Potenzproduktideale II*

Von RENATE KUMMER (Halle) und BODO RENSCHUCH (Potsdam)

§ 5. Die Dimension eines Potenzproduktideals

Die Dimension d eines inhomogenen Polynomideals $\mathfrak{a}$ aus $K[x_1, \dots, x_n]$ ist die maximale Anzahl der in bezug auf $\mathfrak{a}$ algebraisch unabhängigen Variablen x_ν. Die Dimension d eines homogenen Polynomideals $\mathfrak{a}$ aus $K[x_0, x_1, \dots, x_n]$ ist um 1 kleiner als die Dimension, welche $\mathfrak{a}$ in dem inhomogenen Polynomring $K[x_0, x_1, \dots x_n]$ zukommen würde ([2], Seite 98 und 103). Die Zahl $r = n-d$ bezeichnet den Rang des Polynomideals $\mathfrak{a}$. Ein Ideal der Hauptklasse vom Rang r besitzt eine Basis aus r Elementen.

Um die Dimension eines Potenzproduktideals $\mathfrak{a}$ angeben zu können, ist wegen Satz 1 etwa die größte Anzahl von Variablen x_ν zu bestimmen, so daß kein Potenzprodukt dieser x_ν unter den Elementen der unverkürzbaren Potenzproduktbasis des Ideals $\mathfrak{a}$ vorkommt. Diese Zahl ist in $K[x_1, \dots, x_n]$ (in $K[x_0, x_1, \dots, x_n]$ um 1 vermindert) gleich der Dimension des Potenzproduktideals $\mathfrak{a}$.

Einen anderen Weg zur Bestimmung der Dimension eines Potenzproduktideals $\mathfrak{a}$ weist der Satz: Die Dimension eines beliebigen Polynomideals ist gleich der größten Dimension, die die zugehörigen Primideale aufweisen ([2], Seite 98). Also gilt Dim $\mathfrak{a} =$ $=$ Dim Rad $\mathfrak{a}$. Nach den Sätzen 12 und 15 kann die Dimension von $\mathfrak{a}$ leicht bestimmt weerden.

Es seien $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ prime Potenzproduktideale. Aus $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2$ folgt nach Satz 9 Dim $\mathfrak{p}_1 >$ Dim $\mathfrak{p}_2$.

Ein Potenzproduktideal $\mathfrak{a}$ heißt (wie jedes Polynomideal) ungemischt, wenn seine zugehörigen Primideale sämtlich dieselbe Dimension haben. Genau dann sind die in der Darstellung $Ri(\mathfrak{a})$ auftretenden irreduziblen Potenzproduktideale sämtlich Ideale derselben Hauptklasse (Satz 13; vgl. Beispiel 4). — Haben zwei Primideale des Ideals $\mathfrak{a}$ verschiedene Dimensionen, so heißt $\mathfrak{a}$ gemischt. Ist Rad $\mathfrak{a}$ ungemischt, so heißt $\mathfrak{a}$ pseudogemischt.

Beispiel 6. Es sei $n=4$ und

$$\mathfrak{a} = (x_1x_2, x_2^3, x_1^2x_3^2, x_1^2x_3x_4, x_1^2x_4^3) = (x_1^2, x_2^3, x_1x_2) \cap (x_2, x_3^2, x_4^3, x_3x_4).$$

Aus dieser Zerlegung, deren Richtigkeit schnell vermittels Satz 3' verifiziert werden

*) Der erste Teil dieser Arbeit enthält die §§ 1—4 und das Literaturverzeichnis. Er ist in dieser Zeitschrift erschienen (siehe Publ. Math. Debrecen. **17**.).

kann, folgt, daß $\mathfrak{a}$ ein gemischtes, aber nicht pseudogemischtes Potenzproduktideal ist.

Beispiel 7. Es sei $n=3$ und

$$\mathfrak{a}=(x_1^2 x_3, x_1 x_2 x_3)=(x_1)\cap(x_1^2, x_2)\cap(x_3).$$

Dieses Potenzproduktideal $\mathfrak{a}$ ist pseudogemischt, aber nicht ungemischt.

Wie wir leicht erkennen werden, ist jedes Potenzproduktideal der Hauptklasse ungemischt. Daß es außerdem auch ungemischte Potenzproduktideale gibt, die nicht Potenz eines Ideals der Hauptklasse sind, zeigt das Beispiel 4.

Wir formulieren nun den wichtigen Satz von der Dimensionserniedrigung (siehe Satz 15 bei GRÖBNER in [2], Seite 112, 113). Hier soll ein gesonderter Beweis für Potenzproduktideale angegeben werden.

Satz 17. *Ist $\mathfrak{a}$ ein d-dimensionales Potenzproduktideal und q ein Potenzprodukt der x_ν, so besitzt das Ideal $(\mathfrak{a}, q)$ die Dimension d oder $d-1$, je nachdem, ob q in einem zu $\mathfrak{a}$ gehörigen d-dimensionalen Primideal enthalten ist oder nicht.*

BEWEIS 1. Es sei q in einem zu $\mathfrak{a}$ gehörigen Primideal $\mathfrak{p}$ der Dimension d enthalten. Dann ist $\mathfrak{p}$ auch ein zu $(\mathfrak{a}, q)$ gehörendes Primideal (Satz 12/14); aus $\operatorname{Dim}\mathfrak{a} = \operatorname{Dim}(\mathfrak{a}, q)$ folgt weiter $\operatorname{Dim}(\mathfrak{a}, q)=d$.

2. Es sei nun q in keinem d-dimensionalen zu $\mathfrak{a}$ gehörigen Primideal enthalten. Wir nehmen an, die Darstellung (7) aus Satz 12 für $(\mathfrak{a}, q)$ liefere doch ein d-dimensionales Primideal $\mathfrak{p}$, das zu $Ri((\mathfrak{a}, q))$ gehört. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $q\in(x_1)$ und $\mathfrak{p}=(x_1, \dots, x_r)$ mit $r = n-d$. Bezeichnet $q_1, q_2, \dots, q_s$ die unverkürzbare Potenzproduktbasis von $\mathfrak{a}$, so gälte o. B. d. A. $q_i\in(x_1)$ für $i=1, \dots, j$ und $q_i\in(x_2, \dots, x_r)$ für $i = j+1, \dots, s$ mit $0\leqq j\leqq s$. Wegen $\operatorname{Dim}\mathfrak{a}=d=n-r$ müßte dann das Primideal $\mathfrak{p}$ auch zu $\mathfrak{a}$ gehören (Satz 12/14), was wegen $q\in(x_1)$ zu unserer Annahme im Widerspruch stünde. Also ist die Annahme $\operatorname{Dim}(\mathfrak{a}, q)=d$ falsch, und es gilt $\operatorname{Dim}(\mathfrak{a}, q)=d_1\leqq d-1$.

Um die Gleichheit $d_1 = d-1$ zu zeigen, gehen wir folgendermaßen vor: Ist $\mathfrak{p}_1$ ein zu $\mathfrak{a}$ gehöriges d-dimensionales Primideal, so gilt nach Voraussetzung $q\notin\mathfrak{p}_1$; wegen $q\in(x_1)$ folgt daraus $x_1\notin\mathfrak{p}_1$. Also ist o. B. d. A. $\mathfrak{p}_1=(x_2, \dots, x_{r+1})$ mit $r = n-d$. Dann gehört nach Satz 14 das $(d-1)$-dimensionale Primideal $\mathfrak{p}=(\mathfrak{p}_1, x_1)= =(x_1, x_2, \dots, x_{r+1})$ zu $(\mathfrak{a}, q)$, es gilt $d_1 = d-1$, q.e.d.

FOLGERUNG AUS SATZ 17. *Es sei $\mathfrak{a}$ ein d-dimensionales Potenzproduktideal mit der unverkürzbaren Potenzproduktbasis $q_1, q_2, \dots, q_s$. Gilt für das Potenzprodukt q $\langle q_k, q\rangle=1$ für $k=1, 2, \dots, s$, so ist* $\operatorname{Dim}(\mathfrak{a}, q) = d-1$.

