Über Gruppen mit isomorphen Subnormalteilerverbänden

Von GERHARD PAZDERSKI (Rostock)

Herrn Prof. Ladislaus Rédei
anlässlich seines 70. Geburtstages am 15. 11. 1970 in Verehrung gewidmet

Einleitung

Über die Beziehungen, die zwischen der Struktur einer Gruppe und der ihres Untergruppenverbandes bestehen, gibt es eine ausgedehnte Literatur. Dabei handelt es sich weniger um eine Anwendung verbandstheoretischer Methoden auf die Gruppentheorie, sondern mehr um eine Verwendung verbandstheoretischer Begriffe zur Klassifikation der Gruppen. Die Untersuchungsmethoden sind fast durchweg gruppentheoretischer Natur.

Bei der Betrachtung von Gruppen mit besonderen Eigenschaften erweist sich die Anpassung des Klassifikationsprinzips als zweckmäßig. Statt des ganzen Untergruppenverbandes wird man nur gewisse Teilverbände heranziehen, welche den Gruppen in invarianter Weise zugeordnet sind. So scheint der Subnormalteilerverband bei der Untersuchung auflösbarer Gruppen, der Normalteilerverband bei der Untersuchung nilpotenter Gruppen besonders geeignet zu sein.

Wir beschäftigen uns in dieser Arbeit mit dem Subnormalteilerverband und haben es vorwiegend mit auflösbaren Gruppen zu tun. Nach einleitenden Betrachtungen über die Kompositionsstruktur (§ 1) wird klargelegt, wie sich direkte Zerlegungen des Subnormalteilerverbandes in der Gruppe selbst widerspiegeln, was zum Begriff der *sn*-Zerlegung führt (§ 2). Sodann werden bestimmte Typen charakteristischer Untergruppen angegeben, die bei einem Isomorphus zwischen Subnormalteilerverbänden wieder in charakteristische Untergruppen, zum Teil desselben Typs, übergehen (§ 3). Möglichst genaue Kenntnisse hinsichtlich der Übertragung der Normalteilereigenschaft bei solchen Isomorphismen sind wichtig, weil sie es gestatten, durch Faktorgruppenbildung zu kleineren Gruppen überzugehen.

Die Frage nach der Struktur derjenigen Gruppen, deren Subnormalteilerverband von vorgegebener Art ist, läßt sich wohl kaum umfassend beantworten und führt schon in den einfachsten Fällen zu verzweigten Resultaten (§ 4). Schließlich befassen wir uns mit dem Aufsuchen solcher Eigenschaften, die sich bei einem Subnormalteilerverbandsisomorphismus von einer Gruppe auf die andere übertragen (§ 5). Heineken ([2], S. 36) bewies die Übertragbarkeit der Nilpotenz im Bereich der auflösbaren Gruppen, sofern noch zusätzlich die Nichtzyklizität sämtlicher Sylowgruppen vorliegt. Wir werden das Ergebnis durch Streichung der Zusatzvoraussetzung erweitern. Andererseits ist, wie sich zeigt, die Zyklizität der Sylowgruppen für sich ebenfalls eine übertragbare Gruppeneigenschaft.

Bezeichnungen

G, G^* bezeichnen Gruppen (alle vorkommenden Gruppen seien endlich); $a^b = b^{-1}ab$ für Gruppenelemente a, b; $K^a = a^{-1}Ka$ für ein Element a und einen Komplex K einer Gruppe; $(a, b) = a^{-1}b^{-1}ab$ ist der Kommutator aus a und b; G' = Kommutatorgruppe von G, $G'' = (G')'$; $\langle K \rangle$ bezeichnet die aus dem Komplex K erzeugte Untergruppe; $C_G(K)$ oder $C(K)$ = Zentralisator des Komplexes K in G; $Z(G)$ = Zentrum von G; $U \leqq G$, $U \overset{\triangleleft}{=} G$, $U \overset{\triangleleft\triangleleft}{=} G$ bedeutet bzw.: U ist Untergruppe, Normalteiler, Subnormalteiler von G-analog $U < G$, $U \triangleleft G$, $U \triangleleft\triangleleft G$: U ist echte Untergruppe, echter Normalteiler, echter Subnormalteiler von G; $m(G)$ = Durchschnitt aller maximalen Normalteiler von G; $|G|$ = Ordnung von G; $|G:U|$ = Index der Untergruppe U in G; ord a = Ordnung des Gruppenelementes a; S_n = symmetrische Gruppe des Grades n; Z_n = zyklische Gruppe der Ordnung n; $s(G)$, $n(G)$, $sn(G)$ bezeichnen bzw. den Verband der Untergruppen, Normalteiler, Subnormalteiler von G; wird ein Isomorphismus $sn(G) \cong sn(G^*)$ betrachtet, so bezeichne X^* das Bild von $X \in sn(G)$, falls nichts anderes gesagt wird; $\mathfrak{u} \leqq \mathfrak{v}$ bzw. $\mathfrak{u} < \mathfrak{v}$ für einen Verband $\mathfrak{v}$: $\mathfrak{u}$ ist Teilverband bzw. echter Teilverband von $\mathfrak{v}$; p, q seien immer Primzahlen; p' = Menge aller von p verschiedenen Primzahlen; für eine Primzahlmenge π bezeichnet π' die Gesamtheit der nicht in π gelegenen Primzahlen.

§ 1. Vorbemerkungen

$\mathfrak{E}$ sei eine Menge nichtisomorpher einfacher Gruppen. G heiße *$\mathfrak{E}$-Gruppe*, wenn jeder Kompositionsfaktor von G zu einer Gruppe aus $\mathfrak{E}$ isomorph ist oder G die Ordnung 1 hat.

Beispiele: 1. $\mathfrak{E}$ bestehe aus einer Gruppe von Primzahlordnung p. Dann sind die $\mathfrak{E}$-Gruppen genau die *p-Gruppen*.

2. $\mathfrak{E}$ bestehe aus allen einfachen Gruppen, in deren Ordnungen nur Primzahlen aus einer gegebenen Primzahlmenge π aufgehen. Dann sind die $\mathfrak{E}$-Gruppen genau die *π-Gruppen*.

3. $\mathfrak{E}$ bestehe aus der Gruppe von der Ordnung p und allen p'-Gruppen. Dann sind die $\mathfrak{E}$-Gruppen genau die *p-auflösbaren* Gruppen.

4. $\mathfrak{E}$ bestehe aus den zyklischen Gruppen, deren Ordnungen eine gegebene Primzahlmenge π ausfüllen und allen einfachen π'-Gruppen. Dann sind die $\mathfrak{E}$-Gruppen genau die *π-auflösbaren* Gruppen.

5. Wählt man in 4. für π die Gesamtheit aller Primzahlen, so sind die $\mathfrak{E}$-Gruppen genau die *auflösbaren* Gruppen.

Das Produkt von $\mathfrak{E}$-Normalteilern einer Gruppe G ist wieder $\mathfrak{E}$-Normalteiler von G. Daher ist das Produkt aller $\mathfrak{E}$-Normalteiler von G ein $\mathfrak{E}$-Normalteiler von G, der alle $\mathfrak{E}$-Normalteiler von G umfaßt. Er ist sogar charakteristische Untergruppe von G und wird der *größte $\mathfrak{E}$-Normalteiler* von G genannt. Unter G hat entsprechend der Durchschnitt von Normalteilern mit $\mathfrak{E}$-Faktorgruppe selbst eine $\mathfrak{E}$-Faktorgruppe. Also ist der Durchschnitt aller Normalteiler von G mit $\mathfrak{E}$-Faktorgruppe ein Normalteiler mit $\mathfrak{E}$-Faktorgruppe, der in allen Normalteilern von G mit $\mathfrak{E}$-Faktorgruppe enthalten ist. Wir nennen diesen Normalteiler, der offenbar ebenfalls charakteristisch ist, den *kleinsten Normalteiler* von G *mit* $\mathfrak{E}$-*Faktorgruppe* und seine unter G gebildete Faktorgruppe die *größte* $\mathfrak{E}$-*Faktorgruppe* von G.

Denkt man sich durch den Subnormalteiler N eine Kompositionsreihe von G gelegt und ist $G = N_0 \trianglerighteq N_1 \trianglerighteq \cdots \trianglerighteq N_r = N$ das oberhalb N gelegene Stück derselben, so hängen die Kompositionsfaktoren N_{i-1}/N_i $(i=1, \ldots, r)$ als abstrakte Gruppen nur von G und N ab, nicht aber von der Kompositionsreihe. Wir nennen sie kurz die *oberhalb N gelegenen Kompositionsfaktoren* von G.

Satz 1. 1. *Jeder $\mathfrak{E}$-Subnormalteiler von G liegt im größten $\mathfrak{E}$-Normalteiler von G.*

2. *Jeder Subnormalteiler von G, oberhalb dessen die Kompositionsfaktoren von G nur $\mathfrak{E}$-Gruppen sind, umfaßt den kleinsten Normalteiler von G mit $\mathfrak{E}$-Faktorgruppe.*

Beweis. 1. Wir zeigen durch Induktion nach $|G|$, daß in G jeder größte $\mathfrak{E}$-Subnormalteiler normal ist. Wenn G selbst $\mathfrak{E}$-Gruppe ist, so ist die Behauptung trivial richtig. Sei nun G nicht $\mathfrak{E}$-Gruppe und N ein größter $\mathfrak{E}$-Subnormalteiler von G. N ist subnormal in einem gewissen maximalen Normalteiler M von G. Da N auch maximaler $\mathfrak{E}$-Subnormalteiler von M ist, so ist nach Induktionsvoraussetzung $N \trianglelefteq M$. Für $a \in G$ ist auch $a^{-1}Na \trianglelefteq M$ und weiter $N \cdot a^{-1}Na \trianglelefteq M$, also $N \cdot a^{-1}Na \trianglelefteq\trianglelefteq G$. Überdies ist $N \cdot a^{-1}Na$ ein $\mathfrak{E}$-Gruppe. Wegen der Maximalität von N muß $a^{-1}Na = N$ sein.

2. Wird ähnlich wie 1. beweisen.

Folgerungen. 1. *Ist $N \trianglelefteq\trianglelefteq G$ und kein Kompositionsfaktor von N zu einem oberhalb N gelegenen Kompositionsfaktor von G isomorph, dann ist $N \trianglelefteq G$.*

2. *Jeder Hallsche Subnormalteiler ist normal.*

§ 2. *sn*-Zerlegungen

Definition. Eine direkte Zerlegung $G = A_1 \times \cdots \times A_n$ heiße *sn-Zerlegung* und entsprechend $A_1 \times \cdots \times A_n$ ein *sn-Produkt*, wenn für $i \neq j$ kein abelscher Kompositionsfaktor von A_i zu einem von A_j isomorph ist.

