweite solche Basis gegeben. Sie geht aus der ersten durch eine lineare Transformation mit dem Determinantenbetrag 1 ([3], S. 135) hervor:

$$\frac{S^j x_{ik}^*}{\varepsilon_{ijk}^*} = \sum_{l=1}^{r} \sum_{m=0}^{q_l-1} \sum_{n=1}^{s_l} a_{ijklmn} \frac{S^m x_{ln}}{\varepsilon_{lmn}}. \tag{6}$$

Wegen der Eigenschaften des Endomorphismus S sind die ganzzahligen a_{ijklmn} aber nicht beliebig wählbar, denn es gilt insbesondere

$$x_{ik}^* = \frac{S^o x_{ik}^*}{\varepsilon_{i0k}^*} = \sum_{l=1}^{r} \sum_{m=0}^{q_l-1} \sum_{n=1}^{s_l} a_{ioklmn} \frac{S^m x_{ln}}{\varepsilon_{lmn}},$$

woraus durch Anwendung von S^j und Division mit ε_{ijk}^*

$$\frac{S^j x_{ik}^*}{\varepsilon_{ijk}^*} = \sum_{l=1}^{r} \sum_{m=0}^{q_l-1} \sum_{n=1}^{s_l} \frac{a_{ioklmn}}{\varepsilon_{ijk}^*} \frac{S^{m+j} x_{ln}}{\varepsilon_{lmn}}$$

oder auch wegen $S^{q_l} x_{ln}=0$

$$\frac{S^j x_{ik}^*}{\varepsilon_{ijk}^*} = \sum_{l=1}^{r} \sum_{m=j}^{q_l-1} \sum_{n=1}^{s_l} \frac{a_{i0kl,m-j,n}}{\varepsilon_{ijk}^*} \frac{S^m x_{ln}}{\varepsilon_{l,m-j,n}}, \qquad (j=0,1,\ldots,q_i-1) \tag{7}$$

folgt. Andererseits ist wegen $S^{q_i-j}(S^j x_{ik}^*)=0$

$$0 = \sum_{l=1}^{r} \sum_{m=j}^{q_l-1} \sum_{n=1}^{s_l} \frac{a_{i0kl,m-j,n}}{\varepsilon_{ijk}^*} \frac{S^{q_i+m-j} x_{ln}}{\varepsilon_{l,m-j,n}}. \tag{8}$$

$S^{q_i+m-j} x_{ln}=0$ gilt genau dann, wenn $q_i+m-j \geqq q_l$ gilt. In (8) braucht also nur über solche m summiert zu werden, für welche $j \leqq m \leqq q_l-q_j+j-1$ gilt. Für die Existenz solcher m ist $1 \leqq q_l-q_i$ und wegen der Monotonie der q_i auch $l<i$ notwendig. Mithin ist

$$0 = \sum_{l=1}^{i-1} \sum_{m=j}^{q_l-1} \sum_{n=1}^{s_l} \frac{a_{i0kl,m-j,n}}{\varepsilon_{ijk}^*} \frac{S^{q_i+m-j} x_{ln}}{\varepsilon_{l,m-j,n}}.$$

Dann folgt wegen (7)

$$\frac{S^j x_{ik}^*}{\varepsilon_{ijk}^*} = \sum_{l=i}^{r} \sum_{m=j}^{q_l-1} \sum_{n=1}^{s} \frac{a_{i0kl,m-j,n}}{\varepsilon_{ijk}^*} \frac{S^m x_{ln}}{\varepsilon_{l,m-j,n}}$$

und durch Vergleich mit (6)

$$a_{ijklmn}=0 \quad \text{falls} \quad \begin{array}{ll} \text{entweder} & 1<i, \\ \text{oder} & 1\geqq i \quad \text{und} \quad m<j, \end{array} \tag{9}$$

$$a_{ijklmn} = \frac{a_{i0kl,m-j,n}}{\varepsilon^*_{ijk}} \frac{\varepsilon_{lmn}}{\varepsilon_{l,m-j,n}} \quad \text{in allen anderen Fällen.} \tag{10}$$

Die Determinante der Transformationsmatrix kann nun durch geeignete Anordnung der Basiselemente leicht berechnet werden. Ordnet man diese so an, daß die Indizesgruppen (*lmn*) bzw. (*ijk*) lexikographisch durchlaufen werden, so besteht die Matrix $\|a_{ijklmn}\|$ aus Untermatrizen

$$A_{ijlm} = \begin{Vmatrix} a_{ij1lm1} & \cdots & a_{ij1lms_l} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{ijs_ilm1} & \cdots & a_{ijs_ilms_l} \end{Vmatrix},$$

die aus jeweils s_i Zeilen und s_l Spalten bestehen und für alle $i, j=1, \ldots, r$; $j=0, \ldots$ $\ldots, q_i-1$; $m=0, \ldots, q_l-1$ definiert sind. Weiter kann man aus den A_{ijlm} die Untermatrizen

$$\mathfrak{A}_{il} = \begin{Vmatrix} A_{i0l0} & \cdots & A_{i0l,q_l-1} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{i,q_i-1,l,0} & \cdots & A_{i,q_i-1,l,q_l-1} \end{Vmatrix}$$

von $\|a_{ijklmn}\|$ zusammensetzen, die aus jeweils q_i Zeilen und q_l Spalten bestehen und für alle $i, l=1, \ldots, r$ definiert sind. Mit diesen Matrizen läßt sich $\|a_{ijklmn}\|$ in der Form