Satz 18. *Das Potenzproduktideal $\mathfrak{a}$ mit der unverkürzbaren Potenzproduktbasis $q_1, q_2, \dots, q_r$ ist genau dann ein Ideal der r-ten Hauptklasse, wenn für den größten gemeinsamen Teiler $\langle q_i, q_k\rangle=1$ für $i\neq k$ und $i, k=1, 2, \dots, r$ gilt.*

BEWEIS 1. Aus der Hauptklasseneigenschaft folgt $\langle q_i, q_k\rangle=1$. — Satz 12 liefert zu $\mathfrak{a}$ gehörige Primideale in der Form $\mathfrak{p}=(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_r})$. Wären etwa q_1 und q_2 durch x_1 teilbar, so wäre in einem dieser Primideale $\mathfrak{p}$ $x_{i_1}=x_{i_2}=x_1$ und nach Satz 17 $\operatorname{Dim}\mathfrak{p} > n-r = d$, woraus $\operatorname{Dim}\mathfrak{a}>d$ im Widerspruch zur Voraussetzung folgen würde.

2. Aus der Relation $\langle q_i, q_k\rangle = 1$ für alle $i \neq k$ folgt nach Satz 17, daß die Dimension von $\mathfrak{a}$ um die Anzahl r der Basiselemente q_i kleiner als n ist, das heißt aber, daß $\mathfrak{a}$ ein Ideal der Hauptklasse vom Rang r ist, q.e.d.

FOLGERUNG AUS SATZ 18. *Jedes primäre Potenzproduktideal der Hauptklasse ist rein (und nach Satz 11 irreduzibel) und umgekehrt.*

Es gibt natürlich auch Potenzproduktideale der Hauptklasse, die nicht irreduzibel sind, wie zum Beispiel das Hauptideal $(x_1 x_2)$ für $n \geqq 2$ oder das Ideal $(x_1 x_2, x_3^2 x_4)$ für $n \geqq 4$.

Eine weitere Folgerung ist

Satz 19. *Jedes Potenzproduktideal der Hauptklasse ist ungemischt.*

BEWEIS. Nach Satz 13 erhält man für jedes Potenzproduktideal $\mathfrak{a}$ der Hauptklasse eine unverkürzbare Darstellung $Ri(\mathfrak{a})$ durch irreduzible Ideale, die wegen Satz 18 alle derselben Hauptklasse angehören.

Vom Mitverfasser wurde für Polynomideale das Problem der schnellsten Dimensionserniedrigung behandelt; die Sätze 14 und 17 gestatten für Potenzproduktideale auch eine Lösung des Problems der langsamsten Dimensionserniedrigung, die im folgenden beschrieben werden soll.

Ein d-dimensionales Potenzproduktideal $\mathfrak{a}$ sei durch seine unverkürzbare Potenzproduktbasis S, bestehend aus den s Potenzprodukten $q_1, \ldots, q_s$, gegeben. Wir bilden die echte Teilerkette

$$(q_1) \subset (q_1, q_2) \subset \ldots \subset (q_1, q_2, \ldots, q_s) = \mathfrak{a}.$$

Wie müssen die q_i numeriert sein, damit sich in dieser Kette die Dimension möglichst langsam von $n-1$ auf d erniedrigt? — Die folgende Methode wird zu einer geeigneten Anordnung der q_i führen:

1. Es bezeichne s_1 die maximale Anzahl von Potenzprodukten aus S mit einem gemeinsamen Teiler ($\notin K$). Es seien $S_1, \ldots, S_{l_1}$ die entsprechenden Teilmengen von S, jeweils bestehend aus s_1 Elementen mit gemeinsamen Teiler.

2. Zu jedem j ($j = 1, 2, \ldots, l_1$) werde die maximale Anzahl s_{2j} der q_i aus $S \setminus S_j$ mit gemeinsamen Teiler ($\notin K$) bestimmt. Wir definieren $s_2 \doteq \max\{s_{2j}\}$; es sei l_2 die Anzahl derjenigen j mit $s_{2j} = s_2$ und o. B. d. A. $s_{21} = s_{22} = \cdots = s_{21_2} = s_2$. Es bezeichne S_{jk} eine Menge von s_2 Elementen q_i aus $S \setminus S_j$, deren größter gemeinsamer Teiler von 1 verschieden ist. ($k = 1, 2, \ldots, l_{2j}$.)

3. Für jedes geordnete Paar (j, k) werde die maximale Anzahl s_{3jk} der Potenzprodukte q_i aus $S \setminus S_j \setminus S_{jk}$, die einen gemeinsamen Teiler ($\notin K$) besitzen, bestimmt; es sei $s_3 \doteq \max\{s_{3jk}\}$ ($k = 1, 2, \ldots, l_{2j}$; $j = 1, 2, \ldots, l_2$). Die Anzahl der s_j ($1 \leqq j \leqq l_2$) mit $s_{3jk} = s_3$ sei l_3. Dann gilt o. B. d. A. $s_{3jk} = s_3$ für $j = 1, 2, \ldots, l_3$; $k = 1, 2, \ldots, l_{3j}$. Es möge S_{jkl} ($l = 1, 2, \ldots, l_{3jk}$) die Teilmengen von $S \setminus S_j \setminus S_{jk}$ aus s_3 Elementen mit echtem gemeinsamen Teiler bezeichnen. ...

i) Der i-te Schritt ergibt Teilmengen $S_{k_1 \ldots k_i}$ von $S \setminus S_{k_1} \setminus S_{k_1 k_2} \setminus \ldots \setminus S_{k_1 \ldots k_{i-1}}$ mit s_i Elementen, deren größter gemeinsamer Teiler von 1 verschieden ist, mit $k_1 = 1, 2, \ldots, l_i$; $k_2 = 1, 2, \ldots, l_{ik_1}$; $\ldots$; $k_i = 1, 2, \ldots, l_{ik_1 \ldots k_{i-1}}$ ($l_i, l_{ik_1}, \ldots, l_{ik_1 \ldots k_{i-1}}$ jeweils möglichst groß).

Hilfssatz 1. *Das Potenzproduktideal* $\mathfrak{s}_i$, *das durch die Potenzprodukte der* x_ν *aus* $S_{k_1} \cup S_{k_1 k_2} \cup \ldots \cup S_{k_1 \ldots k_i}$ *erzeugt wird, hat die Dimension* $n-i$ ($i = 1, 2, \ldots, n-d$).

Beweis. Der Beweis wird durch vollständige Induktion nach i erbracht. Für $i=1$ erzeugt jeder Primfaktor x_ν des größten gemeinsamen Teilers der s_1 Elemente der Menge S_j ein zu $\mathfrak{s}_1$ gehöriges isoliertes Primideal (Satz 12/14), mithin hat $\mathfrak{s}_1$ die Dimension $n-1$. — Es sei $i>1$ und $\operatorname{Dim} \mathfrak{s}_{i-1} = n-(i-1)$. Wir nehmen an, es gälte $\operatorname{Dim} \mathfrak{s}_i = n-(i-1)$. Dann gäbe es ein $(n-i+1)$-dimensionales Primideal, das zu $\mathfrak{s}_i$ gehört, etwa $\mathfrak{p}=(x_1, \ldots, x_{i-1})$. Auf Grund der Konstruktion des Ideals $\mathfrak{s}_i$ gehört das Primideal nach Satz 12 und 14 auch zu $\mathfrak{s}_{i-1}$ und enthält schon sämtliche Elemente der Menge $S_{k_1 \ldots k_i}$. Bezeichnen wir den größten gemeinsamen Teiler der s_1 Elemente von S_{k_1} mit p_1, den g. g. T. der s_2 Elemente aus $S_{k_1 k_2}$ mit $p_2, \ldots$, den g. g. T. der s_i Elemente aus $S_{k_1 \ldots k_i}$ mit p_i, so sind nach Konstruktion von $\mathfrak{s}_{i-1}$ diese Potenzprodukte $p_1, p_2, \ldots, p_{i-1}$ in dem zu $\mathfrak{s}_{i-1}$ gehörigen Primideal $\mathfrak{p}$ maximaler Dimension enthalten. Wegen $\langle p_i, p_k \rangle = 1$ für $k=1, 2, \ldots, i-1$ kann dann aber $\mathfrak{s}_i \subset \mathfrak{p}$ nicht gelten, q.e.d.

Beim $(n-d)$-ten Schritt ist S erschöpft. Es gilt

$$\mathfrak{s}_{n-d}=\mathfrak{a}; \quad S = S_{k_1} \cup S_{k_1 k_2} \cup \ldots \cup S_{k_1 k_2 \ldots k_{n-d}}$$

mit

$$k_1=1, 2, \ldots, l_{n-d};\ k_2=1, 2, \ldots, l_{n-dk_1}; \ldots; k_{n-d}=1, 2, \ldots, l_{n-dk_1 \ldots k_{n-d-1}}.$$

Bezeichnen wir die Elemente von S_{k_1} mit $q_1', \ldots, q_{s_1}'$, die von $S_{k_1 k_2}$ mit $q_{s_1+1}', \ldots$ $\ldots, q_{s_1+s_2}', \ldots$, so erniedrigt sich in der Kette

$$(q_1') \subset (q_1', q_2') \subset \cdots \subset (q_1', q_2', \ldots, q_s') = \mathfrak{a}$$

die Dimension möglichst langsam.

