Publ. Math. Debrecen
49 / 1-2 (1996), 167–175

Über die Zerlegungsgleichheit nichtbeschränkter Polyeder

By S. KÁNTOR (Debrecen)

Abstract. We define the measure of unbounded polyhedra in two-dimensional and in three-dimensional euclidean space. We prove that in two-dimensional space polyhedra of equal measure are equidissectable, while in the three-dimensional case they are equidissectable up to a bounded polyhedron.

1. Einleitung

Die übliche Definition des Flächeninhaltes eines Polyeders in der euklidischen Ebene steht mit unserer Anschauung in Einklang, da nach dem Zerlegungssatz von Farkas Bolyai [1] zwei Polygone gleichen Flächeninhalts in paarweise kongruente Polygone zerlegt werden können.

In der vorliegenden Arbeit definieren wir als eine Verallgemeinerung des beschränkten Polyeders im euklidischen Raum gewisse Konfigurationen, und zwar sogenannte Simplexe, Polyeder und Schraubenpolyeder, und ordnen diesen einen Index und ein Maß zu.

Wir zeigen, daß im zweidimensionalen Raum Polyeder gleichen Indexes und gleichen Maßes immer zerlegungsgleich sind. Die Teilmengen in den Zerlegungen sind immer Polyeder, und die Bewegungen sind eigentlich.

Im dreidimensionalen Raum sind Polyeder gleichen Indexes und gleichen Maßes von einem beschränkten Polyeder abgesehen zerlegungsgleich. Die Teilmengen in den Zerlegungen sind Polyeder bzw. Schraubenpolyeder, und die Bewegungen sind eigentlich.

Unterstüzt von OTKA T-016846.

2. Simplex

Ein Simplex S im n-dimensionalen euklidischen Raum E_n kann man durch die Vektoren $(p, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ angeben, wo die Vektoren $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ linear unabhängig sind. Die Punktmenge s des Simplexes S ist in der Form

$$s = p + \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_n a_n$$

darstellbar, wo die Koeffizienten α_i die folgenden Bedingungen mit einer fest gewählten ganzen Zahl k $(0 \leq k \leq n)$ erfüllen:

$$1 \geq \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_{n-k} \geq 0, \quad \alpha_{n-k+1} \geq 0, \ldots, \alpha_n \geq 0.$$

Zu einem Simplex S gehören also zwei Zahlen: Die Dimension $D(S) = n$, und der Index $I(S) = k$, einfacherweise $S(n,k)$. Die Zahl $D(S)$ ist gleich der Zahl der Vektoren a_i, die Zahl $I(S)$ ist gleich der Zahl der nichtbeschränkten Koeffizienten α_i.

Die Typen der Simplexe im zwei- und im dreidimensionalen Raum heißen:

$S(2,0)$: Dreieck; $S(2,1)$: Halbstreifen; $S(2,2)$: Winkel;
$S(3,0)$: Tetraeder; $S(3,1)$: Halbprisma; $S(3,2)$: Keil; $S(3,3)$: Trieder.

Wir definieren das *Maß* $M(S)$ dieser Simplexe mit Hilfe des Gramschen Funktionals $G(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (\det \|(a_i, a_j)\|)^{\frac{1}{2}}$ und des Winkels $W(a_i, a_j)$:

$$M(S(2,0)) = \frac{1}{2} G(a_1, a_2); \qquad M(S(2,1)) = \frac{G(a_1, a_2)}{G(a_2)};$$

$$M(S(2,2)) = \frac{1}{2} W(a_1, a_2); \qquad M(S(3,0)) = \frac{1}{6} G(a_1, a_2, a_3);$$

$$M(S(3,1)) = \frac{G(a_1, a_2, a_3)}{2G(a_3)}; \quad M(S(3,2)) = \frac{G(a_1, a_2, a_3)}{2G(a_2, a_3)} W(a_2, a_3).$$

$3M(S(3,3))$ ist gleich dem Flächeninhalt des Kugeldreiecks, den die Einheitsvektoren (a_1^0, a_2^0, a_3^0) auf der Kugeloberfläche mit Einheitsradius im Zentrum bestimmen.

3. Polyeder

Die Menge $\overline{A}$ ist die Menge A mit seinen Randpunkten. Die Mengen A und B nennen wir *fremd*, wenn $\operatorname{int}(A \cap B) = \emptyset$ ist.