Diese Definition wird durch Satz 3 gerechtfertigt werden.

Satz 2. *Sei $G = A_1 \times \cdots \times A_n$ eine sn-Zerlegung. Dann besitzt G an Normalteilern (Subnormalteilern) genau die Gruppen $U_1 \times \cdots \times U_n$, wo U_i Normalteiler (Subnormalteiler) von A_i ist für $i=1, \ldots, n$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß jeder Normalteiler N von G die Gestalt $U_1 \times \cdots \times U_n$ hat, wo $U_i \trianglelefteq A_i$ für $i=1, \ldots, n$. Wir können $N \neq 1$ annehmen und uns die Numerierung der A_i so gewählt denken, daß $N \leqq A_1 \times \cdots \times A_k$, wobei kein A_i gestrichen werden darf. Ist $k=1$, dann besitzt N bereits die behauptete Gestalt. Sei fortan $k>1$. Jedes $x \in N$ besitzt eine eindeutige Darstellung $x = x_1 \ldots x_k$ mit $x_i \in A_i$ für $i=1, \ldots, k$. Die A_i-Komponenten x_i aller $x \in N$ bilden eine Untergruppe U_i von A_i. Wegen $N \trianglelefteq G$ ist $U_i \trianglelefteq A_i$.

Wir wollen zeigen, daß $U_1 \leqq N$ gilt und setzen zu dem Zweck $A_2 \times \cdots \times A_k = B_1$. Dann ist N Untergruppe von $A_1 \times B_1$, wobei die A_1-Komponenten der Elemente von N ganz U_1 und ihre B_1-Komponenten einen Normalteiler V_1 von B_1 ausfüllen. Bekanntlich ist $U_1/N\cap U_1 \cong V_1/N\cap V_1$. Angenommen, es wäre $U_1 \neq N\cap U_1$. Dann gäbe es einen maximalen Normalteiler $K_1/N\cap U_1$ von $U_1/N\cap U_1$. Da $A_1\times B_1$ ein *sn*-Produkt ist, müßte U_1/K_1 eine nichtabelsche einfache Gruppe sein. Wir könnten ein $x\in N$ mit $x_1\notin K_1$ wählen und fänden zu x_1 ein $y_1\in U_1$ mit $x_1^{-1}y_1^{-1}x_1y_1\notin K_1$. Es wäre $N\ni x^{-1}y_1^{-1}xy_1=x_1^{-1}y_1^{-1}x_1y_1\in U_1$, so daß $N\cap U_1 \not\leqq K_1$. Mithin ist $U_1 = N\cap U_1$, $U_1\leqq N$. Die gleichen Überlegungen können für $U_2, \ldots, U_k$ an Stelle von U_1 durchgeführt werden. Deshalb ist $U_1\times\cdots\times U_k = N$.

Nun zeigen wir durch Induktion nach $|G|$, daß ein beliebiger Subnormalteiler N von G die Gestalt $U_1\times\cdots\times U_n$ hat, wo $U_i \trianglelefteq\trianglelefteq A_i$ für $i=1, \ldots, n$. Das ist klar für $G=1$. Auch im Falle $N=G$ ist nichts zu beweisen. Sei $N\neq G$ und M ein N umfassender maximaler Normalteiler von G. Nach dem bisher Bewiesenen gilt $M = M_1\times\cdots\times M_r$, wo $M_i \trianglelefteq A_i$ für $i=1, \ldots, n$. Auf diese Zerlegung von M kann die Induktionsvoraussetzung angewendet werden. Danach ist $N = U_1\times\cdots\times U_n$, wo $U_i \trianglelefteq\trianglelefteq M_i$ für $i=1, \ldots, n$. Weil $U_i \trianglelefteq\trianglelefteq G$, so ist die Behauptung bewiesen.

Daß umgekehrt jedes Produkt $U_1\times\cdots\times U_n$ der im Satz genannten Art Normalteiler (Subnormalteiler) von G ist, liegt auf der Hand.

Satz 3. *Eine direkte Zerlegung*

$$G = A_1\times\cdots\times A_n \tag{1}$$

ist genau dann sn-Zerlegung, wenn gilt

$$sn(G) = sn(A_1)\times\cdots\times sn(A_n). \tag{2}$$

Beweis. Die Produkte $U_1\times\cdots\times U_n$, wo jeweils $U_i \trianglelefteq\trianglelefteq A_i$ für $i=1, \ldots, n$ bilden den Verband $sn(A_1)\times\cdots\times sn(A_n)$ als Teilverband von $sn(G)$. Ist (1) *sn*-Zerlegung, dann kann dieser Teilverband nach Satz 2 nicht echt sein, so daß (2) gilt. Sei umgekehrt (2) erfüllt, so daß also jeder Subnormalteiler von G die Gestalt $U_1\times\cdots\times U_n$ mit $U_i \trianglelefteq\trianglelefteq A_i$ für $i=1, \ldots, n$ besitzt. Wäre (1) keine *sn*-Zerlegung, dann gäbe es verschiedene Indizes i, j, so daß A_i und A_j einen Kompositionsfaktor derselben Primzahlordnung p hätten. Es gälte $C_i \triangleleft B_i \trianglelefteq\trianglelefteq A_i$, $C_j \triangleleft B_j \trianglelefteq\trianglelefteq A_j$, $|B_i:C_i| = |B_j:C_j| = p$ für geeignete Gruppen B_i, B_j, C_i, C_j. Offenbar wäre $C_iC_j \triangleleft B_iB_j$ und B_iB_j/C_iC_j elementar abelsch von der Ordnung p^2. Mit einem nicht in C_i gelegenen Element a von B_i und einem nicht in C_j gelegenen Element b von B_j wäre $\langle ab, C_iC_j\rangle$ ein Subnormalteiler von G, der nicht die Gestalt $U_1\times\cdots\times U_n$ mit $U_i \trianglelefteq\trianglelefteq A_i$ für $i=1, \ldots, n$ besäße.

Bemerkung zu Satz 3. Dafür daß (1) eine *sn*-Zerlegung ist, erweist sich als notwendig aber nicht als hinreichend die Beziehung

$$n(G) = n(A_1)\times\cdots\times n(A_n).$$

Man beweist die Notwendigkeit mit Hilfe von Satz 2 wie die entsprechende Aussage von Satz 3. Andererseits ist $G = A_1\times A_2$ mit $A_1=S_3$, $A_2=Z_3$ keine *sn*-Zerlegung, obwohl $n(G) = n(A_1)\times n(A_2)$ gilt.

Satz 4. *Sei $\mathfrak{v}$ ein Teilverband von $s(G)$, welcher* 1 *und G, sowie mit jedem seiner Elemente U auch alle zu U in G konjugierten Untergruppen als Elemente enthält. Ist*

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_1 \times \cdots \times \mathfrak{v}_n$$

eine Darstellung von $\mathfrak{v}$ als direktes Produkt von Teilverbänden $\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_n$ und bezeichnet A_i das maximale Elemente von $\mathfrak{v}_i$, so gilt

$$G = A_1 \times \cdots \times A_n, \tag{3}$$

und es ist $\mathfrak{v}_i = \mathfrak{v} \cap s(A_i)$.

Beweis. Auf Grund der Voraussetzung hat jede Untergruppe V aus $\mathfrak{v}$ die Gestalt $V = \langle V_1, V_2, \ldots, V_n \rangle$ mit $V_i \in \mathfrak{v}_i$, wobei die V_i durch V eindeutig bestimmt sind. Für $V=1$ müssen hierbei die V_i sämtlich gleich 1 sein, so daß $1 \in \mathfrak{v}_i$ für $i=1, \ldots, n$. Für $V=G$ möge die Darstellung $G=\langle B_1, \ldots, B_n \rangle$ lauten. Bei beliebiger Wahl von $V_i \in \mathfrak{v}_i$ ist $\langle V_i, B_i \rangle \in \mathfrak{v}_i$, was mit $G = \langle B_1, \ldots, \langle V_i, B_i \rangle, \ldots, B_n \rangle$ zusammen $\langle V_i, B_i \rangle = B_i$, d.h. $V_i \leqq B_i$ liefert. Demnach ist B_i das maximale Element A_i von $\mathfrak{v}_i$ und $\mathfrak{v}_i \leqq \mathfrak{v} \cap s(A_i)$. Wenn $U \in \mathfrak{v} \cap s(A_i)$ und etwa $U = \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ mit $U_k \in \mathfrak{v}_k$, so folgt $A_i = \langle U_1, \ldots, U_{i-1}, A_i, U_{i+1}, \ldots, U_n \rangle = \langle 1, \ldots, 1, A_i, 1, \ldots, 1 \rangle$, so daß $U_j = 1$ für $j \neq i$. Dann ist aber $U = U_i$, mithin $U \in \mathfrak{v}_i$. Wir ersehen daraus, daß $\mathfrak{v} \cap s(A_i) \leqq \mathfrak{v}_i$. Insgesamt gilt also $\mathfrak{v}_i = \mathfrak{v} \cap s(A_i)$ für $i=1, \ldots, n$. Hiermit ergibt sich weiter, daß A_i mit dem Erzeugnis der übrigen A_j $(j \neq i)$ den Durchschnitt 1 hat. Nun zeigen wir die Normalität aller A_i in G. Für $a_j \in A_j$, wo $j \neq i$, ist nach Voraussetzung $A_i^{a_j} \in \mathfrak{v}$, also $A_i^{a_j} = \langle V_1, \ldots, V_n \rangle$ mit $V_k \in \mathfrak{v}_k$ für $k=1, \ldots, n$. Wegen $V_k \leqq A_i^{a_j} \leqq \langle A_i, A_j \rangle$ folgt $V_k = 1$ für $k \neq i, j$. Also ist $A_i^{a_j} = \langle V_i, V_j \rangle$. Es ergibt sich nun schrittweise $A_i = \langle a_j V_i a_j^{-1}, a_j V_j a_j^{-1} \rangle$, $a_j V_j a_j^{-1} \leqq A_i \cap A_j = 1$, $V_j = 1$, $A_i^{a_j} = V_i \leqq A_i$.

Bemerkungen zu Satz 4. Man kann z. B. für $\mathfrak{v}$ jeden der Verbände $s(G)$, $sn(G)$, $n(G)$ nehmen. Für $\mathfrak{v} = s(G)$ ist $\mathfrak{v}_i = s(A_i)$. Für $\mathfrak{v} = sn(G)$ ist $\mathfrak{v}_i = sn(A_i)$ und (3) nach Satz 3 eine *sn*-Zerlegung.