Wie Satz 18 zeigte, sind diejenigen Potenzproduktideale $\mathfrak{a}$, für welche $s_1, s_2, \ldots, s_r$ gleich 1 sind, gerade die Potenzproduktideale der Hauptklasse.

Beispiel 8. Es sei $n=4$ und

$$\mathfrak{a}=(x_1 x_2, x_1 x_3, x_2 x_3, x_2 x_4, x_3 x_4)=(x_2, x_3) \cap (x_1, x_2, x_4) \cap (x_1, x_3, x_4).$$

Hier ist $s_1=3$ und $l_1=2$, denn $S_1=\{x_1 x_2, x_2 x_3, x_2 x_4\}$ ist durch x_2 teilbar, $S_2= =\{x_1 x_3, x_2 x_3, x_3 x_4\}$ durch x_3. Weiter ist $S_{11}=\{x_1 x_3, x_3 x_4\}=S \setminus S_1$ und $S_{21}= =\{x_1 x_2, x_2 x_4\}=S \setminus S_2$; also bricht das Verfahren bereits ab. In den Teilerketten

$$(x_1 x_2) \subset (x_1 x_2, x_2 x_3) \subset (x_1 x_2, x_2 x_3, x_2 x_4) \subset$$

$$\subset (x_1 x_2, x_2 x_3, x_2 x_4, x_1 x_3) \subset (x_1 x_2, x_2 x_3, x_2 x_4, x_1 x_3, x_3 x_4)=\mathfrak{a}$$

und

$$(x_1 x_3) \subset (x_1 x_3, x_2 x_3) \subset (x_1 x_3, x_2 x_3, x_3 x_4) \subset$$

$$\subset (x_1 x_3, x_2 x_3, x_3 x_4, x_1 x_2) \subset (x_1 x_3, x_2 x_3, x_3 x_4, x_1 x_2, x_2 x_4)=\mathfrak{a}$$

erniedrigt sich die Dimension von Glied zu Glied möglichst langsam; die Dimensionszahlen sind jeweils 3, 3, 3, 2, 2. Dagegen hat das Ideal $(x_1 x_2, x_3 x_4)$ bereits die Dimension 2.

§ 6. Erweiterungs-, Verengungs- und Grundideale von Potenzproduktidealen

Es sei $\mathfrak{a}=(p_1, p_2, \ldots, p_s)$ ein Potenzproduktideal aus dem Polynomring $R=K[x_1, \ldots, x_n]$. Es bezeichne $\mathfrak{e}$ das Ideal, welches die Potenzprodukte $p_1, p_2, \ldots, p_s$ in einem umfassenden kommutativen Ring $S\supset R$ erzeugen.

$$\mathfrak{e}=\mathfrak{a}S=(p_1, p_2, \ldots, p_s)\subset S$$

heißt das Erweiterungsideal von $\mathfrak{a}$ in S ([5], Seite 18). Es ist ein Potenzproduktideal.

Bezeichnet $\mathfrak{b}=(q_1, q_2, \ldots, q_t)$ ein beliebiges Potenzproduktideal aus dem Polynomring S und ist T ein Unterring von S, so heißt das Ideal $\mathfrak{v} = \mathfrak{b}\cap T$ das Verengungsideal von $\mathfrak{b}$ hinsichtlich T ([5], Seite 18). Das Verengungsideal $\mathfrak{v}$ besteht aus sämtlichen Polynomen F aus T, die sich als Summe $F = G_1 q_1 + \cdots + G_t q_t$ darstellen lassen $(G_1, \ldots, G_t \in S)$. Liegt kein q_i in T, so ist $\mathfrak{v}$ das Nullideal. Gilt $q_i\in T$ für $i=1, 2, \ldots, t_1$ und für die übrigen q_i nicht, so ist $\mathfrak{v}=(q_1, q_2, \ldots, q_{t_1})$.

Es sei $\mathfrak{v}$ das Verengungsideal des Ideals $\mathfrak{b}$ aus S hinsichtlich T. Sein Erweiterungsideal $\mathfrak{w}$ in S heißt das Zurückleitungsideal des Ideals $\mathfrak{b}$ hinsichtlich T, $\mathfrak{w} = (\mathfrak{b}\cap T)S$. Es gilt $\mathfrak{w}\subseteqq\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{w}=(q_1, q_2, \ldots, q_{t_1})$ bzw. $\mathfrak{w}=(0)$. Folglich stimmt $\mathfrak{b}$ genau dann mit seinem Zurückleitungsideal bezüglich T überein, wenn sämtliche Elemente seiner unverkürzbaren Potenzproduktbasis in T enthalten sind.

Bezeichnet $\mathfrak{e}$ das Erweiterungsideal des Ideals $\mathfrak{a}$ aus T in S, so heißt sein Verengungsideal $\mathfrak{z}$ in T das Zurückleitungsideal von $\mathfrak{a}$ hinsichtlich S, $\mathfrak{z} = \mathfrak{a}S\cap T$. Es gilt $\mathfrak{z}\supseteqq\mathfrak{a}$. Eine Basis für $\mathfrak{z}$ liefert

Satz 20. *Es sei* $\mathfrak{a}=(p_1, p_2, \ldots, p_s)$ *ein Potenzproduktideal aus* $R=K[x_1, \ldots, x_n]$, *und es gälte*

$$p_k=q_k r_k \quad \textit{mit} \quad q_k\in K[x_1, \ldots, x_i] \quad \textit{und} \quad r_k\in K[x_{i+1}, \ldots, x_n]$$

für $k=1, 2, \ldots, s$ *mit* $1\leqq i\leqq n$. *Werden* $x_{i+1}, \ldots, x_n$ *zum Grundkörper* K *adjungiert, so ist das Zurückleitungsideal* $\mathfrak{z}$ *von* $\mathfrak{a}$ *hinsichtlich* $S \doteq K(x_{i+1}, \ldots, x_n)[x_1, \ldots, x_i]$ *das Potenzproduktideal* $\mathfrak{z}=(q_1, q_2, \ldots, q_s)$.

Die Angabe eines Beweises erübrigt sich.

Wir wenden uns nun den Grundidealen zu; die hier angegebenen Definitionen 3 und 4 stammen vom Mitverfasser.

Definition 3. *Wir betrachten sämtliche Kombinationen der n Elemente* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *zur i-ten Klasse (ohne Wiederholung und ohne Berücksichtigung der Anordnung) und bezeichnen diese mit* $\mathfrak{x}_{ik}$, *so daß*

$$\{\mathfrak{x}_{ik}, \mathfrak{x}_{n-i\,n-k}\} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} (k = 1, 2, \ldots, N_i = \binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}.$$

wird. Bezüglich einer solchen Kombination $\mathfrak{x}_{ik}$ *heißt das Zurückleitungsideal*

$$\mathfrak{g}_{ik}(\mathfrak{a}) \doteq \mathfrak{a}K(\mathfrak{x}_{ik})[\mathfrak{x}_{n-i\,n-k}]\cap K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$$

das i-te relative Grundideal des Polynomideals $\mathfrak{a}$.

Die folgenden Hilfssätze und Satz 21 gelten auch für beliebige *Polynomideale*, wie vom Mitverfasser in einer späteren Publikation gezeigt werden wird.

Hilfssatz 2. *Ist* $\mathfrak{q}$ *ein primäres Potenzproduktideal der Dimension* $n-r$, *so gilt*

$$\mathfrak{g}_{ik}(\mathfrak{q})=\begin{cases}\mathfrak{q} & \text{für} \quad i=r,\ldots,n \quad \text{und} \quad \mathfrak{q}\cap K[\mathfrak{x}_{ik}]=(0);\\ (1) & \text{für} \quad i=r,\ldots,n \quad \text{und} \quad \mathfrak{q}\cap K[\mathfrak{x}_{ik}]\neq(0);\\ (1) & \text{für} \quad i=0,\ldots,r-1.\end{cases}$$

Beweis. Wenn $0\leqq i<r$ ist, muß wegen $\operatorname{Dim}\mathfrak{q} < n-i$ der Durchschnitt $\mathfrak{q}\cap K[\mathfrak{x}_{ik}]$ vom Nullideal verschieden sein. In diesem Fall folgt $\mathfrak{g}_{ik}(\mathfrak{q})=(1)$. Damit sind die letzten zwei Teilbehauptungen des Hilfssatzes bewiesen. — Gilt $\mathfrak{q}\cap K[\mathfrak{x}_{ik}]=(0)$, so liegt wegen Satz 10 kein Element der unverkürzbaren Potenzproduktbasis des zu $\mathfrak{q}$ gehörenden Primideals in $K[\mathfrak{x}_{ik}]$. Aus Satz 20 folgt dann die Behauptung.