Eine Punktmenge P im Raum E_n, die sich als Vereinigung endlich vieler n-dimensionaler Simplexe darstellen läßt, heißt *Polyeder*. Die Dimension $D(P)$ des Polyeders P ist gleich n.

Satz 1. *Ein Polyeder läßt sich im Sinne der Elementargeometrie in endlich viele Simplexe S_i ($D(S_i) = n$) zerlegen, symbolisch durch*

$$(*) \qquad P = \bigcup_{i=1}^{m} S_i \ (\operatorname{int}(S_i \cap S_j) = \emptyset,\ i \neq j)$$

ausgedrückt.

Beweis. Wir müssen einsehen, daß die Mengen $\overline{A \setminus B}$ und $\overline{A \setminus \bigcup_{i=1}^{r} B_i}$ (A, B, B_i sind Simplexe) als Vereinigung fremder Simplexe darstellbar sind. So können wir den Satz 1. mit vollständiger Induktion beweisen. Wir benutzen diesen Satz nur im zwei- und im dreidimensionalen Raum, wo der Beweis einfach ist. □

Den *Index* $I(P)$ und *das Maß* $M(P)$ *eines Polyeders* $P = \bigcup_{i=1}^{m} S_i$ $(\operatorname{int}(S_i \cap S_j) = \emptyset, i \neq j)$ definieren wir mit den Gleichungen

$$I(P) = \max I(S_i), \quad M(P) = \sum_{i: I(S_i) = I(P)} M(S_i).$$

Bemerkung. $F(P \cap K_r)$ bezeichnet den Flächeninhalt (bzw. das Volumen) des Durschnitts von P und der Kreisscheibe K_r (bzw. der Kugel K_r) von Radius r um den Ursprung. Es gilt

$$M(P) = \lim_{r \to \infty} F(P \cap K_r) r^{-I(P)},$$

wenn der Grenzwert größer als 0 und endlich ist.

Satz 2. *Die Zahlen $I(P)$ und $M(P)$ sind zerlegungsinvariant: aus*

$$P = \bigcup_{i=1}^{r} S'_i = \bigcup_{i=1}^{s} S''_i \quad (\operatorname{int}(S'_i \cap S'_j) = \emptyset,\ \operatorname{int}(S''_i \cap S''_j) = \emptyset,\ i \neq j)$$

folgen $\qquad \max I(S'_i) = \max I(S''_i) \qquad$ *und*

$$\sum_{i: I(S'_i) = \max I(S'_i)} M(S'_i) = \sum_{i: I(S''_i) = \max I(S''_i)} M(S''_i).$$

Beweis. Es sei $A_{ij} = S'_i \cap S''_j = \bigcup_{k=1}^{m} A_{ijk}$ $(\operatorname{int}(A_{ijk} \cap A_{ij\ell}) = \emptyset,\ k \neq \ell)$. $\bigcup A_{ijk}$ $(i, j, k, : \operatorname{int}(A_{ijk}) \neq \emptyset)$ ist eine Simplexzerlegung von P, und

$$\max I(S'_i) = \max I(A_{ijk}) = \max I(S''_j).$$

Nach einer Übersicht der Typen der Simplexe können wir sagen, daß das Maß des Simplexes zerlegungsinvariant ist. Mit den Gleichungen

$$\sum_{i\colon I(S'_i)=I(P)} M(S'_i) = \sum_{i\colon I(S'_i)=I(P)} \Big(\sum_{jk\colon I(A_{ijk})=I(P)} M(A_{ijk})\Big)$$
$$= \sum_{j\colon I(S''_j)=I(P)} \Big(\sum_{ik\colon I(A_{ijk})=I(P)} M(A_{ijk})\Big) = \sum_{j\colon I(S''_j)=I(P)} M(S''_j)$$

ist der Satz 2. bewiesen. □

4. Zerlegungsgleichheit der Polyeder

Zwei Polyeder A und B heißen *zerlegungsgleich*, in Zeichen $A \sim B$, wenn Polyeder A_i, B_i, $(i = 1, 2, \dots, m)$ existieren, so daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind ($\cong$ bedeutet Kongruenz):

$$A = \bigcup_{i=1}^m A_i, \quad B = \bigcup_{i=1}^m B_i, \quad A_i \cong B_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$
$$\operatorname{int}(A_i \cap A_j) = \emptyset, \quad \operatorname{int}(B_i \cap B_j) = \emptyset \quad (i \neq j).$$

Nach dem Satz 1. können wir voraussetzen, daß die Teilmengen der Zerlegungen Simplexe sind.