Auf Grund der Sätze 3 und 4 wird durch (1) $\to$ (2) eine eineindeutige Zuordnung zwischen den *sn*-Zerlegungen von G und den Zerlegungen von $sn(G)$ in ein direktes Produkt von Unterverbänden hergestellt. Wir erwähnen, daß in ähnlicher Weise den direkten Zerlegungen von $s(G)$ gewisse direkte Zerlegungen von G entsprechen, die von Suzuki ([4], S. 5) angegeben worden sind.

Satz 5. *Sei $G = A_1 \times \cdots \times A_n$ eine sn-Zerlegung und $A_1^*, \ldots, A_n^*$ ein System von Untergruppen von G^*. Gibt es einen Isomorphismus $sn(G) \cong sn(G^*)$ mit $A_i \to A_i^*$ für $i=1, \ldots, n$, dann besteht die sn-Zerlegung $G^* = A_1^* \times \cdots \times A_n^*$ mit $sn(A_i) \cong sn(A_i^*)$ für $i=1, \ldots, n$ und umgekehrt.*

Beweis. Wenn $sn(G) \cong sn(G^*)$ mit $A_i \to A_i^*$ für $i=1, \ldots, n$, dann ist $sn(G^*) = sn(A_1^*) \times \cdots \times sn(A_n^*)$. Hieraus ergibt sich nach Satz 4 samt Bemerkungen, daß $G^* = A_1^* \times \cdots \times A_n^*$ gilt und weiter mittels Satz 3, daß dies eine *sn*-Zerlegung ist.

Zum Beweis der Umkehrung nehmen wir an, es sei $G^* = A_1^* \times \cdots \times A_n^*$ eine *sn*-Zerlegung, und es gelte $sn(A_i) \cong sn(A_i^*)$, wobei der beliebige Subnormalteiler U_i von A_i das Bild U_i^* in A_i^* haben möge. Mit Hilfe von Satz 2 erkennt man, daß $U_{i_1} \ldots U_{i_r} \to U_{i_1}^* \ldots U_{i_r}^*$ $(1 \leqq i_1 < \cdots < i_r \leqq n)$ ein Isomorphismus $sn(G) \cong sn(G^*)$ ist, bei dem A_i auf A_i^* abgebildet wird.

§ 3. Charakteristische Untergruppen

In diesem Paragraphen werden hinreichende Bedingungen dafür angegeben, wann eine charakteristische Untergruppe bei einem Isomorphismus zwischen Subnormalteilerverbänden wieder in eine charakteristische Untergruppe übergeht.

Satz 6. *In G seien wenigstens drei eigentliche Normalteiler vorhanden und jeder eigentliche Normalteiler zugleich maximal und minimal. Dann ist G eine elementar abelsche Gruppe von Primzahlquadratordnung.*

Beweis. Die eigentlichen Normalteiler von G seien $N_1, \ldots, N_k$, wo $k \geqq 3$. Für $i \neq j$ ist $N_i N_j = G$, $N_i \cap N_j = 1$, also $G = N_i \times N_j$. Hieraus folgt einerseits die Einfachheit aller N_i und andererseits zusammen mit $k \geqq 3$, daß alle N_i untereinander isomorph sind. Wäre N_1 nicht abelsch, so wäre $G = N_1 \times N_2$ eine *sn*-Zerlegung und G besäße auf Grund von Satz 2 nur zwei minimale Normalteiler gegen die Voraussetzung. Also ist N_1 abelsch und $|N_1|$ eine Primzahl p. Aus $G = N_1 \times N_2$ und $|N_1| = |N_2| = p$ folgt die Behauptung.

Satz 7. 1. *Ist G/N nichtzyklisch elementar abelsch und $sn(G) \cong sn(G^*)$, so ist $N^* \trianglelefteq G^*$ und $G/N \cong G^*/N^*$.*

2. *Ist G nichtzyklisch elementar abelsch und $sn(G) \cong sn(G^*)$, so ist $G \cong G^*$.*

Beweis. 1. Seien M_1, M_2 verschiedene N umfassende maximale Normalteiler von G. Dann ist $G/M_1 \cap M_2$ elementar abelsch von Primzahlquadratordnung p^2, ferner $M_1^* \trianglelefteq G$, $M_2^* \trianglelefteq G$. Wegen $sn(G/M_1 \cap M_2) \cong sn(G^*/M_1^* \cap M_2^*)$ erfüllt $G^*/M_1^* \cap M_2^*$, die in Satz 6 für G formulierten Voraussetzungen. Also ist $G^*/M_1^* \cap M_2^*$ elementar abelsch von Primzahlquadratordnung q^2. Die Anzahl der maximalen Subnormalteiler von $G/M_1 \cap M_2$ bzw. $G^*/M_1^* \cap M_2^*$ ist $p+1$ bzw. $q+1$. Da beide Anzahlen übereinstimmen müssen, ist $p=q$. Mithin haben alle N^* umfassenden maximalen Normalteiler von G^* den Index p. Ihr Durchschnitt ist N^*, denn N stimmt mit dem Durchschnitt aller N umfassenden maximalen Normalteiler von G überein. Es ergibt sich, daß G^*/N^* elementar abelsche p-Gruppe ist. Da die Längen der Kompositionsreihen von G/N und G^*/N^* übereinstimmen, haben beide Gruppen dieselbe Ordnung. Damit ist die Isomorphie $G/N \cong G^*/N^*$ nachgewiesen.

2. Ist Spezialfall von 1.

Satz 8. *Sei $sn(G) \cong sn(G^*)$, G^* auflösbar und G/N die größte $\mathfrak{E}$-Faktorgruppe von G. Dann ist N^* charakteristische Untergruppe von G.*

Beweis. Wir zeigen, daß in G^* zu jeder charakteristischen Untergruppe L^* mit $G^* \geqq L^* > N^*$ eine charakteristische Untergruppe M^* mit $L^* > M^* \geqq N^*$ existiert. Ist dies bewiesen, so können wir eine bei G^* beginnende und bei N^* endende Kette aus charakteristischen Untergruppen finden.

Da N^* in L^* subnormal ist, gibt es einen maximalen Subnormalteiler K^* von L^*, der N^* umfaßt. Wegen der Auflösbarkeit von G^* ist $|L^*:K^*|$ eine Primzahl p. Ist K^* charakteristische Untergruppe von G^*, so können wir $M^* = K^*$ wählen. Sei nun K^* keine charakteristische Untergruppe von G^*. Da alle Bilder von K^* unter den Automorphismen von G^* in L^* Normalteiler vom Index p sind, so ist ihr

Durchschnitt M^* eine charakteristische Untergruppe von G^*, für die L^*/M^* elementar abelsche p-Gruppe ist. Zudem ist L^*/M^* nicht zyklisch.

Nach Satz 7, 1. ist $M \trianglelefteq L$ und L/M eine elementar abelsche p-Gruppe. Aus $N \trianglelefteq K \trianglelefteq L \trianglelefteq\trianglelefteq G$ und $|L:K|=p$ folgt, daß sowohl die Gruppe der Ordnung p sowie jeder oberhalb L gelegene Kompositionsfaktor von G in $\mathfrak{E}$ sein muß. Es ergibt sich, daß die oberhalb M gelegenen Kompositionsfaktoren von G zu $\mathfrak{E}$ gehören, was auf Grund von Satz 1, 2. zu $N \leqq M$ führt. Damit ist auch $N^* \leqq M^*$.

Satz 9. *Sei $sn(G) \cong sn(G^*)$ und G/N die größte p-Faktorgruppe von G. Es werde vorausgesetzt, daß G/N nicht zyklisch und im Falle $p=2$ sowohl G als auch G^* auflösbar ist. Dann ist $N^* \trianglelefteq G^*$ und G^*/N^* größte p-Faktorgruppe von G^*.*

Beweis. Wir verwenden Induktion nach $|G|$. Die Gruppe G kleinster Ordnung, welche den Voraussetzungen des Satzes genügt, ist die Vierergruppe, und dabei ist $N=1$ zu nehmen. Dann ist $N^*=1$ und auf Grund von Satz 7, 2. G^* ebenfalls die Vierergruppe.

Sei $N_1, N_2, \ldots, N_k$ das System der maximalen Subnormalteiler von G, welche N umfassen. Da G/N nicht zyklisch ist, ist $k>1$. Alle N_i sind in G Normalteiler vom Index p. Für $i \neq j$ ist $G/N_i \cap N_j$ eine elementar abelsche Gruppe der Ordnung p^2. Da nach Satz 7, 1. $G/N_i \cap N_j \cong G^*/N_i^* \cap N_j^*$ ist, so gilt $|G^*:N_i^*|=p$.

a) Ist N_i/N für ein i nicht zyklisch, so kann man auf N_i und N_i^* die Induktionsvoraussetzung anwenden. Wegen Satz 1, 2. ist N_i/N größte p-Faktorgruppe von N_i. Also ist $N^* \trianglelefteq N_i^*$ und N_i^*/N^* größte p-Faktorgruppe von N_i^*. N^* ist Subnormalteiler von G^*, der wegen $|G^*:N_i^*|=p$ unter G^* p-Potenzindex hat. Er umfaßt nach Satz 1, 2. den kleinsten Normalteiler M^* mit p-Potenzindex in G^*. Da M^* in N_i^* Subnormalteiler mit p-Potenzindex ist, so muß wieder nach Satz 1, 2. gelten $M^* \geqq N^*$. Es folgt $N^*=M^*$, so daß also G^*/N^* die größte p-Faktorgruppe von G^* ist.

Wenn alle Gruppen N_i/N $(i=1, \ldots, k)$ zyklisch sind, so ist G/N entweder die Quaternionengruppe oder die elementar abelsche Gruppe der Ordnung p^2.

b) Sei zunächst G/N die Quaternionengruppe, so daß $k=3$. G und G^* sind jetzt nach Voraussetzung auflösbar. Wir setzen $N_1 \cap N_2 \cap N_3 = D$. G/D ist die Vierergruppe. Nach Satz 7, 1. ist $D^* \trianglelefteq G^*$ und G^*/D^* ebenfalls die Vierergruppe. Nach Satz 8 ist $N^* \trianglelefteq G^*$. Wegen der Auflösbarkeit von G^* ist $|D^*:N^*|$ eine Primzahl q_1. Wäre $q_1 \neq 2$, so wäre $|G^*/N^*:C(D^*/N^*)| \leqq 2$. In G^*/N^* gäbe es neben dem minimalen Subnormalteiler D^*/N^* noch einen Subnormalteiler der Ordnung 2. Dagegen ist D/N einziger minimaler Subnormalteiler von G/N. Wir haben damit festgestellt, daß

$$|G^*:N^*|=8 \tag{4}$$

ist.