Aus diesem Hilfssatz folgt unmittelbar

Hilfssatz 3. *Ist* $\mathfrak{q}$ *ein primäres Potenzproduktideal der Dimension* $n-r$, *so gilt*

$$\bigcap_{k=1}^{N_i}\mathfrak{g}_{ik}(\mathfrak{q})=\begin{cases}\mathfrak{q} & \text{für} \quad i=r,r+1,\ldots,n;\\ (1) & \text{für} \quad i=0,1,\ldots,r-1.\end{cases}$$

Weiter ergibt sich

Hilfssatz 4. *Für relative Grundideale von primären Potenzproduktidealen* $\mathfrak{q}_1,\mathfrak{q}_2,\ldots$ $\ldots,\mathfrak{q}_s$ *ist*

$$\mathfrak{g}_{ik}\left(\bigcap_{j=1}^{s}\mathfrak{q}_j\right)=\bigcap_{j=1}^{s}\mathfrak{g}_{ik}(\mathfrak{q}_j). \tag{8}$$

Beweis. Entweder gilt $\left(\bigcap_{j=1}^{s}\mathfrak{q}_j\right)\cap K[x_{ik}]\neq(0)$ oder $=(0)$ $(s>0)$. Im ersten Fall ist die linke Seite von (8) das Einheitsideal. Es folgt aus Satz 3′, daß die Menge $\mathfrak{x}_{ik}$ aus jedem der zu den $\mathfrak{q}_j$ gehörigen Primideale mindestens ein Basiselement x_ν enthalten muß. Daraus ergibt sich $\mathfrak{g}_{ik}(\mathfrak{q}_j)=(1)$ für $j=1,2,\ldots,s$.

Im zweiten Fall darf angenommen werden, daß die Elemente der Menge $\mathfrak{x}_{ik}$ aus in bezug auf $\mathfrak{q}_1,\mathfrak{q}_2,\ldots,\mathfrak{q}_t$ $(t\leqq s)$ algebraisch unabhängigen und bezüglich $\mathfrak{q}_{t+1},\ldots,\mathfrak{q}_s$ abhängigen Variablen besteht. Es ist $t>0$, da sonst wegen Satz 3 $\bigcap_{j=1}^{s}\mathfrak{q}_j\cap$ $\cap K[\mathfrak{x}_{ik}]\neq(0)$ wäre. Aus $\mathfrak{q}_j\cap K[\mathfrak{x}_{ik}]=(0)$ für $j=1,2,\ldots,t$ folgt, daß die Elemente der unverkürzbaren Potenzproduktbasis des Ideals $\mathfrak{q}_j$ und natürlich auch die des Durchschnitts $\bigcap_1^t\mathfrak{q}_j$ in $K[\mathfrak{x}_{n-i\,n-k}]$ liegen (Satz 10). Also gilt

$$\mathfrak{g}_{ik}\left(\bigcap_1^t\mathfrak{q}_j\right)=\bigcap_1^t\mathfrak{q}_j=\bigcap_{j=1}^{s}\mathfrak{g}_{ik}(\mathfrak{q}_j),$$

letzteres folgt aus Hilfssatz 2. Andererseits gilt wegen $\bigcap_{t+1}^{s}\mathfrak{q}_j\cap K[\mathfrak{x}_{ik}]\neq(0)$

$$\mathfrak{g}_{ik}\left(\bigcap_1^s\mathfrak{q}_j\right)=\mathfrak{g}_{ik}\left(\bigcap_1^t\mathfrak{q}_j\right).$$

Daraus folgt die Behauptung.

Eine unmittelbare Folgerung ist

Hilfssatz 5. *Für relative Grundideale gilt, wenn* $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_s$ *primäre Potenzproduktideale bezeichnen, die Regel*

$$\bigcap_{k=1}^{N_i} \mathfrak{g}_{ik}\left(\bigcap_{j=1}^{s} \mathfrak{q}_j\right) = \bigcap_{j=1}^{s} \bigcap_{k=1}^{N_i} \mathfrak{g}_{ik}(\mathfrak{q}_j).$$

Jetzt können wir das i-te Grundideal definieren.

Definition 4. *Es seien* $\mathfrak{g}_{ik}(\mathfrak{a})$ $(k=1, 2, \ldots, N_i)$ *die relativen Grundideale eines Polynomideals* $\mathfrak{a}$ *aus* $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. *Das i-te Grundideal von* $\mathfrak{a}$ *ist der Durchschnitt der relativen Grundideale* $\mathfrak{g}_{ik}(\mathfrak{a})$ *und wird bezeichnet durch*

$$\mathfrak{g}_i(\mathfrak{a}) = \bigcap_{k=1}^{N_i} \mathfrak{g}_{ik}(\mathfrak{a}).$$

Nach Hilfssatz 3 gilt für primäre Potenzproduktideale $\mathfrak{q}$ der Dimension $n-r$

$$\mathfrak{g}_i(\mathfrak{q}) = \begin{cases} \mathfrak{q} & \text{für} \quad i = r,\ r+1, \ldots, n; \\ (1) & \text{für} \quad i = 0, 1, \ldots, r-1. \end{cases}$$

Definition 5 (G. Hermann). *Es sei* $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_t$ *eine unverkürzbare Darstellung des Polynomideals* $\mathfrak{a}$ *aus* $K[x_1, \ldots, x_n]$ *durch Primärideale* $\mathfrak{q}_j$, *und* $\mathfrak{k}_m$ *bezeichne den Durchschnitt der Primärideale der Dimension* $n-m$ $(m=1, 2, \ldots, n)$, *also ist* $\mathfrak{a} = \mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{k}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{k}_n$. *Das i-te Grundideal ist durch*

$$\mathfrak{g}_i(\mathfrak{a}) = \mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{k}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{k}_i \qquad (i=1, 2, \ldots, n) \quad \textit{bzw.} \quad \mathfrak{g}_0(\mathfrak{a}) = (1)$$

definiert.

Satz 21. *Die Definitionen 4 und 5 sind für Potenzproduktideale äquivalent.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß aus Definition 4 die Definition 5 folgt. Hat $\mathfrak{a}$ die Dimension $n-r$, so sei

$$\mathfrak{a} = (\mathfrak{q}_{r1} \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_{rs_r}) \cap \ldots \cap (\mathfrak{q}_{n1} \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_{ns_n})$$

eine unverkürzbare Darstellung von $\mathfrak{a}$ durch größte Primärkomponenten $\mathfrak{q}_{ij}$, wobei $\operatorname{Dim} \mathfrak{q}_{ij} = n-i$ ist für $j=1, \ldots, s_i$; $i=0, 1, \ldots, n-r$; es ist also $\mathfrak{k}_i = \mathfrak{q}_{i1} \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_{is_i}$ und $\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{k}_2 = \cdots = \mathfrak{k}_{r-1} = (1)$. Aus Hilfssatz 5 folgt dann

$$\mathfrak{g}_i(\mathfrak{a}) = \bigcap_{k=1}^{N_i} \mathfrak{g}_{ik}(\mathfrak{a}) = \left(\bigcap_{k=1}^{N_i} \mathfrak{g}_{ik}(\mathfrak{q}_{r1})\right) \cap \ldots \cap \left(\bigcap_{k=1}^{N_i} \mathfrak{g}_{ik}(\mathfrak{q}_{rs_r})\right) \cap \ldots$$
$$\ldots \cap \left(\bigcap_{k=1}^{N_i} \mathfrak{g}_{ik}(\mathfrak{q}_{n1})\right) \cap \ldots \cap \left(\bigcap_{k=1}^{N_i} \mathfrak{g}_{ik}(\mathfrak{q}_{ns_n})\right),$$

und weiter nach Hilfssatz 3 für $i=0, 1, \ldots, r-1$ gerade $\mathfrak{g}_i(\mathfrak{a}) = (1)$, für $i=r, r+1, \ldots, n$ jedoch

$$\mathfrak{g}_i(\mathfrak{a}) = (\mathfrak{q}_{r1} \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_{rs_r}) \cap \ldots \cap (\mathfrak{q}_{i1} \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_{is_i}) \cap (1) \cap \ldots \cap (1) =$$
$$= \mathfrak{k}_r \cap \ldots \cap \mathfrak{k}_i = \mathfrak{k}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{k}_i,$$

letzteres wegen $\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{k}_2 = \cdots = \mathfrak{k}_{r-1} = (1)$. — Durch Rückwärtsschließen ergibt sich, daß aus Definition 5 auch die Definition 4 folgt.