Satz 3. *Die Zerlegungsgleichheit der Polyeder ist eine Äquivalenzrelation.*

Beweis. Einzig der Beweis für die Transitivität ist nicht trivial. Seien $A \sim B$ und $B \sim C$, mit den Teilmengen A_i, B_i $(i = 1, 2, \dots, m)$ bzw. B^j, C^j $(j = 1, 2, \dots, n)$. Es ist leicht einzusehen, daß mit geeigneten Simplexen B_{ijk}

$$B_{ij} = B_i \cap B^j = \bigcup_{k=1}^r B_{ijk} \ (\operatorname{int}(B_{ijk} \cap B_{ijl}) = \emptyset, \quad k \neq \ell)$$

ist. So ist $A \sim C$ mit den Teilmengen, die mit den Simplexen B_{ijk} kongruent sind. □

Satz 4. *Die Polyeder A und B im Raum E_2 $(D(A) = D(B) = 2)$ sind dann und nur dann zerlegungsgleich, wenn $I(A) = I(B)$ und $M(A) = M(B)$ sind.*

Beweis. a.) Es seien $I(A) = I(B)$ und $M(A) = M(B)$.

1. Fall: $I(A) = 0$. Nach dem Satz von F. Bolyai gilt $A \sim B$.

2. Fall: $I(A) = 1$. In der Simplexzerlegung $(*)$ des Polyeders A sind

$$I(S_i) = 1 \ (i \leq k), \quad I(S_i) = 0 \ (i > k).$$

Es existiert ein Halbstreifen $H(h, h_1, h_2)$ mit der Eigenschaft $M(H) = \sum_{i:I(S_i)=1} M(S_i) = M(A)$. Die mit dem Vektor h_2 parallelen Geraden zerlegen den Halbstreifen H in die Halbstreifen H_i so, daß $H = \bigcup_{i=1}^{k} H_i$ $(\mathrm{int}(H_i \cap H_j) = \emptyset, i \neq j)$ und $M(H_i) = M(S_i)$ $(i \leq k)$ sind.

Es sei ferner $H_1 = H_1' \cup H_1''$, wo H_1' ein Dreieck, H_1'' ein Halbstreifen $(\mathrm{int}(H_1' \cap H_1'') = \emptyset)$ ist, und $M(H_1') = \sum_{i=k+1}^{m} M(S_i)$ gilt. Weil

$$H_1'' \sim S_1, \quad H_i \sim S_i \ (i = 2, \ldots, k), \quad H_1' \sim \bigcup_{i=k+1}^{m} S_i$$

gelten und die Zerlegungsgleichheit additiv ist, gilt $A \sim H$. Ähnlich kann man beweisen, daß $B \sim H$, also $A \sim B$ gilt.

3. Fall: $I(A) = 2$. Wir können voraussetzen, daß in der Simplexzerlegung $(*)$ des Polyeders A ein Halbstreifen existiert. Es sei

$$I(S_i) = 2 \ (i \leq k), \quad I(S_i) < 2 \ (i > k).$$

Ein Winkel W_1 und ein Halbstreifen H existieren, so daß

$$S_1 = W_1 \cup H \ (\mathrm{int}(W_1 \cap H) = \emptyset), \quad M(S_1) = M(W_1),$$

$H \sim \bigcup_{i:I(S_i)<2} S_i$, $W_1 \sim S_1$, $A \sim W$ gelten, wobei W ein Winkelbereich ist (das auch nicht kleiner als $\frac{\pi}{2}$ sein darf). Ähnlich kann man beweisen, daß $W \sim B$, also $A \sim B$ gilt.

b.) Wenn $A \sim B$ ist, folgen $I(A) = I(B)$ und $M(A) = M(B)$. $\square$

Satz 5. *Wenn die Polyeder A und B im Raum E_3 $(D(A) = D(B) = 3)$ zerlegungsgleich sind, gelten $I(A) = I(B)$ und $M(A) = M(B)$.*

Beweis. Die Behauptung folgt aus der Voraussetzung, daß die Teilmengen in der Definition der Zerlegungsgleichheit Simplexe sind. $\square$

Wir sagen, daß zwei Polyeder A und B im Raum E_3 *von einem beschränkten Polyeder abgesehen zerlegungsgleich* sind, wenn Polyeder A' und B' mit den Eigenschaften:

$$D(A') = D(B') = 3, \quad I(A') = I(B') = 0, \quad \overline{A \setminus A'} \sim \overline{B \setminus B'}$$

existieren. In Zeichen: $A(\sim, 0)B$.