Sei G^*/L^* die größte 2-Faktorgruppe von G^*. Wir haben zu zeigen, daß $L^* \geqq N^*$ bzw. $L \geqq N$ ist. Nach Satz 8 ist jedenfalls $L \trianglelefteq G$. Wenn $L^* \neq 1$, so können wir auf G/L und G^*/L^* die Induktionsvoraussetzung anwenden, wonach G/L 2-Gruppe, also $L \geqq N$ ist. Sei nun $L=L^*=1$, also G^* eine 2-Gruppe. Dann ist $G^*/m(G^*)$ elementar abelsche 2-Gruppe einer Ordnung $2^n>2$. Es folgt nach Satz 7, 1., daß $G/m(G)$ ebenfalls elementar abelsch von der Ordnung 2^n ist. Mithin gilt $m(G)=D$. Demnach sind N_1^*, N_2^*, N_3^* alle maximalen Untergruppen von G^* und somit G^* nicht zyklisch. Angenommen es wäre $N^* \neq 1$. Dann wäre G^* wegen (4) auch nicht die Quaternionengruppe. Wenigstens eine Untergruppe N_j^* würde dann nicht zyklisch sein, und auf diese könnte die Induktionsvoraussetzung angewendet werden. N_j wäre eine 2-Gruppe und damit auch G. Wir hätten $N = N^* = 1$ gegen unsere Annahme.

c) Schließlich nehmen wir an, G/N sei die elementar abelsche Gruppe der Ordnung p^2. Nach Satz 7, 1. ist dann $N^* \trianglelefteq G^*$ und G^*/N^* ebenfalls elementar abelsch von der Ordnung p^2. N^* umfaßt nach Satz 1, 2. den kleinsten Normalteiler M^* mit p-Potenzindex in G^*. Wäre $M^* < N^*$, so wäre G^*/M^* nichtzyklische p-Gruppe einer Ordnung $\geqq p^3$. Entweder enthielte G^*/M^* eine nichtzyklische Untergruppe vom Index p, und dann gäbe das unter a) Gezeigte den Widerspruch $M = N$, oder G^*/M^* müßte die Quaternionengruppe sein, und dann wäre nach dem unter b) Gezeigten $M = N$.

Folgerungen. 1. *Ist G eine nichtzyklische p-Gruppe, G^* eine auflösbare Gruppe mit $sn(G) \cong sn(G^*)$, dann ist G^* nichtzyklische p-Gruppe, insbesondere also $s(G) \cong s(G^*)$.*

2. *Ist G eine verallgemeinerte Quaternionengruppe, G^* auflösbar und $sn(G) \cong sn(G^*)$, so ist $G \cong G^*$.*

Man beachte hierbei, daß unter den p-Gruppen die zyklischen Gruppen die einzigen sind mit nur einer Untergruppe vom Index p, die verallgemeinerten Quaternionengruppen die einzigen mit nur einer Untergruppe von der Ordnung p aber mehr als einer Untergruppe vom Index p.

Ein Gegenstück zu Satz 9 ist

Satz 10. *Sei $sn(G) \cong sn(G^*)$ und N größter p-Normalteiler von G. Es werde weiter vorausgesetzt, daß N nicht zyklisch und G^* auflösbar ist. Dann ist N^* größter p-Normalteiler von G^*.*

Beweis. Aus der Nichtzyklizität von N und der Auflösbarkeit von G^* ergibt sich nach der Folgerung 1. zu Satz 9, daß N^* eine nichtzyklische p-Gruppe ist. Der größte p-Normalteiler P^* von G^* umfaßt daher N^*. Wäre $N^* \neq P^*$, so gäbe es in P^* eine Untergruppe U^*, die N^* als Untergruppe vom Index p enthielte. Da U^* nicht zyklisch sein dürfte, existierte in U^* neben N^* noch eine maximale Untergruppe M^*. Die Faktorgruppe $U^*/M^* \cap N^*$ wäre elementar abelsch von der Ordnung p^2. In U wären M und N maximale Normalteiler. Die Faktorgruppe $U/M \cap N$ würde nach Satz 7, 1. ebenfalls elementar abelsch von der Ordnung p^2 sein. U wäre in G Subnormalteiler mit p-Potenzordnung, müßte daher nach Satz 1, 1. in N liegen, was aber wegen $U^* > N^*$ ausgeschlossen ist. Damit steht fest, daß $N^* = P^*$ ist.

Wir wollen nun Satz 10 verändern, indem wir statt des größten p-Normalteilers den größten $\mathfrak{E}$-Normalteiler betrachten für eine beliebig gegebene Menge $\mathfrak{E}$ einfacher Gruppen. Wir erhalten dadurch ein Gegenstück zu Satz 8. Vorbereitend beweisen wir den

Satz 11. *Sei M minimaler Normalteiler von G, G^* auflösbar, $sn(G) \cong sn(G^*)$ und dabei das Bild M^* von M keine charakteristische Untergruppe von G^*. Dann ist M in einem nichtzyklischen elementar abelschen Subnormalteiler von G enthalten.*

Beweis. Die in M gelegenen minimalen Subnormalteiler von G erzeugen ganz M. Dasselbe muß in G^* bezüglich M^* gelten, und da nach Voraussetzung M^* keine charakteristische Untergruppe von G ist, enthält M^* einen nichtcharakteristischen Subnormalteiler U^* von G^*. U^* hat Primzahlordnung p und kann durch einen Automorphismus von G^* in eine Untergruppe $V^* \neq U^*$ übergeführt werden. V^* ist ebenfalls Subnormalteiler der Ordnung p und liegt zusammen mit U^* im größten p-Normalteiler P^* von G^*. Sei W^* eine beliebig gewählte Untergruppe der Ordnung p von $Z(P^*)$, falls $U^* \not\leqq Z(P^*)$, aber $W^* = V^*$, falls $U^* \leqq Z(P^*)$. Dann ist $T^* = U^* W^*$ in G^* elementar abelscher Subnormalteiler der Ordnung p^2. Nach Satz 7, 2. ist T in G elementar abelscher Subnormalteiler der Ordnung p^2 und demnach $|U| = p$. U liegt im größten p-Normalteiler von M, der daher mit M übereinstimmen muß. Somit ist M elementar abelsche p-Gruppe. M und T sind beide im größten p-Normalteiler von G enthalten. Dieser umfaßt M sogar in seinem Zentrum, woraus folgt, daß MT elementar abelscher Subnormalteiler von G ist. Schließlich ist $|MT| \geqq |T| = p^2$.

Satz 12. *Sei $sn(G) \cong sn(G^*)$, G^* auflösbar und N der größte $\mathfrak{E}$-Normalteiler von G. Dann ist N^* charakteristische Untergruppe von G^*.*

Beweis. Wir verwenden Induktion nach $|G|$. Für $G = 1$ oder $G = N$ ist nichts zu beweisen. Sei $G \neq N \neq 1$. Wir zeigen, daß N einen Normalteiler $L \neq 1$ von G enthält, für den L^* charakteristische Untergruppe von G^* ist. Dann kann man auf die Gruppen G/L und G^*/L^*, in denen bzw. N/L größter $\mathfrak{E}$-Normalteiler und N^*/L^* sein Bild ist, die Induktionsvoraussetzung anwenden.

Sei M ein in N gelegener minimaler Normalteiler von G. Wenn M^* charakteristische Untergruppe von G^* ist, so sind wir fertig. Wenn M^* keine charakteristische Untergruppe von G^* ist, dann ist $|M|$ nach Satz 11 Potenz einer Primzahl p und der größte p-Normalteiler P von G nicht zyklisch. Wegen $M \leqq N$ muß die zyklische Gruppe der Ordnung p in $\mathfrak{E}$ liegen. Da hiernach P eine $\mathfrak{E}$-Gruppe ist, gilt $P \leqq N$. Auf Grund von Satz 10 ist P^* charakteristische Untergruppe von G^*. Jetzt tut $L = P$ das Verlangte.

§ 4. Gruppen mit gegebenem Subnormalteilerverband

Für jede Gruppe G ist

$$s(G) \geqq sn(G) \geqq n(G).$$

Genau dann ist $s(G) = sn(G)$, wenn G nilpotent ist. Genau dann ist $s(G) = n(G)$, wenn G hamiltonsch ist. Die Frage, welche Gruppen G durch $sn(G) = n(G)$ charakterisiert werden, wollen wir nur für auflösbare Gruppen untersuchen.

Satz 13. *Für eine auflösbare Gruppe G gilt genau dann $sn(G) = n(G)$, wenn G einen geordneten Sylowturm besitzt, bei dem jede Faktorgruppe ungerader Ordnung von aufeinanderfolgenden Gliedern abelsch ist und unter Transformation mit einem beliebigen Element aus G die Erhebung aller ihrer Elemente in dieselbe Potenz erfährt, während die Faktorgruppe gerader Ordnung, falls vorhanden, hamiltonsch ist.*

Beweis. Wir setzen die Existenz eines Sylowturmes der im Satz genannten Art für G voraus. Dann hat auch jede Untergruppe und jede Faktorgruppe von G einen solchen Sylowturm. Dadurch ist es möglich, die Normalität der Subnormalteiler von G durch Induktion nach $|G|$ zu beweisen. Für $G=1$ ist alles klar. Sei nun $G\neq 1$. Es genügt zu zeigen, daß in G jeder minimale Subnormalteiler N normal ist, denn dann kann man jeweils auf G/N die Induktionsvoraussetzung anwenden.

Sei P die zum größten Primteiler von $|G|$ gehörende Sylowgruppe von G. Auf Grund der Voraussetzung sind alle Untergruppen von P normal in G. Sei M ein nicht in P gelegener minimaler Subnormalteiler von G und L eine minimale Untergruppe von P. Dann ist LM ein Subnormalteiler von G. Nach Induktionsvoraussetzung ist $LM/L \trianglelefteqq G/L$ und demnach $LM \trianglelefteqq G$. In LM ist M Subnormalteiler und Sylowgruppe, also charakteristische Untergruppe. Es folgt $M \trianglelefteqq G$.