Die Grundideale stehen also in enger Beziehung zur reduzierten Darstellung eines Ideals durch größte Primärkomponenten und zur Bestimmung der Dimension eines Ideals.

Die Definition 4 gestattet es, die zu einem Potenzproduktideal $\mathfrak{a}$ gehörigen Grundideale zu bestimmen.

Mit Hilfe des Satzes 12 erhält man deren reduzierte Darstellungen durch größte primäre Potenzproduktideale. So kann man sukzessiv sämtliche zu $\mathfrak{a}$ gehörigen Primärkomponenten für eine reduzierte Darstellung konstruieren, denn es gilt $\mathfrak{g}_k(\mathfrak{a}) = \mathfrak{g}_{k-1}(\mathfrak{a}) \cap \mathfrak{k}_k$ $(k=1, 2, \dots, n)$. Dieser Weg wird sich vor allem dann als zweckmäßig erweisen, wenn die Anzahl der Basispotenzprodukte und auch die Variablenzahl sehr groß sind oder wenn man nur die Primärkomponenten größter Dimension bestimmen will.

Ist $\mathfrak{a}$ ein $(n-r)$-dimensionales Potenzproduktideal, $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_t$, $r_1 = \max\{\text{Rang}\, \mathfrak{q}_j\}$, so gilt

$$\mathfrak{g}_i(\mathfrak{a}) = (1) \quad \text{für} \quad i = 0, 1, \dots, r_1 - 1;$$
$$\mathfrak{g}_r(\mathfrak{a}) \neq (1);$$
$$\mathfrak{g}_i(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a} \quad \text{für} \quad i = r_1,\ r_1 + 1, \dots, n.$$

Die zu $\mathfrak{a}$ gehörigen Primärkomponenten größter Dimension sind die Komponenten der reduzierten Darstellung des ungemischten Ideals $\mathfrak{g}_r(\mathfrak{a})$. Ist $\text{Dim}\, \mathfrak{a} = n - r$, so ist die Aussage $\mathfrak{g}_r(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$ gleichbedeutend damit, daß $\mathfrak{a}$ ungemischt ist.

Auch G. Hermann benutzt in [4] die Grundideale, um zu unverkürzbaren Darstellungen durch größte Primärkomponenten zu gelangen. Es gilt nämlich der Satz: Ist $\mathfrak{p}_{rj}$ ein zu $\mathfrak{a}$ gehöriges Primideal der Dimension $n-r$ und ist $\mathfrak{q}$ irgendein zu $\mathfrak{p}_{rj}$ gehöriges Primärideal vom Exponenten ϱ_0, das in einer Darstellung von $\mathfrak{a}$ auftreten kann, so auch $\mathfrak{g}_r(\mathfrak{a}, \mathfrak{p}_{rj}^{\varrho})$ für jedes $\varrho \geqq \varrho_0$ (vgl. [4], Seite 786; Beweis in [10], Seite 160 f.). Nach diesem Satz wurde die zweite (nicht reduzierte) Zerlegung im Beispiel 3 berechnet; hieraus folgt als Nebenergebnis, daß die nach der Methode von G. Hermann gewonnenen Darstellungen nicht reduziert zu sein brauchen.

Beispiel 9. Es sei $n=4$ und

$$\mathfrak{a} = (x_1^2 x_2, x_1^2 x_4, x_1 x_3, x_2^2, x_2 x_3).$$

Aus $\mathfrak{a} \cap K[x_2] \neq (0)$ und $\mathfrak{a}K(x_1, x_3, x_4)[x_2] \cap R = (1)$ folgt $\mathfrak{g}_1(\mathfrak{a}) = (1)$. Weiter ist $\mathfrak{a}K(x_i, x_j)[x_k, x_l] \cap R = (1)$ für $(i, j) = (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)$, jedoch $\mathfrak{a}K(x_3, x_4)[x_1, x_2] \cap R = (x_1, x_2)$, also gilt

$$\mathfrak{g}_2(\mathfrak{a}) = (x_1, x_2)$$

und $\text{Dim}\, \mathfrak{a} = n - 2 = 2$. — Zur Bestimmung von $\mathfrak{g}_3(\mathfrak{a})$ bilden wir

$$\mathfrak{a}K(x_1)[x_2, x_3, x_4] \cap R = (x_2, x_3, x_4),$$
$$\mathfrak{a}K(x_2)[x_1, x_3, x_4] \cap R = (1),$$
$$\mathfrak{a}K(x_3)[x_1, x_2, x_4] \cap R = (x_1, x_2),$$
$$\mathfrak{a}K(x_4)[x_1, x_2, x_3] \cap R = (x_1^2, x_1 x_3, x_2^2, x_2 x_3) = (x_1, x_2) \cap (x_1^2, x_2^2, x_3).$$

Also ist

$$\mathfrak{g}_3(\mathfrak{a}) = (x_1, x_2) \cap (x_2, x_3, x_4) \cap (x_1^2, x_2^2, x_3) = \mathfrak{a},$$

und wir haben zugleich eine reduzierte Darstellung des Ideals $\mathfrak{a}$ konstruiert.

§ 7. Die Berechnung der Hilbertfunktion für Potenzproduktideale

Die Hilbertfunktion $H(t; \mathfrak{a})$ eines Potenzproduktideals $\mathfrak{a}$ aus $K[x_0, x_1, \dots, x_n]$ gibt die Anzahl derjenigen Potenzprodukte der x_ν vom Grade t in $K[x_0, x_1, \dots, x_n]$ an, welche nicht in $\mathfrak{a}$ enthalten sind. $H(t; \mathfrak{a})$ ist für jedes H-Ideal $\mathfrak{a} \subset K[x_0, x_1, \dots, x_n]$ für hinreichend große Werte t ein ganzwertiges Polynom in t, dessen Grad gleich der Dimension von $\mathfrak{a}$ ist

$$H(t; \mathfrak{a}) = h_0 \binom{t}{d} + h_1 \binom{t}{d-1} + \cdots + h_d$$

mit ganzrationalen Koeffizienten $h_0, h_1, \dots, h_d$. Dies besagt der Hilbertsche Satz. Der Koeffizient $h_0 = h_0(\mathfrak{a})$ heißt die *Ordnung* von $\mathfrak{a}$ (vgl. [2], Seite 161).

Es sei $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Potenzproduktideal, $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \dots, \mathfrak{q}_t$ seien die zu $\mathfrak{a}$ gehörigen primären Potenzproduktideale größter Dimension. Dann gilt ([2], Seite 165)

$$h_0(\mathfrak{a}) = h_0(\mathfrak{q}_1) + h_0(\mathfrak{q}_2) + \cdots + h_0(\mathfrak{q}_t),$$

und die Ordnungen $h_0(\mathfrak{q}_i)$ der Primärideale $\mathfrak{q}_i$ können nach Satz 16 konstruktiv bestimmt werden ($i = 1, 2, \dots, t$), wonach man die Ordnung des Potenzproduktideals $\mathfrak{a}$ erhält.

Jetzt soll die Formel

$$H(t; \mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = H(t; \mathfrak{a}) + H(t; \mathfrak{b}) - H(t; \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \tag{9}$$

für Potenzproduktideale verallgemeinert werden, so daß sich dann leicht eine Formel für $H(t; \mathfrak{a})$ herleiten läßt,

Satz 22. *Es seien $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots, \mathfrak{a}_s$ beliebige Potenzproduktideale. Für die Hilbertfunktion der Idealsumme gilt*

$$H\left(t; \sum_{k=1}^{s} \mathfrak{a}_k\right) = \sum_{k=1}^{s} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqq i_1 \leqq i_2 \leqq \dots \leqq i_k \leqq s} H(t; [\mathfrak{a}_{i_1} \cap \mathfrak{a}_{i_2} \cap \dots \cap \mathfrak{a}_{i_k}]).$$

Beweis. Wir führen den Beweis dieses Satzes durch vollständigen Induktionsschluß nach der Anzahl der Summanden. Für $s = 1, 2$ ist die Behauptung richtig.