Satz 6. *Die Zerlegungsgleichheit $A(\sim,0)B$ ist eine Äquivalenzrelation.*

Beweis. Es genügt, Folgendes zu bemerken: wenn $\overline{A\setminus A'}\sim\overline{B\setminus B'}$, $\overline{B\setminus B''}\sim\overline{C\setminus C'}$ gelten, dann gilt für geeignete Polyeder A_1,C_1 mit den gleichen Eigenschaften auch $\overline{A\setminus A_1}\sim\overline{B\setminus(B'\cup B'')}\sim\overline{C\setminus C_1}$. □

Jetzt konstruieren wir eine Menge P_s im Raum E_3, den sogenannten *Schraubenpolyeder*, dieser spielt bei der Untersuchung des Keils eine wichtige Rolle.

Ein Schraubenpolyeder P_s kann man durch die Vektoren (p,a_1,a_2,a_3) angeben, wo die Vektoren (a_1,a_2,a_3) linear unabhängig sind, und

$$(a_1,a_2)=(a_1,a_3)=0,\quad |a_2|=|a_3|=1,\quad W(a_2,a_3)<\frac{\pi}{2}$$

gelten. Die Punktmenge p_s des Schraubenpolyeders ist in der Form

$$p_s=p+\tau_1a_1+(\tau_2\sin(W(a_2,a_3)-\varphi))a_2+(\tau_2\sin\varphi)a_3,$$
$$W(a_2,a_3)\ge\varphi\ge0,\quad \varphi W^{-1}(a_2,a_3)\ge\tau_1\ge0,\quad \tau_2\ge0$$

darstellbar. Den Schraubenpolyeder begrenzen einen Winkel, einen Halbstreifen und eine Schraubenoberfläche. Laut Definition seien:

$$D(P_s)=3,\quad I(P_s)=2,\quad M(P_s)=\frac{1}{4}|a_1|W(a_2,a_3).$$

Wenn $A\sim B$ (bzw. $A(\sim,0)B$) und die Teilmenge nicht nur Polyeder, sondern auch Schraubenpolyeder sind, aber die Vereinigung der Schraubenpolyeder von A und auch die Vereinigung der Schraubenpolyeder von B Keile sind, dann sagen wir, daß diese Zerlegungsgleichheit eine Zerlegungsgleichheit mit Schraubenpolyedern ist. In Zeichen: $(A\ \sim,P_s)B$ (bzw. $A(\sim,0,P_s)B$).

Satz 7. *Wenn für die Polyeder A und B im Raum E_3 ($D(A)=D(B)=3$) $I(A)>0$ und $A(\sim,0)B$ oder $A(\sim,P_s)B$ oder $A(\sim,0,P_s)B$ sind, gelten $I(A)=I(B)$ und $M(A)=M(B)$.*

Beweis. Ähnlich, wie der Beweis des Satzes 5. □

Satz 8. *Wenn für die Polyeder A und B im Raum E_3 $I(A)=I(B)$ und $M(A)=M(B)$ gelten, dann ist $A(\sim,0)B$ im Falle $I(A)=I(B)\neq2$, und $A(\sim,0,P_s)B$ im Falle $I(A)=I(B)=2$.*

Die Beweise der folgende Hilfssätze sind einfach, weil sie bekannte Sätze benutzen.

Hilfssatz 1. Wenn die Halbprismen S und S' gerade sind (ein Halbprisma nennen wir gerade, wenn für seine Vektoren (a_1, a_2, a_3) die Bedingung $(a_1, a_3) = (a_2, a_3) = 0$ erfüllt ist) und $M(S) = M(S')$ ist, dann gilt $S \sim S'$.