Die Umkehrung beweisen wir ebenfalls durch Induktion nach $|G|$. Für $G=1$ ist die Behauptung richtig. Sei $G\neq 1$ und in G außer Normalteilern kein Subnormalteiler vorhanden. Dann ist jede Kompositionsreihe von G eine Hauptreihe und demzufolge G überauflösbar. Als überauflösbare Gruppe besitzt G eine geordnete Sylowturmreihe $G=N_0>N_1>\cdots>N_r=1$ (s. z. B. HUPPERT [3], S. 415). Wir betrachten zunächst N_{r-1}. Offenbar ist N_{r-1} hamiltonsch. Ist $|N_{r-1}|$ gerade, so ist $r=1$ und $G=N_0$ eine 2-Gruppe. Dann ist G offenbar hamiltonsch. Sei weiterhin $|N_{r-1}|$ ungerade. N_{r-1} ist dann bekanntlich abelsch (s. z. B. ZASSENHAUS [5], S. 123). Sei $a_1, \dots, a_n$ eine Basis von N_{r-1}. Da die aus dem Element $a=a_1\dots a_n$ erzeugte Gruppe in G normal ist, so gibt es zu dem beliebig gewählten Element $x\in G$ eine natürliche Zahl k mit $x^{-1}ax=a^k$. Aus dieser Beziehung folgt wegen $x^{-1}a_ix\in\langle a_i\rangle$ für $i=1, \dots, n$, daß $x^{-1}a_ix=a_i^k$ für alle i. Es ergibt sich, daß bei Transformation mit x jedes Element von N_{r-1} in seine k-te Potenz erhoben wird. Ist $r=1$, so sind wir fertig. Ist $r>1$, so kann auf G/N_{r-1} die Induktionsvoraussetzung angewendet werden, aus der sich ergibt, daß auf die Faktorgruppen N_{i-1}/N_i $(i=1, \dots, r-1)$ die zu beweisenden Aussagen zutreffen.

Mit einer leichten Abänderung des ersten Abschnittes im Beweis von Satz 13 zeigt man

Satz 14. *Es gilt $sn(G)=n(G)$, wenn G einen Sylowturm $G=N_0>N_1>\cdots>N_r=1$ besitzt, bei dem für $1\leqq i\leqq r$ jede Faktorgruppe N_{i-1}/N unter Transformation mit einem beliebigen Element aus G die Erhebung all ihrer Elemente in dieselbe Potenz erfährt.*

Folgerung. *Hat G einen zyklischen Hallschen Normalteiler N mit abelscher Faktorgruppe G/N, so gilt $sn(G)=n(G)$.*

Satz 15. *Die auflösbaren Gruppen mit genau einem minimalen Subnormalteiler sind*

a) $a^m=b^{q^n}=1,\ a^{-1}ba=b^r,\ |\langle a,b\rangle|=mq^n$

mit

$q=$*Primzahl*, $1\leqq n,\ 1\leqq m\,|\,q-1,$
$m=\operatorname{ord} r \bmod q^n$;

b) *die verallgemeinerten Quaternionengruppen;*

c) $a_1^2=1,\ a_2^3=1,\ b_1^2=b_2^2,\ b_2^4=1,$
$a_1^{-1}a_2a_1=a_2^{-1},\ b_1^{-1}b_2b_1=b_2^{-1},$
$a_1^{-1}b_1a_1=b_2^{-1},\ a_2^{-1}b_1a_2=b_2,$
$a_1^{-1}b_2a_1=b_1^{-1},\ a_2^{-1}b_2a_2=b_1b_2;$

d) *wie* c) *nur mit* $a_1^2=b_1^2$ *statt* $a_1^2=1$;
e) *die Untergruppe* $\langle a_2, b_1, b_2\rangle$ *von* c).
Diese Gruppen sind paarweise nichtisomorph.

Beweis. Zunächst ist leicht zu sehen, daß die angegebenen Gruppen sämtlich existieren. a) existiert nach Hölder (s. z. B. Zassenhaus [5], S. 95), e) ist zerfallende Erweiterung der Quaternionengruppe $\langle b_1, b_2\rangle$ mit $\langle a_2\rangle$, c) zerfallende Erweiterung von e) mit $\langle a_1\rangle$ und d) zerspaltende Erweiterung von e) mit $\langle a_1\rangle$ bei gemäß $a_1^2=b_1^2$ vereinigter Untergruppe. Daß die Gruppen c) und d) verschieden sind, erkennt man an den 2-Sylowgruppen. Die von c) hat mehrere Untergruppen der Ordnung 2, während die von d) die verallgemeinerte Quaternionengruppe $\langle a_1, a_1 b_1\rangle$ ist. Im übrigen liegt die Nichtisomorphie der angegebenen Gruppen auf der Hand. Die Einzigkeit des minimalen Subnormalteilers ergibt sich aus der Bemerkung, daß in jeder der Gruppen a) bis e) der größte nilpotente Normalteiler Primzahlpotenzordnung besitzt und entweder zyklisch oder Quaternionengruppe ist.

Wir zeigen nun, daß eine auflösbare Gruppe G mit nur einem minimalen Subnormalteiler zu einer der Gruppen a) bis e) isomorph ist. Dabei benutzen wir vollständige Induktion nach $|G|$. Für $|G|=$Primzahl ist alles klar, womit auch der Induktionsanfang gesichert ist. Wir nehmen weiterhin an, daß $|G|$ keine Primzahl ist. Der minimale Normalteiler von G sei M, seine Ordnung q.

Zunächst gebe es einen maximalen Normalteiler N von G, dessen Index p zu q teilerfremd ist. N ist nach Induktionsvoraussetzung eine der Gruppen a) bis e). Wir betrachten diese Möglichkeiten nacheinander.

a) Hier ist $\langle b\rangle$ normale q-Sylowgruppe von N und somit auch von G. Nach Zassenhaus ([5], S. 125) gibt es in G eine Untergruppe A mit $G=A\langle b\rangle$, $A\cap\langle b\rangle = 1$. Ordnen wir jedem $a\in A$ den Automorphismus $b^i\to a^{-1}b^i a$ von $\langle b\rangle$ zu, so erhalten wir eine Darstellung von A als Gruppe aus Automorphismen von $\langle b\rangle$. Diese Darstellung muß treu sein, denn anderenfalls enthielte A einen minimalen Subnormalteiler von G. Für $|A|=\bar{m}$ gilt $q\nmid \bar{m}|q^{n-1}(q-1)$, also $\bar{m}|q-1$. A ist zyklisch, denn im Falle $q=2$ ist $\bar{m}=1$ und im Falle $q\neq 2$ ist die Automorphismengruppe von $\langle b\rangle$ zyklisch. Setzen wir $A=\langle\bar{a}\rangle$, so wird $\bar{a}^{-1}b\bar{a}=b^r$ und dabei ord r mod $q^n=\bar{m}$. Also ist G eine Gruppe vom Typ a).

b) Ein Element der Ordnung p von G muß in N einen Automorphismus der Ordnung p induzieren. Das kann nur sein, wenn N die Quaternionengruppe und $p=3$ ist. Für ein Element a der Ordnung 3 und ein in N gelegenes Element b_1 der Ordnung 4 setzen wir $a^{-1}b_1 a=b_2$. Dann ist $a^{-1}b_2 a$ entweder $b_1 b_2$ oder $b_1 b_2^{-1}$. Im Falle $a^{-1}b_2 a=b_1 b_2^{-1}$ gelten die Relationen $a^{-1}b_1^{-1}a=b_2^{-1}$, $a^{-1}b_2^{-1}a=b_1^{-1}b_2^{-1}$. In beiden Fällen ist also G zur Gruppe e) isomorph.

c) oder d) können nicht eintreten. Denn die Quaternionengruppe $Q=\langle b_1, b_2\rangle$ wäre als größter 2-Normalteiler von N normal in G. Da die inneren Automorphismen von N alle 24 Automorphismen von Q induzierten, müßte $G/C(Q)$ zur Automorphismengruppe von Q isomorph sein. $C(Q)$ hätte die Ordnung $2p$ und enthielte das in $Z(G)$ gelegene Element b_1^2 der Ordnung 2. Folglich gäbe es in $C(Q)$ einen Normalteiler der Ordnung p, was nicht sein kann.

e) kann ebenfalls nicht eintreten. Denn wieder wäre $Q=\langle b_1, b_2\rangle\trianglelefteq G$, $\langle b_1^2\rangle \leqq C(Q)\cap Z(G)$ und jetzt $12\,\big|\,|G:C(Q)|\,\big|\,24$, was mit $|G|=24p$ zu $|C(Q)|=2p$ führte. Es gäbe auch hier in $C(Q)$ einen Normalteiler der Ordnung p.

Nun mögen alle maximalen Normalteiler von G den Index q haben. Wegen

$|G:C(M)|\,|(q-1)$ kann dann nur $C(M)=G$ sein. Also liegt M im Zentrum von G. Ist L/M minimaler Subnormalteiler von G/M, so ist L zyklisch von der Ordnung q^2; anderenfalls wäre nämlich $L = V\times M$ mit einer Untergruppe V von Primzahlordnung, und in V hätten wir einen von M verschiedenen minimalen Subnormalteiler von G vor uns. L liegt im größten q-Normalteiler Q_0 von G, der mithin eine Ordnung $\geqq q^2$ besitzt. Q_0 hat nur eine Untergruppe der Ordnung q und ist daher entweder zyklisch oder verallgemeinerte Quaternionengruppe (ZASSENHAUS [5], S. 112).

Ist $q\neq 2$, so ist Q_0 zyklisch und G/M hat somit nur einen minimalen Subnormalteiler, dessen Ordnung übrigens q ist. Nach Induktionsvoraussetzung kann G/M nur zyklisch von q-Potenzordnung sein. Dann ist $Q_0=G$, mithin G zyklische q-Gruppe.

Sei $q=2$. Ist ein maximaler Normalteiler von G eine 2-Gruppe, so ist wieder $Q_0=G$ und wir sind fertig. Im anderen Fall sind die maximalen Normalteiler von G entweder sämtlich von der Form c), d) oder sämtlich von der Form e). Beidemale muß Q_0 auf Grund der obigen Betrachtungen eine verallgemeinerte Quaternionengruppe sein, welche $\langle b_1, b_2\rangle$ umfaßt. Da a_2 auf Q_0 einen Automorphismus der Ordnung 3 induziert, ist Q_0 notwendigerweise die Quaternionengruppe und $C(Q_0)$ eine 2-Gruppe. Da mithin $C(Q_0)\leqq Q_0$, so muß $C(Q_0)=\langle b_1^2\rangle$ sein.