Es gilt $\mathfrak{s} = \sum_{k=1}^{s} \mathfrak{a}_k = \mathfrak{s}' + \mathfrak{a}_s$ mit $\mathfrak{s}' = \mathfrak{a}_1 + \cdots + \mathfrak{a}_{s-1}$ für $s > 1$. Im Zusammenhang mit Satz 3 erhalten wir aus der Regel (9)

$$H(t; \mathfrak{s}) = H(t; \mathfrak{s}') + H(t; \mathfrak{a}_s) - H\left(t; \sum_{k=1}^{s-1} (\mathfrak{a}_k \cap \mathfrak{a}_s)\right).$$

Nach der Induktionsvoraussetzung ergibt sich

$$H(t; \mathfrak{s}) = \sum_{k=1}^{s-1} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqq i_1 \leqq i_2 \leqq \dots \leqq i_k \leqq s-1} H(t; [\mathfrak{a}_{i_1} \cap \dots \cap \mathfrak{a}_{i_k}]) +$$

$$+ H(t; \mathfrak{a}_s) + \sum_{k=1}^{s-1} (-1)^k \sum_{1 \leqq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqq s-1} H(t; [\mathfrak{a}_{i_1} \cap \dots \cap \mathfrak{a}_{i_k} \cap \mathfrak{a}_s]),$$

woraus unmittelbar die Behauptung des Satzes 22 folgt. — Diese gilt in der Klasse der H-Ideale, für die $\mathfrak{a} \cap (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) + (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{c})$ ist, ebenfalls.

Satz 23. *Es sei* $\mathfrak{a}$ *ein Potenzproduktideal aus* $K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$, $q_1, q_2, \ldots, q_s$ *sei seine (unverkürzbare) Potenzproduktbasis, und* $g_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ *bezeichen den Grad des k. g. V.* $[q_{i_1}, q_{i_2}, \ldots, q_{i_k}]$. *Dann gilt für positive* $t \geqq g_{12\ldots s} - n$

$$H(t; \mathfrak{a}) = \binom{t+n}{n} + \sum_{k=1}^{s} (-1)^k \sum_{1 \leqq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqq s} \binom{t+n-g_{i_1 i_2 \ldots i_k}}{n} =$$

$$= \binom{t+n}{n} - \sum_{i=1}^{s} \binom{t+n-g_i}{n} + \sum_{1 \leqq i < k \leqq s} \binom{t+n-g_{ik}}{n} + \cdots + (-1)^s \binom{t+n-g_{12\ldots s}}{n}.$$

Beweis. Für $\mathfrak{a}_i = (q_i)$ erhält man aus Satz 22 wegen $H(t; (F)) = \binom{t+n}{n} - \binom{t+n-g}{n}$ für jede Form F des Grades g für $t \geqq g-n$ und wegen $H(t; ([\mathfrak{a}_{i_1} \cap \mathfrak{a}_{i_2} \cap \ldots \cap \mathfrak{a}_{i_k}])) = H(t; ([q_{i_1}, q_{i_2}, \ldots, q_{i_k}]))$ die Relation

$$H(t; \mathfrak{a}) = \sum_{k=1}^{s} (-1)^{k-1} \binom{s}{k} \binom{t+n}{n} + \sum_{k=1}^{s} (-1)^k \sum_{1 \leqq i_1 < \ldots < i_k \leqq s} \binom{t+n-g_{i_1 \ldots i_k}}{n}$$

für positive $t \geqq g_{12\ldots s} - n$. Nach dem Binomialsatz ist $\sum_{k=0}^{s} (-1)^k \binom{s}{k} = (1-1)^s = 0$, folglich ist der Koeffizient von $\binom{t+n}{n}$ gleich 1. So geht die Formel in die behauptete Gestalt über, q.e.d.

Eine ähnliche Formel hat W. Gröbner angegeben ([2], Seite 197). Sie erfordert aber die Kenntnis der Syzygienkette des H-Ideals $\mathfrak{a}$.

Aus der Arbeit [9] von E. Sperner kann man den folgenden Satz leicht herleiten:

Es sei $\mathfrak{a} = (F_1, F_2, \ldots, F_s)$ ein beliebiges H-Ideal aus $K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$, und es bezeichne m den maximalen Grad der Basisformen $F_1, F_2, \ldots, F_s$. Der Modul der Formen aus $\mathfrak{a}$ vom Grade T für ein beliebiges aber festes $T \geqq m$ bildet das sogenannte „abgeleitete" Ideal $\mathfrak{a}_T$. Für dieses gilt

$$H(t; \mathfrak{a}_T) = H(t; \mathfrak{a}) \quad \text{für} \quad t \geqq T.$$

Werden in den Basisformen des abgeleiteten Ideals $\mathfrak{a}_T$ die Potenzprodukte der x_ν lexikographisch geordnet und wird die Minimalbasis so gewählt, daß keine zwei Basisformen mit demselben lexikographisch kleinsten Potenzprodukt beginnen, so gilt für das durch diese ersten Potenzprodukte erzeugte Potenzproduktideal $\mathfrak{b}_T$

$$H(t; \mathfrak{a}) = H(t; \mathfrak{a}_T) \leqq H(t; \mathfrak{b}_T) \quad \text{für} \quad t \geqq T,$$

und es gibt eine wohlbestimmte natürliche Zahl t_0, so daß für das Potenzproduktideal $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_{t_0}$

$$H(t; \mathfrak{a}) = H(t; \mathfrak{b}) \quad \text{für} \quad t \geqq t_0 \tag{10}$$

gilt.

Ist für ein H-Ideal $\mathfrak{a}$ die Zahl t_0 bekannt, so kann ein Potenzproduktideal $\mathfrak{b}$ konstruiert und für dieses mit Hilfe des Satzes 23 die Hilbertfunktion berechnet werden, die nach (10) gleich des Polynomideals $\mathfrak{a}$ ist.

Abschließend soll ein Beispiel zum Satz 23 angegeben werden

Beispiel 10. Es sei $n=2$ und

$$\mathfrak{a}=(x_1^2, x_2^3, x_1 x_2),$$

also $q_1=x_1^2$, $q_2=x_2^3$, $q_3=x_1 x_2$. Mit den Bezeichnungen des Satzes 23 ist dann $g_1=2$, $g_2=3$, $g_3=2$; $g_{12}=5$, $g_{13}=3$, $g_{23}=4$; $g_{123}=5$. Die Formel des Satzes 23 liefert

$$H(t;\mathfrak{a}) = \binom{t+2}{2} - 2\binom{t+2-2}{2} - \binom{t+2-3}{2} + \binom{t+2-5}{2} +$$

$$+\binom{t+2-3}{2} + \binom{t+2-4}{2} - \binom{t+2-5}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}(t^2+3t+2-2t^2+2t+t^2-5t+6) = 4 \quad \text{für} \quad t \geqq 3.$$

In der Tat sind für $t \geqq 2$ die vier Potenzprodukte x_0^t, $x_0^{t-1}x_1$, $x_0^{t-1}x_2$, $x_0^{t-2}x_2^2$ nicht in $\mathfrak{a}$ enthalten.

§ 8. Zur Syzygientheorie für Potenzproduktideale

Es seien $U=(a_{ik})$ und $V=(a_k)$ Matrizen vom Typ $r \times s$ bzw. $s \times 1$, deren Elemente Formen aus dem H-Ring $K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ sind. Gilt

$$U \cdot V = O,$$

so heißt der Spaltenvektor V eine rechte *Syzygie* der Matrix U. Bezeichnet g_{ik} bzw. g_k den Grad des Elementes a_{ik} bzw. a_k von U bzw. V, so gilt (vgl. [2], Seite 185—189)

$$g_{ik} = g_{1k}+g_{i1}-g_{11} \quad \text{und} \quad g_{ik}-g_{11} = g_1-g_k.$$

Die Gesamtheit der Syzygien der Matrix U bildet einen Vektormodul, den (rechten) *Syzygienmodul* von U. Dieser besitzt eine endliche Basis, deren Elemente, als Spaltenvektoren nebeneinandergeschrieben, eine Matrix V_{st} bilden. (Ein Vektormodul werde kurz mit demselben Buchstaben wie diese Minimalbasis bezeichnet.)