Beweis. Trivial, weil mit dem Dreieck (a_1, a_2) von S bzw. mit dem Dreieck (a_1', a_2') von S' kongruente, komplanare Dreiecke D bzw. D' zerlegungsgleich sind, wo die Kongruenzen (eigentliche) Bewegungen sind. □

Hilfssatz 2. Wenn zwei Keile S und S' gerade sind (ein Keil ist gerade, wenn für die Vektoren (a_1, a_2, a_3) die Bedingung $(a_1, a_2) = (a_1, a_3) = 0$ erfüllt ist) und $M(S) = M(S')$ ist, dann gilt $S(\sim, P_s)S'$.

Beweis. Es ist leicht einzusehen, daß das Zylinderpolygon P (und ähnlich P'), das der Durchschnitt von S (bzw. S') mit dem Mantel desjenigen geraden Kreiszylinders ist, dessen Achse die Gerade des Vektors a_1 ist, der den Einheitskreis als Grundkreis hat, den Flächeninhalt $2M(S)$ (bzw. $2M(S')$) besitzt. Diese rechteckigen Zylinderpolygone P und P' sind zerlegungsgleich, und wir können voraussetzen, daß die Teilmengen rechteckige Zylinderdreiecke sind. Eine Seite jedes Dreiecks ist mit der Zylinderachse parallel, eine andere Seite liegt in der auf die Zylinderachse orthogonale Ebene.

Diese Voraussetzung folgt aus dem Beweis des Satzes von Bolyai [8]. Der Hauptteil dieses Beweises ist eine zweckmäßige Zerlegung der rechteckigen Polygone gleichen Maßes, und wir bemerken, daß wir die Teilmengen in rechteckige Dreiecke zerlegen können. Die Kongruenzen sind (eigentliche) Bewegungen. Daraus folgt $S(\sim, P_s)S'$. □

Hilfssatz 3. Aus $M(S_1(3,3)) = M(S_2(3,3))$ folgt $S_1 \sim S_2$.

Beweis. Trivial, weil die Kugeldreiecke gleichen Maßes zerlegungsgleich sind, wo die Kongruenzen (eigentliche) Bewegungen sind [2]. □

Hilfssatz 4. Wenn für die Simplexe S und S' im Raum E_3 $I(S) > I(S')$ $(\mathrm{int}(S \cap S') = \emptyset)$ gilt, dann ist $(S \cup S')$ $(\sim, 0)S$.

Beweis. Wir behandeln nur zwei Fälle, weil die Fälle mit $I(S') = 0$ trivial sind, und der Fall $I(S) = 3, I(S') = 1$ aus diesen zwei Fällen folgt.

1. Fall: $I(S) = 2, I(S') = 1$. Wir bezeichnen die Vektoren des Simplexes S mit (p, a_1, a_2, a_3). Für die Zahl λ gelte $M(S') =$

$G(a_1, \lambda a_2, a_3)G^{-1}(a_3)$. Die Simplexe $S_1(3,1)$ $(p, a_1, \lambda a_2, a_3)$ bzw. $S_2(3,1)$ $(p, \lambda a_2, a_1, a_3)$ und S' können wir in der Form

$$S_1 = S^1 \cup P^1, S_2 = S^2 \cup P^2, S' = S'' \cup P',$$
$$(\mathrm{int}(S^1 \cap P^1) = \emptyset,\ \mathrm{int}(S^2 \cap P^2) = \emptyset,\ \mathrm{int}(S'' \cap P') = \emptyset)$$

darstellen, wo S^1, S^2, S'' gerade Halbprismen, P^1, P^2, P' beschränkte Polyeder sind.

Wegen $S \cong S^*(p + \lambda a_2, a_1, a_2, a_3)$, $S'' \sim (S^1 \cup S^2)$,

$$\overline{S \setminus (P^1 \cup P^2)} = S^* \cup (S^1 \cup S^2) \sim S \cup S'' = S \cup \overline{(S' \setminus P')} = \overline{(S \cup S') \setminus P'}$$

gilt $S(\sim, 0)$ $(S \cup S')$.

2. Fall: $I(S) = 3, I(S') = 2$. Wir bezeichnen die Vektoren des Simplexes S' mit (p', a_1', a_2', a_3'). Es existieren Simplexe $R(r, b_1, b_2, b_3)$ bzw. $S_\lambda(r, \lambda b_1, b_2, b_3)$, der Typen $(3,3)$ bzw. $(3,2)$ so, daß $\lambda > 0$, $W(a_2', a_3') = W(b_2, b_3)$ und $M(R) = M(S)$ bzw. $M(S_\lambda) = M(S')$ sind.