Wegen $|G:C(Q_0)|\leqq 24$ kommt die Form c) oder d) für N nicht in Frage, so daß also N die Gestalt e) besitzt. Dann ist $G/\langle b_1^2\rangle$ zur Automorphismengruppe von Q_0 isomorph, wobei die inneren Automorphismen von Q_0 durch die Elemente von $Q_0/\langle b_1^2\rangle$ bewirkt werden. In N hat $\langle a_2\rangle$ den Normalisator $\langle a_2, b_1^2\rangle$. Die vier zu $\langle a_2\rangle$ in N konjugierten Untergruppen sind sämtliche 3-Sylowgruppen von G. Also hat der Normalisator K von $\langle a_2\rangle$ in G die Ordnung 12. Die Elemente von $K/\langle b_1^2\rangle$ müssen auf Q_0 äußere Automorphismen bewirken. Mithin permutieren sie die Untergruppen $\langle b_1\rangle$, $\langle b_2\rangle$, $\langle b_1 b_2\rangle$ von Q_0 gemäß der symmetrischen Gruppe dritten Grades.

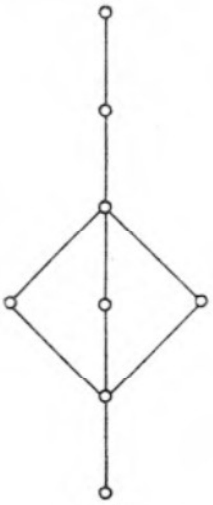
Es gibt daher in K ein Element a_1 mit 2-Potenzordnung, das $\langle b_1\rangle$, $\langle b_2\rangle$ miteinander vertauscht. Es gilt $a_1^{-1}a_2a_1=a_2^{-1}$, denn wäre a_1 mit a_2 vertauschbar, so läge die 3-Sylowgruppe $\langle a_2\rangle$ im Zentrum ihres Normalisators K, und G besäße dann nach BURNSIDE (s. z. B. ZASSENHAUS [5], S. 133) einen Normalteiler vom Index 3. Da die Transformation mit a_1 in N einen Automorphismus induziert, kann nur

$$a_1^{-1}b_1a_1=b_2^{-1},\ a_1^{-1}b_2a_1=b_1^{-1}$$

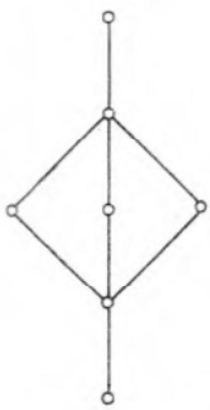
sein. Schließlich ist a_1^2 entweder 1 oder b_1^2. Damit steht fest, daß G zur Gruppe c) oder d) isomorph ist.

Wir wollen noch die Subnormalteilerverbände der im Satz 15 genannten Gruppen vergleichen.

Zunächst sieht man unmittlbear, daß diese Verbände für die Gruppen c), d), e) veranschaulicht werden können durch die Graphen.



c, d,



e,

Die Subnormalteilerverbände der verallgemeinerten Quaternionengruppen verschiedener Ordnungen sind natürlich untereinander nichtisomorph. Nach der Folgerung 2 aus Satz 9 hat die verallgemeinerte Quaternionengruppe mit keiner der Gruppen a), c), d), e) einen isomorphen Subnormalteilerverband. Nach Satz 7, 1. kann auch niemals der Subnormalteilerverband einer Gruppe a) zu dem einer der Gruppen c), d), e) isomorph sein, denn keine Gruppe a) besitzt einen Subnormalteiler, der eine Vierergruppe zur Faktorgruppe hat. Wir erkennen also: *Besitzen zwei der in Satz* 15 *aufgeführten Gruppen isomorphe Subnormalteilerverbände, so handelt es sich entweder um Gruppen der Gestalt* a) *oder um die Gruppen* c), d).

Satz 16. *Sämtliche verschiedenen Subnormalteiler (=Normalteiler) der Gruppe*

$$a^m = b^n = 1,\ a^{-1}ba = b^r \quad \textit{mit} \quad (m, n) = 1,\ r^m \equiv 1,\ (n) \tag{5}$$

sind

$$\langle a^{m_1}, b^{n_1}\rangle, \quad \textit{wo} \quad m_1 | m,\ n_1 | n,\ r^{m_1} \equiv 1,\ (n_1). \tag{6}$$

Beweis. G bezeichne die nach dem Satz von Hölder (s. z. B. Zassenhaus [5], S. 95) existierende Gruppe (5) der Ordnung $m \cdot n$. Auf Grund der Folgerung aus Satz 14 sind in G sämtliche Subnormalteiler normal. Daß die Untergruppe (6) normal ist in G, ergibt sich aus $\langle b^{n_1}\rangle \trianglelefteq G$ und

$$b^{-1}a^{m_1}b = a^{m_1}b^{1-r^{m_1}} \in \langle a^{m_1}, b^{n_1}\rangle. \tag{7}$$

Die Verschiedenheit der Untergruppen (6) ergibt sich aus der Verschiedenheit ihrer Ordnungen.

Sei nun N ein beliebiger Normalteiler von G. $N \cap \langle b\rangle$ ist Hallscher Normalteiler von N und besitzt die Gestalt $\langle b^{n_1}\rangle$ mit $n_1 | n$. Die Faktorgruppe $N/\langle b^{n_1}\rangle$ ist zyklisch und hat einen Teiler von m zur Ordnung. Da $\langle a, b^{n_1}\rangle / \langle b^{n_1}\rangle$ in $G/\langle b^{n_1}\rangle$ Hallsche Untergruppe der Ordnung m ist, umfaßt sie nach einem Satz von Ph. Hall (s. z. B. M. Hall [1], S. 141) eine zu $N/\langle b^{n_1}\rangle$ konjugierte Untergruppe und damit $N/\langle b^{n_1}\rangle$ selbst. Daraus folgt $N = \langle a^{m_1}, b^{n_1}\rangle$ mit einem Teiler m_1 von m. Wiederum muß die Beziehung (7) bestehen. Sie liefert $r^{m_1} \equiv 1,\ (n_1)$.

Satz 17. *Die auflösbaren Gruppen mit nur einer Kompositionsreihe sind gegeben durch:*

$$a^{p^m} = b^{q^n} = 1,\ a^{-1}ba = b^r,\ |\langle a, b\rangle| = p^m q^n$$

mit

verschiedenen Primzahlen p, q,
$m \geqq 0,\ n \geqq 0,\ n = 0$ *nur bei* $m = 0$,
$r^{p^i} \not\equiv 1,\ (q)$ *für* $i = 0, 1, \ldots, m-1$,
$r^{p^m} \equiv 1,\ (q^n)$.

Beweis. Daß die angegebenen Gruppen existieren und nur eine Kompositionsreihe besitzen, ergibt sich aus Satz 16.

Sei umgekehrt G eine auflösbare Gruppe mit nur einer Kompositionsreihe. Ist $G = 1$, so stimmt G mit der im Satz für $m = 0$, $n = 0$ aufgeführten Gruppe überein. Sei nun $G \neq 1$. Da G nur einen minimalen Subnormalteiler besitzt, können wir Satz 15 anwenden. Dieser Satz und die im Anschluß an ihn angestellten Betrachtungen über die Subnormalteilerverbände zeigen, daß G eine der dort aufgeführten Gruppen a) sein muß. Notwendigerweise ist dabei m Potenz einer Primzahl $p \neq q$. Aus Satz 16 erhalten wir jetzt die behauptete Gestalt für G.

Definition. Wir nennen eine Gruppe *sn-zyklisch*, wenn sie auflösbar ist und ihr Subnormalteilerverband zu dem einer zyklischen Gruppe isomorph ist.

Aus den Sätzen 5 und 17 geht hervor: *Die sn-zyklischen Gruppen decken sich mit denjenigen direkten Produkten* $A_1 \times \cdots \times A_n$, *bei denen die* A_i *Gruppen von der im Satz* 17 *genannten Art mit paarweise teilerfremden Ordnungen sind.*

§ 5. Übertragung von Gruppeneigenschaften

Sei $\mathfrak{N}$ eine Menge abstrakter Gruppen und $\mathfrak{M}$ Teilmenge von $\mathfrak{N}$. Man kann die Zugehörigkeit zu $\mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{N}$ als abstrakte Gruppeneigenschaft $\mathfrak{e}$ bzw. $\mathfrak{f}$ deuten. Wir wollen $\mathfrak{M}$ *sn-abgeschlossen innerhalb* $\mathfrak{N}$ und entsprechend $\mathfrak{e}$ *sn-abgeschlossen innerhalb* $\mathfrak{f}$ nennen, wenn aus $G \in \mathfrak{M}$, $G^* \in \mathfrak{N}$, $sn(G) \cong sn(G^*)$ folgt $G^* \in \mathfrak{M}$. Besteht $\mathfrak{M}$ aus nur einer Gruppe, so bedeutet die sn-Abgeschlossenheit von $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{N}$, daß die in $\mathfrak{M}$ gelegene Gruppe innerhalb der Gruppenmenge $\mathfrak{N}$ durch ihren Subnormalteilerverband bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist.

Wir haben in den §§ 2 und 3 schon Beispiele für sn-Abgeschlossenheit von $\mathfrak{e}$ in $\mathfrak{f}$ kennengelernt, nämlich: $\mathfrak{e}$ = eine sn-Zerlegung haben; $\mathfrak{f}$ = beliebige Gruppe sein; $\mathfrak{e}$ = elementar abelsche Gruppe gegebener Ordnung $p^n > p$ sein, $\mathfrak{f}$ = beliebige Gruppe sein: $\mathfrak{e}$ = nichtzyklische p-Gruppe sein, $\mathfrak{f}$ = auflösbare Gruppe sein; $\mathfrak{e}$ = verallgemeinerte Quaternionengruppe gegebener Ordnung 2^n sein, $\mathfrak{f}$ = auflösbare Gruppe sein.

Die Nilpotenz ist in der Auflösbarkeit nicht sn-abgeschlossen, wohl aber die aus Nilpotenz und Nichtzyklizität aller Sylowgruppen zusammengesetzte Gruppeneigenschaft, wie HEINEKEN ([2], S. 36) gezeigt hat. Man erhält dieses Ergebnis auch aus Satz 5 und Satz 9, Folgerung 1. vorliegender Arbeit. Es läßt sich überdies in einen allgemeineren Zusammenhang einordnen, der zugleich die Möglichkeit zur Bildung weiterer sn-abgeschlossener Gruppeneigenschaften in sich birgt.