Fassen wir die Minimalbasis U^1 des H-Ideals $\mathfrak{a}$ als Basis eines Vektormoduls auf, so ist ihr (rechter) Syzygienmodul U^2 wohl bestimmt. Wenn dieser nicht verschwindet, ist dessen (rechter) Syzygienmodul zu konstruieren usw. Wir erhalten eine Reihe von Matrizen, eine Syzygienkette. Die Anzahl der Glieder der Syzygienkette ist endlich, sie werde mit k bezeichnet; dann ist

$$U^1, U^2, \ldots, U^k$$

die Syzygienkette des H-Ideals $\mathfrak{a}$ der Länge k. Es gilt stets $k \leqq n+1$; es ist $k = n+1$ genau dann, wenn das Ideal $\mathfrak{a}$ eine triviale Komponente besitzt. Gehört zu $\mathfrak{a}$ ein Primideal vom Rang r, so hat die Syzygienkette von $\mathfrak{a}$ mindestens r Glieder. Besitzt die Syzygienkette des Ideals $\mathfrak{a}$ die Länge k und gilt für eine Form F

$$\mathfrak{a}:(F) = \mathfrak{a},$$

so besteht die Syzygienkette des Ideals $(\mathfrak{a}, F)$ aus genau $k+1$ Gliedern. ([2], Seite 190—196).

Auf Grund dieser Aussagen sind die folgenden beiden Definitionen äquivalent.

1. Ein H-Ideal $\mathfrak{a}$ heißt *perfekt*, wenn die Länge seiner Syzygienkette gleich dem Rang des Ideals $\mathfrak{a}$ ist.

2. Ist $\mathfrak{a}$ ein d-dimensionales H-Ideal aus $K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ und gibt es d Formen $F_1, F_2, \ldots, F_d$ derart, daß

$$\mathfrak{a}:(F_1) = \mathfrak{a}; \quad (\mathfrak{a}, F_1):(F_2) = (\mathfrak{a}, F_1); \ldots; \quad (\mathfrak{a}, F_1, \ldots, F_{d-1}):(F_d) = \\ = (\mathfrak{a}, F_1, \ldots, F_{d-1})$$

gilt und $(\mathfrak{a}, F_1, F_2, \ldots, F_d)$ ein ungemischtes nulldimensionales H-Ideal ist, so heißt $\mathfrak{a}$ *perfekt*. ([2], Seite 197 bzw. 199).

Jedes perfekte H-Ideal ist ungemischt. Zwar ist jedes H-Ideal der Hauptklasse perfekt ([2], Seite 191), aber nicht jedes ungemischte H-Ideal ist schon perfekt. Dies wird das Beispiel 11 bestätigen.

Es sei $\mathfrak{a}$ ein primäres Potenzproduktideal. Aus Satz 10 und der obigen Definition 2 folgt leicht

Satz 24. *Jedes primäre nichttriviale Potenzproduktideal aus* $K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *ist perfekt.*

Beweis. Es bezeichne $\mathfrak{q}$ ein primäres Potenzproduktideal und $\mathfrak{p}=(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ das zugehörige Primideal. Ist $r=n$, d. h. $\mathfrak{q}$ von Dimension 0, so ist $\mathfrak{q}$ nach der obigen Definition perfekt.

Die Dimension $n-r$ von $\mathfrak{q}$ sei positiv. Dann ist nach den Sätzen 5 und 10

$$\mathfrak{q}:(x_{r+1}) = \mathfrak{q}; \quad H(\mathfrak{q}, x_{r+1}):(x_{r+2}) = (\mathfrak{q}, x_{r+1}), \ldots; \\ (\mathfrak{q}, x_{r+1}, \ldots, x_{n-1}):(x_n) = (\mathfrak{q}, x_{r+1}, \ldots, x_{n-1}),$$

und das Primärideal $(\mathfrak{q}, x_{r+1}, \ldots, x_n)$ hat die Dimension 0. Folglich ist $\mathfrak{q}$ perfekt, q.e.d.

Zur Konstruktion des zweiten Syzygienmoduls für ein beliebiges Potenzproduktideal verhilft

Satz 25. *Das Potenzproduktideal* $\mathfrak{a}$ *sei durch seine unverkürzbare Potenzproduktbasis* $q_1, q_2, \ldots, q_s$ *gegeben. Dann bilden die Spalten der Matrix*

$$(11) \qquad V^2 = \begin{bmatrix} \frac{q_2}{\langle q_1, q_2\rangle} & \frac{q_3}{\langle q_1, q_3\rangle} \cdots & 0 \\ \frac{-q_1}{\langle q_1, q_2\rangle} & 0 \quad \cdots & 0 \\ 0 & \frac{-q_1}{\langle q_1, q_3\rangle} \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \quad \cdots & \frac{q_s}{\langle q_{s-1}, q_s\rangle} \\ 0 & 0 \quad \cdots & \frac{-q_{s-1}}{\langle q_{s-1}, q_s\rangle} \end{bmatrix}$$

eine Basis für den zweiten Syzygienmodul von $\mathfrak{a}$. V^2 *stellt im allgemeinen noch keine Minimalbasis dar. Durch Streichen der überflüssigen Spalten erhält man aus* V^2 *eine Minimalbasis* U^2.

Beweis. Zunächst ist klar, daß durch (11) Syzygien von $\mathfrak{a}$ gegeben sind. Es bleibt zu zeigen, daß dadurch alle Syzygien kombiniert werden können.

Ist $(F)=(F_1, F_2, \ldots, F_s)^T$ eine Syzygie zu $\mathfrak{a}=(q_1, q_2, \ldots, q_s)$, so heißt

$$\Omega \equiv F_1 q_1 + F_2 q_2 + \cdots + F_s q_s = 0 \tag{12}$$

eine „Passivitätsbedingung". Es sei irgendeine Passivitätsbedingung (12) mit $F_i = a_{i1} p_{i1} + a_{i2} p_{i2} + \cdots + a_{ik_i} p_{ik_i}$ gegeben. Die Potenzprodukte p_{ik} seien für jedes i nach ihrer lexikographischen Anordnung numeriert. Das lexikographisch kleinste Potenzprodukt der x_ν in Ω sei gleich den Produkten $p_{i1} q_i, p_{k1} q_k, p_{l1} q_l, \ldots$.

Aus $p_{i1} q_i = p_{k1} q_k$ folgt $p_{i1} q_i = t_{ik} \cdot [p_i, q_k]$. Nach (11) besteht für jedes Paar i, k eine Passivitätsbedingung

$$\Omega_{ik} \equiv \frac{q_i}{\langle q_i, q_k \rangle} q_k - \frac{q_k}{\langle q_i, q_k \rangle} q_i = 0,$$

woraus sich die Passivitätsbedingung $t_{ik} \Omega_{ik} \equiv p_{i1} q_i - p_{i2} q_k = 0$ ergibt. So entsteht aus (12) eine neue Passivitätsbedingung

$$\Omega^{(1)} \equiv \Omega - a_{i1} t_{ik} \Omega_{ik} \equiv F_1 q_1 + \cdots + F_{i-1} q_{i-1} + \tag{13}$$
$$+ (F_i - a_{i1} p_{i1}) q_i + \cdots + F_{k-1} q_{k-1} + (F_k + a_{i1} p_{k1}) q_k + \cdots + F_s q_s = 0.$$

Gilt $a_{i1} + a_{k1} = 0$ und wurde das lexikographisch klienste Potenzprodukt der x_ν in (12) allein durch die Produkte $p_{i1} q_i$ und $p_{k1} q_k$ gebildet, so ist das lexikographisch kleinste Glied in (13) größer als das in (12). Ansonsten hat (13) dasselbe kleinste Potenzprodukt wie (12), jedoch wird dieses jetzt nur noch durch die Produkte $p_{k1} q_k, p_{l1} q_l, \ldots$ gebildet. Auf (13) ist dasselbe Verfahren wie auf (12) anzuwenden und

$$\Omega^{(2)} \equiv \Omega^{(1)} - a_{k1} t_{kl} \Omega_{kl} = 0 \tag{14}$$

zu bilden. Durch Fortführung dieses Verfahrens gewinnen wir in endlich vielen Schritten eine Passivitätsbedingung, deren lexikographisch kleinstes Glied größer als dasjenige von (12) ist. Eine Weiterführung des Verfahrens ergibt schließlich eine Passivitätsbedingung $\Omega^{(r)}$, die nur noch aus zwei Gliedern besteht; für diese gilt

$$\Omega^{(r)} \equiv \Omega^{(r-1)} - a_{t1} t_{tr} \Omega_{tr} \equiv a_{r1} t_{rs} \Omega_{rs} = 0$$

und

$$\Omega^{(r+1)} \equiv \Omega^{(r)} - a_{r1} t_{rs} \Omega_{rs} \equiv 0.$$

Durch Rückwärtsschließen und sukzessives Einsetzen folgt, daß Ω als Kombination der Ω_{ik} dargestellt werden kann, q.e.d.