$$\|a_{ijklmn}\| = \begin{Vmatrix} \mathfrak{A}_{11} & \ldots & \mathfrak{A}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathfrak{A}_{r1} & \ldots & \mathfrak{A}_{rr} \end{Vmatrix}$$

darstellen. Dann ist wegen (9) $\mathfrak{A}_{il}=0$ für $l<i$ und

$$\det \|a_{ijklmn}\| = \prod_{i=1}^{r} \det \mathfrak{A}_{ii}.$$

Weiter ist wegen (9) $A_{ijim}=0$ für $m<j$ und daher

$$\det \mathfrak{A}_{ii} = \prod_{j=0}^{q_i} \det A_{ijij},$$

also insgesamt

$$\det \|a_{ijklmn}\| = \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=0}^{q_i} \det A_{ijij}.$$

Die Matrix A_{ijij} hat aber die Gestalt

$$A_{ijij} = \begin{Vmatrix} \frac{\varepsilon_{ij1}}{\varepsilon^*_{ij1}} a_{i01i01} & \cdots & \frac{\varepsilon_{ijs_i}}{\varepsilon^*_{ij1}} a_{i01i0s_i} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\varepsilon_{ij1}}{\varepsilon^*_{ijs_i}} a_{i0s_ii01} & \cdots & \frac{\varepsilon_{ijs_i}}{\varepsilon^*_{ijs_i}} a_{i0s_ii0s_i} \end{Vmatrix} = \frac{\prod_{k=1}^{s_i} \varepsilon_{ijk}}{\prod_{k=1}^{s_i} \varepsilon^*_{ijk}} A_{i0i0}.$$

Da, wie oben vermerkt, $|\det \|a_{ijklmn}\| |=1$ gelten muß, folgt wegen der Ganzzahligkeit der Elemente der Matrizen auch $|\det \|A_{ijij}\| |=1$ und daher wegen (11)

$$\prod_{k=1}^{s_i} \varepsilon^*_{ijk} = \prod_{n=1}^{s_i} \varepsilon_{ijn}, \qquad (i = 1, \ldots, r;\ j = 1, \ldots, q_i - 1).$$

Da aber nicht nur die Elemente der Matrizen A_{ijij}, sondern auch die Faktoren a_{i0ki0n} dieser Elemente ganzzahlig sind, gilt $\varepsilon^*_{ijk}|\varepsilon_{ijn}$, also $\varepsilon^*_{ijk}=(\varepsilon^*_{ijk}, \varepsilon_{ijn})$. Daher erfüllen die Matrizen A_{ijij} die Voraussetzungen des Hilfssatzes 2. 8 und es gilt

$$\varepsilon^*_{ijk}=\varepsilon_{ijk}$$

für alle $i=1, \ldots, r;\ j=1, \ldots, q_i-1;\ k=1, \ldots, s_i$. Das aber war zu zeigen.

4. Bemerkung über vollständige Invariantensysteme

Man beachte, daß die in Satz 3. 1 angegebenen natürlichen Zahlen $r, q_i, s_i, \varepsilon_{ijk}$, $(i=1, \ldots, r;\ j=1, \ldots, q_i-1;\ k=1, \ldots, s_i)$ noch kein *vollständiges* Invariantensystem im Sinne von Abschnitt 1 dieser Arbeit darstellen, weil die ε_{ijk} gewissen Teilbarkeitseigenschaften genügen müssen. Es ist leicht zu sehen, daß man durch Ersetzung der ε_{ijk} durch andere Größen und Beibehaltung der r, q_i, s_i zu einem vollständigen System gelant.

Man braucht nur (wie schon teilweise im Beweis von Satz 3. 1 praktiziert) $\varepsilon_{i0k}=1$, $\varepsilon_{ij0}=1$, $(i=1, \ldots, r;\ j=0, 1, \ldots, q_i-1;\ k=0, 1, \ldots, s_i)$ zu definieren und dann

$$\varepsilon_{ijk}=\eta_{ijk}[\varepsilon_{i,j-1,k}\varepsilon_{i,j,k-1}]$$

zu setzen. Dann dürfen die η_{ijk}, $(i=1, \ldots, r;\ j=1, \ldots, q_i-1;\ k=1, \ldots, s_i)$ ebenso wie die Invarianten $r, q_1, \ldots, q_r, s_1, \ldots, s_r$ als beliebige natürliche Zahlen gewählt werden und die durch sie (durch Induktion nach $j+k$) eindeutig bestimmten ε_{ijk} erfüllen die Teilbarkeitsbedingungen von Satz 3. 1.

Literatur

[1] Абрамов, Л. М.: Метрические автоморфизмы с квазидискретным спектром, Изв. Акад. Наук СССР, Сер. мат., **26** (1962), 513—530.

[2] P. R. Halmos, Finite-dimensional vector spaces, 2^{nd} ed., *Princeton—Toronto—London—New York*, 1958.

[3] A. G. Kurosch, Gruppentheorie, *Berlin*, 1953.

[4] H. Michel, Wurzeln vollergodischer Automorphismen mit quasidiskretem Spektrum I, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.* **9** (1968), 323—340.

[5] H. Michel, Wurzeln vollergodischer Automorphismen mit quasidiskretem Spektrum II, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.* **16** (1970), 321—335.

(Eingegangen am 6. Mai 1969.)