Definition. Zu den Gruppeneigenschaften $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n$ bezeichne $\mathfrak{e}_1 \times \cdots \times \mathfrak{e}_n$ die Gruppeneigenschaft, sn-Produkt aus einer $\mathfrak{e}_1$-Gruppe, einer $\mathfrak{e}_2$-Gruppe, ..., einer $\mathfrak{e}_n$-Gruppe zu sein.

Diese Produktbildung ist offenbar assoziativ und kommutativ.

Satz 18. *Sind die Gruppeneigenschaften* $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n$ *sn-abgeschlossen in der Gruppeneigenschaft* $\mathfrak{f}$ *und überträgt sich* $\mathfrak{f}$ *auf Untergruppen, dann ist* $\mathfrak{e}_1 \times \cdots \times \mathfrak{e}_n$ *sn-abgeschlossen in* $\mathfrak{f}$.

BEWEIS. Sei G eine $(\mathfrak{e}_1 \times \cdots \times \mathfrak{e}_n)$-Gruppe, also eine sn-Zerlegung $G = A_1 \times \cdots \times A_n$ vorhanden, bei der A_i eine $\mathfrak{e}_i$-Gruppe ist für $i = 1, \ldots, n$. Weiter sei G^* eine $\mathfrak{f}$-Gruppe mit $sn(G) \cong sn(G^*)$. Dann ist nach Satz 5 $G^* = A_1^* \times \cdots \times A_n^*$ eine sn-Zerlegung und dabei $sn(A_i) \cong sn(A_i^*)$ für $i = 1, \ldots, n$. Da sich $\mathfrak{f}$ auf Untergruppen überträgt, ist A_i^* eine $\mathfrak{f}$-Gruppe, und da $\mathfrak{e}_i$ in $\mathfrak{f}$ sn-abgeschlossen ist, muß A_i^* sogar $\mathfrak{e}_i$-Gruppe sein $(i = 1, \ldots, n)$. Folglich ist G^* eine $(\mathfrak{e}_1 \times \cdots \times \mathfrak{e}_n)$-Gruppe.

Dieser Satz zeigt, daß innerhalb der Auflösbarkeit die sn-Abgeschlossenheit der Nilpotenz in Verbindung mit der Nichtzyklizität aller Sylowgruppen im wesentlichen beruht auf der sn-Abgeschlossenheit der Eigenschaft nichtzyklische p-Gruppe.

zu sein. Neben der Produktbildung gibt es noch weitere Möglichkeiten zur Bildung *sn*-abgeschlossener Gruppeneigenschaften. Ist z. B. $\mathfrak{N}$ wie oben erklärt, $\mathfrak{M}_0$ Teilmenge von $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{M}$ die Menge derjenigen Gruppen aus $\mathfrak{N}$, deren Subnormalteilerverband zu dem einer Gruppe aus $\mathfrak{M}_0$ isomorph ist, dann ist offenbar $\mathfrak{M}$ *sn*-abgeschlossen in $\mathfrak{N}$. Man könnte $\mathfrak{M}$ die *sn-Abschließung* von $\mathfrak{M}_0$ in $\mathfrak{N}$ nennen. So ist z. B. die *sn*-Abschließung der Zyklizität in der Auflösbarkeit die in § 4 erklärte *sn*-Zyklizität. Wir können nun auch das oben genannte Ergebnis von HEINEKEN erweitern indem wir auf die Forderung der Nichtzyklizität aller Sylowgruppen verzichten.

Satz 19. *Sei G nilpotent, $G = A \times B$, wobei A nur zyklische Sylowgruppen hat, B nur nichtzyklische und $(|A|, |B|) = 1$ gilt. Ferner sei G^* auflösbar mit $sn(G) \cong sn(G^*)$. Dann ist $G^* = A^* \times B^*$ und dabei A^* sn-zyklisch, B^* eine nilpotente Gruppe mit ausschließlich nichtzyklischen Sylowgruppen und $(|A^*|, |B^*|) = 1$.*

BEWEIS. Da $G = A \times B$ eine *sn*-Zerlegung ist, so ist nach Satz 5 auch $G^* = A^* \times B^*$ eine solche und dabei $sn(A) \cong sn(A^*)$, $sn(B) \cong sn(B^*)$. Es ist A^* offensichtlich *sn*-zyklisch und B^* nach HEINEKEN nilpotent mit lauter nichtzyklischen Sylowgruppen.

Bemerkung zu Satz 19. Bei vorgegebener Gruppe $G^* = A^* \times B^*$ der angegebenen Art kann man immer eine nilpotente Gruppe G finden mit $sn(G) \cong sn(G^*)$. Man wähle z. B. $B = B^*$. Für A^* besteht eine *sn*-Zerlegung $A^* = A_1^* \times \cdots \times A_n^*$, wo jeder Faktor A_i^* nur eine Kompositionsreihe besitzt. Wir wählen n Primzahlen $p_1, \ldots, p_n$, die untereinander und von den Primteilern von $|B|$ verschieden sind, und setzen $A = Z_{p_1^{k_1}} \times \cdots \times Z_{p_n^{k_n}}$, wo k_i die Anzahl der gleichen oder verschiedenen Primteiler in $|A_i^*|$ bedeutet $(i = 1, \ldots, n)$. Dann ist A zyklisch und das *sn*-Produkt $G = A \times B$ hat die in Satz 19 genannten Eigenschaften; ferner ist $sn(G) \cong sn(G^*)$ (s. Satz 5).

Bezeichnet $\mathfrak{a}$ die Auflösbarkeit, $\mathfrak{n}$ die Nilpotenz und $\mathfrak{c}$ die *sn*-Zyklizität, so ergibt sich aus Satz 19 samt Bemerkung, daß $\mathfrak{c} \times \mathfrak{n}$ die *sn*-Abschließung von $\mathfrak{n}$ in $\mathfrak{a}$ ist.

Eine weitere Verallgemeinerung des Ergebnisses von HEINEKEN über nilpotente Gruppen enthält

Satz 20. *Seien G und G^* auflösbar, ferner gelte $sn(G) \cong sn(G^*)$.*

1) *Ist N in G der größte nilpotente Normalteiler mit ausschließlich nichtzyklischen Sylowgruppen, so ist N^* in G^* der größte nilpotente Normalteiler mit ausschließlich nichtzyklischen Sylowgruppen.*

2) *Ist G/N die größte Faktorgruppe von G, welche nilpotent ist und ausschließlich nichtzyklische Sylowgruppen hat, so ist G^*/N^* die größte Faktorgruppe von G^*, welche nilpotent mit ausschließlich nichtzyklischen Sylowgruppen ist.*

BEWEIS. 1) Sei N wie im Satz beschrieben, $P_1, \ldots, P_n$ die Gesamtheit der verschiedenen Sylowgruppen von N und p_i Primteiler von $|P_i|$. Dann ist $N = P_1 \times \cdots \times P_n$ und P_i größter p_i-Normalteiler von G. Nach Satz 10 ist P_i^* größter p_i-Normalteiler von G^*, der übrigens wegen Satz 9, Folgerung 1. nicht zyklisch sein kann. Weiter gilt $N^* = P_1^* \times \cdots \times P_n^*$ auf Grund von Satz 5. Ist M^* in G^* der größte nilpotente Normalteiler mit lauter nichtzyklischen Sylowgruppen, so ist $M^* \supseteq N^*$ und nach dem soeben Gezeigten M nilpotenter Normalteiler von G mit nichtzyklischen Sylowgruppen. Es folgt schrittweise $M \leqq N$, $M^* \leqq N^*$, $M^* = N^*$.

2) Sei G/N wie im Satz beschrieben, $p_1, \ldots, p_n$ die Gesamtheit der verschiedenen Primteiler von $|G:N|$ und P_i ein solcher Normalteiler von G, daß G/P_i zu einer p_i-Sylowgruppe von G/N isomorph ist. Dann ist G/P_i nicht zyklisch und größte p_i-Faktorgruppe von G. Außerdem gilt $N = P_1 \cap \cdots \cap P_n$. Nach Satz 9 ist G^*/P_i^* größte p_i-Faktorgruppe von G^* und nicht zyklisch. Da $N^* = P_1^* \cap \cdots \cap P_n^*$, so ist G^*/N^* nilpotent. Die Sylowgruppen von G^*/N^* sind zu $G^*/P_1^*, \ldots, G^*/P_n^*$ isomorph, also nicht zyklisch. Ist nun G^*/M^* die größte Faktorgruppe von G^*, welche nilpotent ist mit nichtzyklischen Sylowgruppen, so gilt $M^* \leqq N^*$. Nach dem bisher Gezeigten ist $M \trianglelefteq G$ und G/M nilpotent mit nichtzyklischen Sylowgruppen. Nun folgt nacheinander $M \geqq N$, $M^* \geqq N^*$, $M^* = N^*$.

Bemerkungen zu Satz 20. In 1) ist $|N| = |N^*|$ und in 2) $|G:N| = |G^*:N^*|$. Es gilt nämlich für die im Beweis erklärten Gruppen P_i, P_i^* nach Satz 9, Folgerung 1. $|P_i| = |P_i^*|$ bei 1) bzw. $|G:P_i| = |G^*:P_i^*|$ bei 2) $(i = 1, \ldots, n)$.

Im nächsten Satz geben wir ein weiteres Beispiel für *sn*-Abgeschlossenheit.

Eine Gruppe heißt *zs-metazyklisch* (metazyklisch im Sinne von ZASSENHAUS), wenn ihre Sylowgruppen sämtlich zyklisch sind. Die *zs*-Metazyklizität überträgt sich auf Untergruppen und Faktorgruppen. Über die Struktur *zs*-metazyklischer Gruppen s. ZASSENHAUS [5], S. 139.

Satz 21. *zs-Metazyklizität ist in der Auflösbarkeit sn-abgeschlossen, d.h. ist G zs-metazyklisch, G^* auflösbar und $sn(G) \cong sn(G^*)$, dann ist G^* zs-metazyklisch.*

BEWEIS. Wir beweisen unter den genannten Voraussetzungen über G und G^* die *zs*-Metazyklizität von G^* durch Induktion nach $|G|$. Ist $G = 1$, so ist die Behauptung trivial richtig. Sei nun $G \neq 1$ und $p \mid |G^*|$. Hat G^* einen maximalen Normalteiler N^* mit $|G^*:N^*| \neq p$, dann liefert die auf N und N^* angewandte Induktionsvoraussetzung die Zyklizität der p-Sylowgruppen von G^*. Nun mögen alle maximalen Normalteiler von G^* den Index p haben.