Folgerung aus Satz 25. *Es bezeichne* m *den Maximalgrad der Basispotenzprodukte des Potenzproduktideals* $\mathfrak{a}$. *Dann ist der Grad der durch die Basissyzygien von* $\mathfrak{a}$ *gegebenen Passivitätsbedingungen höchstens* $2m$.

Beweis. Die betr. Passivitätsbedingungen sind von der Gestalt $\Omega_{ik}=0$. Dann folgt die Behauptung.

Wie sehen die weiteren Syzygienmoduln aus? Diese mögen für $s=1$, 2 und 3 angegeben werden.

a) $s=1$: Hier ist das Potenzproduktideals $\mathfrak{a}$ ein Hauptideal, $\mathfrak{a}=(q)$, und folglich ist $U^2=0$, d. h. $\mathfrak{a}$ ist perfekt.

b) $s=2$: Für $\mathfrak{a}=(q_1, q_2)$ erhalten wir aus Satz 25 die Matrix

$$V^2 = \begin{bmatrix} \dfrac{q_2}{\langle q_1, q_2\rangle} \\ -\dfrac{q_1}{\langle q_1, q_2\rangle} \end{bmatrix} = U^2,$$

und hieraus $U^3=0$. — Jedes Potenzproduktideal mit einer Minimalbasis aus zwei Elementen besitzt eine Syzygienkette der Länge 2.

c) $s=3$: Der Satz 25 liefert für das Potenzproduktideal $\mathfrak{a}=(q_1, q_2, q_3)$ die Basis

$$V^2 = \begin{bmatrix} q_{21} & q_{31} & 0 \\ -q_{12} & 0 & q_{32} \\ 0 & -q_{13} & -q_{23} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad q_{ik} = \frac{q_i}{\langle q_i, q_k\rangle}$$

für den zweiten Syzygienmodul.

1. Fall: V^2 stellt keine Minimalbasis für U^2 dar. Die dritte Spalte sei überflüssig. Dann gibt es Formen A, B, für die

$$\begin{aligned} Aq_{21}+Bq_{31} &= 0, \\ -Aq_{12} \qquad &= q_{32}, \\ Bq_{13} &= q_{23} \end{aligned}$$

gilt. Wir erhalten die Bedingungen

$$A = -\frac{q_{32}}{q_{12}} \quad \text{und} \quad B = \frac{q_{23}}{q_{13}}. \tag{15}$$

Sind andererseits die durch (15) definierten Quotienten A und B Elemente des H-Ringes $K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$, so ist in V^2 die dritte Spalte überflüssig. Es gilt

$$U^2 = \begin{bmatrix} q_{21} & q_{31} \\ -q_{12} & 0 \\ 0 & -q_{13} \end{bmatrix}.$$

Weiter ist $U^3=0$; denn aus $U^2(F)=0$ folgt $q_{12}F=0$ und $q_{13}F=0$. Die Länge der Syzygienkette von $\mathfrak{a}$ ist in diesem Fall 2.

2. Fall: Es gilt $V^2=U^2$. Die Determinante der Matrix U^2 ist gleich Null. Es folgt $U^3\neq 0$. Wir erhalten für die Elemente F_k der rechten Syzygien der Matrix U^2 die Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned} F_1 q_{21} + F_2 q_{31} \qquad\qquad &= 0, \\ -F_1 q_{12} \qquad\quad + F_3 q_{32} &= 0. \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt $F_1 \in (q_{31}):(q_{21})$ und $F_2 \in (q_{21}):(q_{31})$, so daß nach Satz 5

$$F_1 = A \frac{q_{31}}{\langle q_{21}, q_{31}\rangle}, \quad F_2 = -A \frac{q_{32}}{\langle q_{21}, q_{31}\rangle}, \quad F_3 = A \frac{q_{12} q_{31}}{q_{32}\langle q_{21}, q_{31}\rangle},$$

letzteres ergibt sich durch Einsetzen der Ausdrücke für F_1 und F_2 in die zweite Bedingungsgleichung. Wählen wir umgekehrt A als das Potenzprodukt der x_ν kleinsten Grades, so daß der Ausdruck für F_3 ein Potenzprodukt der x_ν mit positiven Exponenten ist, so ist

$$U^3 = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

und weiter $U^4 = 0$. Die Länge der Syzygienkette ist 3.

Ein Potenzproduktideal, dessen unverkürzbare Potenzproduktbasis aus 3 Elementen q_1, q_2, q_3 besteht, besitzt eine Syzygienkette aus 2 oder 3 Gliedern. Zu jedem Syzygienmodul gehört als Minimalbasis eine Matrix, deren von 0 verschiedenen Elemente Potenzprodukte der x_ν sind. Die Länge der Syzygienkette ist genau dann gleich 2, wenn bei geeigneter Numerierung der Basiselemente q von $\mathfrak{a}$

$$\frac{q_2\langle q_1, q_3\rangle}{q_1\langle q_2, q_3\rangle} \quad \text{und} \quad \frac{q_3\langle q_1, q_2\rangle}{q_1\langle q_2, q_3\rangle} \in K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$$

gilt, z. B. für $\mathfrak{a} = (x_1 x_2, x_1^2, x_2 x_3)$, so daß dieses Ideal perfekt ist.

Zum Schluß dieses Paragraphen soll für $s=4$ die Syzygienkette eines umgemischten, jedoch nicht perfekten Potenzproduktideals angegeben werden.

Beispiel 11. Es sei $\mathfrak{a} = (x_1 x_3, x_1 x_4, x_2 x_3, x_2 x_4) = (x_1, x_2) \cap (x_3, x_4)$. Der Satz 25 liefert die Matrix

$$V^2 = \begin{bmatrix} x_4 & x_2 & x_2 x_4 & 0 & 0 & 0 \\ -x_3 & 0 & 0 & x_2 x_3 & x_2 & 0 \\ 0 & -x_1 & 0 & -x_1 x_4 & 0 & x_4 \\ 0 & 0 & -x_1 x_3 & 0 & -x_1 & -x_3 \end{bmatrix}.$$

Hieraus erhalten wir die Minimalbasis des zweiten Syzygienmoduls

$$U^2 = \begin{bmatrix} x_4 & x_2 & 0 & 0 \\ -x_3 & 0 & x_2 & 0 \\ 0 & -x_1 & 0 & x_4 \\ 0 & 0 & -x_1 & -x_3 \end{bmatrix}.$$

Jetzt suchen wir eine Basis für die Vektoren (F), die wegen $\|U\| = 0$ nur den Bedingungen

$$\begin{aligned} F_1 x_4 + F_2 x_2 \qquad\qquad &= 0, \\ F_1 x_3 \qquad - F_3 x_2 \qquad &= 0, \\ F_2 x_1 \qquad - F_4 x_3 &= 0 \end{aligned}$$

genügen müssen. Aus der ersten Gleichung folgt $F_1 = Ax_2$, $F_2 = -Ax_4$ mit $A \in K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$. Setzen wir dies in die nächsten beiden Gleichungen ein, so erhalten wir $F_3 = Ax_3$ und $F_4 = -Ax_1$. Also ist

$$U^3 = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_4 \\ x_3 \\ -x_1 \end{bmatrix}.$$

Das Potenzproduktideal $\mathfrak{a}$ ist zwar ungemischt aber nicht perfekt; denn sein Rang ist $r = 2$, und die Syzygienkette besteht aus 3 Gliedern.

Zusatz bei der Korrektur: Berichtigung zu Teil I:

Seite 93, 2. Zeile v. o.: Statt $x_2^2 x_2^2$ lies $x_2^2 x_3^2$
Seite 97, 4. Zeile v. o.: Statt $x_1^2 x_2 x_3$ lies $x_1^3 x_2 x_3$
6. Zeile v. o.: Statt $x_1^3 x_2$ lies $x_1^3 x_3$
Seite 98, 6. Zeile v. o.: Statt „endlichen" lies „endlich vielen"
8. Zeile v. o.: Statt „Idealtheorie in Ringbereichen" lies „Idealtheorie"

(Eingegangen am 24. März 1968.)