Gäbe es in G^* zwei verschiedene maximale Normalteiler M_1^* und M_2^*, so wäre $G^*/M_1^* \cap M_2^*$ und damit nach Satz 7, 1) auch $G/M_1 \cap M_2$ elementar abelsch von der Ordnung p^2 und G besäße eine nichtzyklische p-Sylowgruppe. Also hat G^* nur einen maximalen Normalteiler, etwa M^*. Ist M^* p-Gruppe, dann ist G^* p-Gruppe mit genau einer maximalen Untergruppe und folglich zyklisch. Sei fortan M^* keine p-Gruppe, und damit auch $M^* \neq 1$. Da M^* nach Induktionsvoraussetzung *zs*-metazyklisch ist, so sind $M^*/M^{*\prime}$ und $M^{*\prime}$ zyklische Gruppen mit teilerfremden Ordnungen.

G^* habe einen minimalen Normalteiler L^* mit $p \nmid |L^*|$. Wäre L in G nicht normal, so läge L^* nach Satz 11 in einem nichtzyklischen elementar abelschen Subnormalteiler Q^* von G^*. Nach Satz 7, 2. wäre Q nichtzyklische elementar abelsche Untergruppe von G, was nicht sein kann. Also ist $L \trianglelefteq G$ und wir können auf G/L und G^*/L^* die Induktionsvoraussetzung anwenden, welche die Zyklizität der p-Sylowgruppen von G^* liefert.

Schließlich beweisen wir, daß die Annahme alle minimalen Normalteiler von G^* hätten p-Potenzordnung zu einem Widerspruch führt. Aus der Annahme ergäbe sich $1 < |M^{*\prime}| = p$-Potenz, $p \nmid |M^*:M^{*\prime}| > 1$. Da $G^*/M^{*\prime}$ nur maximale Normalteiler vom Index p enthalten darf (s. o.), müßte ferner $G^*/M^{*\prime}$ nichtabelsch sein. Für den Zentralisator C^* von $M^{*\prime}$ in G^* gälte

$$(8) \qquad M^* \cap C^* = M^{*\prime}, \quad M^{*\prime} < C^* < G^*,$$

denn aus $M^* \cap C^* > M^{*\prime}$ folgte die Existenz eines in M^* gelegenen minimalen Normalteilers von G^* mit zu p teilerfremder Ordnung; ferner lieferte die Nichtkommutativität von $G^*/M^{*\prime}$ zusammen mit der Tatsache, daß G^*/C^* zu einer Untergruppe der Automorphismengruppe von $M^{*\prime}$ isomorph und mithin abelsch ist, die Beziehung $M^{*\prime} \neq C^*$; schließlich führte $C^* = G^*$ zu $M^* \cap C^* > M^{*\prime}$. Zufolge (8) müßte C^* in einem von M^* verschiedenen minimalen Normalteiler von G^* liegen. Ein solcher ist jedoch nicht vorhanden.

Neben diesem unmittelbaren Induktionsbeweis kann ein etwas kürzerer unter Verwendung der Sätze 7, 11 und 15 geführt werden.

Eine gemeinsame Verallgemeinerung des Satzes von Heineken und Satz 21 enthält

Satz 22. *Seien G und G^* auflösbare Gruppen mit $sn(G) \cong sn(G^*)$.*

1. *Besitzt in G der größte nilpotente Normalteiler mit nichtzyklischen Sylowgruppen eine zs-metazyklische Faktorgruppe, so gilt dasselbe für G^*.*
2. *Ist in G der kleinste Normalteiler, dessen Faktorgruppe nilpotent mit nichtzyklischen Sylowgruppen ist, zs-metazyklisch, so gilt dasselbe für G^*.*

Beweis. Sätze 20 und 21.

Wir beweisen noch mit Hilfe der in den §§ 3 und 4 gewonnenen Ergebnisse den folgenden von Heineken ([2], S. 34) stammenden

Satz 23. *Die auflösbare Gruppe G enthalte Untergruppen M, N derart, daß $G \trianglerighteq M \trianglerighteq N$, G/M eine p'-Gruppe und M/N eine nichtzyklische p-Gruppe ist. Ferner sei G^* auflösbar und $sn(G) \cong sn(G^*)$. Dann bildet der Verbandsisomorphismus jeden p-Kompositionsfaktor von G auf einen p-Kompositionsfaktor von G^* ab.*

Beweis. Wir verwenden vollständige Induktion nach $|G|$ und werden häufig von der in einer beliebigen Gruppe für Untergruppen U, V mit $U \geqq V$ und Normalteiler W gültigen Beziehung

$$(9) \qquad |UW : VW| \cdot |U \cap W : V \cap W| = |U : V|$$

Gebrauch machen.

Ist G nichtzyklische p-Gruppe, so ergibt sich die Behauptung des Satzes aus Satz 9, Folgerung 1. Damit haben wir den Induktionsbeginn gesichert und können weiterhin annehmen, daß G keine p-Gruppe ist. Wir wählen Subnormalteiler K, L von G mit $K > L$, $|K:L| = p$ und haben zu zeigen, daß $|K^*:L^*| = p$ gilt. Es sei G/R die größte p'-Faktorgruppe von G, R/S die größte p-Faktorgruppe von R, P größter p-Normalteiler von G und Q größter p'-Normalteiler von G. Auf Grund der Sätze 8 und 12 sind alle Gruppen R^*, S^*, P^*, Q^* Normalteiler von G^*. Es ist $RN = M$, also $R/R \cap N \cong M/N$ und daher R/S nicht zyklisch. Wenn $R \neq G$, so kann auf R die Induktionsvoraussetzung angewendet werden. Wegen $p \nmid |G:R|$ muß auf Grund von (9) $|K \cap R : L \cap R| = p$ sein. Wir finden $|(K \cap R)^* : (L \cap R^*)| = |K^* \cap R^* : L^* \cap R^*| = p$ und weiter $|K^*:L^*| = p$.

Sei nunmehr $R=G$ und damit $Q \leqq S \neq 1$. Wir nehmen an, es gebe eine Untergruppe T mit $T \trianglelefteqq G$, $T^* \trianglelefteqq G^*$, $1 < T \leqq S$, $KT \neq LT$. Dann kann auf G/T und G^*/T^* die Induktionsvoraussetzung angewendet werden. Da wegen (9) gilt $|KT:LT|=p$, bekommen wir $|(KT)^*:(LT)^*|=|K^*T^*:L^*T^*|=p$ und daraus weiter $|K^*:L^*|=p$. Nun sei keine Untergruppe T der oben genannten Art vorhanden. Insbesondere muß dann $Q=1$ sein, so daß P alle minimalen Normalteiler von G enthält. Da hiernach $S \cap P \neq 1$ ist, muß wegen $(S \cap P)^* = S^* \cap P^* \trianglelefteqq G^*$ außerdem $K(S \cap P) = L(S \cap P)$ gelten. Letzteres zieht auf Grund von (9) $|K \cap S \cap P : L \cap S \cap P| = p$ nach sich. Ist P nicht zyklisch, so ist P^* nach Satz 9, Folgerung 1. eine p-Gruppe und daher $|(K \cap S \cap P)^* : (L \cap S \cap P)^*| = p$. Es folgt wieder mittels (9) die Beziehung $|K^*:L^*|=p$.

Ist schließlich P zyklisch, dann besitzt G nur einen minimalen Subnormalteiler, und unsere Behauptung ergibt sich aus Satz 15 samt den daran anschließenden Betrachtungen.

Die in Satz 23 genannten Voraussetzungen über gewisse Faktorgruppen können, wie Heineken ([2], S. 36) an Hand eines Beispiels gezeigt hat, nicht durch analoge Forderungen über Normalteiler ersetzt werden. Hier scheint eine Unsymmetrie zwischen Faktorgruppe und Normalteiler hinsichtlich ihres Verhaltens im Subnormalteilerverband erkennbar zu werden. Sie zeigt sich auch in folgendem

Satz 24. *Die Gruppeneigenschaft, einen zs-metazyklischen Hallnormalteiler mit nilpotenter Faktorgruppe zu besitzen, ist in der Auflösbarkeit sn-abgeschlossen.*

Beweis. Wegen Satz 21 können wir uns auf den Fall beschränken, daß G nicht *zs*-metazyklisch ist. Sei M *zs*-metazyklischer Hallscher Normalteiler von G mit nilpotenter Faktorgruppe G/M, G^* auflösbar und $sn(G) \cong sn(G^*)$. Es existiert eine Untergruppe N, für die $G \trianglerighteq N \geqq M$ gilt und G/N, N/M Gruppen mit teilerfremden Ordnungen sind, von denen die erste ausschließlich nichtzyklische und die zweite ausschließlich zyklische Sylowgruppen besitzt. N ist ein *zs*-metazyklischer Hallscher Normalteiler von G, ferner G/N die größte nilpotente Faktorgruppe mit nichtzyklischen Sylowgruppen von G.

Auf Grund der Sätze 20, 2. und 21 ist $N^* \trianglelefteqq G^*$, G^*/N^* eine Gruppe mit nur nichtzyklischen Sylowgruppen und N^* *zs*-metazyklisch. Wäre N^* keine Hallgruppe in G, so gäbe es eine Primzahl p mit $p \,\|\, |G^*:N^*|$, $p \,|\, |N^*|$. Wegen der Struktur von G^*/N^* könnten wir Satz 23 mit G^* an Stelle von G anwenden und erhielten $p \,\|\, |G:N|$, $p \,|\, |N|$ gegen die Halleigenschaft von N in G.

Daß Satz 24 nicht mehr richtig bleibt, wenn man die dort genannten Voraussetzungen über Normalteiler und Faktorgruppe vertauscht, zeigt folgendes

Beispiel. Es gibt Gruppen H der Ordnung $2^{12} \cdot 13 \cdot p$ mit $|H'| = 2^{12} \cdot 13$, $|H''|=2^{12}$. Sie alle haben isomorphe Subnormalteilerverbände. Die möglichen Werte für p sind hierbei $p=3$, dann werde $H=G$ gesetzt, und $p=2$, dann sei $H=G^*$.

Literatur

[1] M. HALL, The theory of groups. *New York,* 1959.
[2] H. HEINEKEN, Über die Charakterisierung von Gruppen durch gewisse Untergruppenverbände. *Journ. f. Math.* **220** (1965), 30—36.
[3] B. HUPPERT, Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen. *Math. Zeitschr.* **60** (1954), 409—434.
[4] M. SUZUKI, Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups. *Berlin—Göttingen—Heidelberg,* 1956.
[5] H. ZASSENHAUS, Lehrbuch der Gruppentheorie. I. *Leipzig* und *Berlin* 1937.

(Eingegangen am 16. März 1970.)