Nach Hilfsatz 3. gilt $S \sim R$. Es ist leicht einzusehen, daß man die Simplexe S' und S_λ in der Form $S' = S'' \cup S_1' \cup S_2' \cup P'$ und $S_\lambda = S_\lambda'' \cup S_1 \cup S_2 \cup P$ zerlegen kann, wo die Simplexe S_1', S_2', S_1, S_2 die Gleichungen $I(S_1') = I(S_2') = I(S_1) = I(S_2) = 1$ erfüllen, die Simplexe S'' und S_λ'' des Typus $(3,2)$ gerade, die Polyeder P' und P beschränkt sind.

Wegen $S \sim R \cong S^*(r + \lambda b_1, b_1, b_2, b_3), R = S^* \cup S_\lambda, S'' \cong S_\lambda''$ haben wir für ein beschränktes Polyeder P_1

$$\overline{S \setminus P_1} \sim \overline{R \setminus P} = S^* \cup S_\lambda'' \cup S_1 \cup S_2 \sim S^* \cup S_\lambda'' \cong S^* \cup S'' \sim$$
$$\sim R \cup S'' \cup S_1' \cup S_2' = R \cup \overline{(S' \setminus P')} \sim S \cup \overline{(S' \setminus P')} \sim \overline{(S \cup S') \setminus P'}$$

falls $S(\sim, 0)(S \cup S')$ gilt. □

Beweis des Satzes 8. Wir können voraussetzen, daß $I(A) = I(B) > 0$ ist. Die Simplexzerlegungen der Polyeder A und B seien:

$$A = \bigcup\nolimits_{i=1}^{n} S_i \quad (I(S_i) = I(A)\ (i \le k);\ I(S_i) < I(A)\ (i > k))$$
$$B = \bigcup\nolimits_{i=i}^{m} S_i' \quad (I(S_i') = I(B)\ (i \le k');\ I(S_i') < I(B)\ (i > k')).$$

Wir können voraussetzen, daß die Simplexe S_i und S_i' gerade sind, falls $I(S_i)$ und $I(S_i')$ größer als 0 und kleiner als 3 sind.

$$A = \bigcup\nolimits_{i=1}^{n} S_i = S_1 \cup (\bigcup\nolimits_{i=2}^{k} S_i) \cup (\bigcup\nolimits_{i=k+1}^{n} S_i)\ (\sim, 0)\ S_1 \cup (\bigcup\nolimits_{i=2}^{k} S_i) = \bigcup\nolimits_{i=1}^{k} S_i$$
$$B = \bigcup\nolimits_{i=1}^{m} S_i' = S_1' \cup (\bigcup\nolimits_{i=2}^{k'} S_i') \cup (\bigcup\nolimits_{i=k'+1}^{m} S_i')\ (\sim, 0)\ S_1' \cup (\bigcup\nolimits_{i=2}^{k'} S_i') = \bigcup\nolimits_{i=1}^{k'} S_i'$$

Wenn $I(A) = I(B) \neq 2$ ist, gelten $(\bigcup_{i=1}^{k} S_i) \sim C \sim (\bigcup_{i=1}^{k'} S'_i)$, also $A(\sim, 0)B$, wo für $I(A) = 1$ C ein gerades Simplex des Typus $(3, 1)$ ist, während für $I(A) = 3$ C der Form $\{\lambda x \mid 0 \leq \lambda \leq \infty, x \in D\}$ ist, wo D ein sphärisches Digon vom Winkel höchstens 2π ist.

Wenn $I(A) = I(B) = 2$ ist, gelten $(\bigcup_{i=1}^{k} S_i)$ $(\sim, P_s)$ $S(\sim, P_s)$ $(\bigcup_{i=1}^{k'} S'_i)$, also $A(\sim, 0, P_s)B$. $\square$

Literaturverzeichnis

[1] F. Bolyai, Tentamen. II., *Zweite Auflage*, *Budapest*, 1897.

[2] W. G. Boltjanski, Das Dritte Problem von Hilbert, *Moskau*, 1977, (*russisch*).

[3] H. Hadwiger, Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie, *Berlin – Göttingen – Heidelberg*, 1957.

[4] E. Hertel, Ein algebraischer Begriff des invarianten Maßes und invariante Integration in abstrakten Räumen, *Math. Nachr.* **88** (1979), 307–313.

[5] S. Kántor, Über die Zerlegungsgleichheit nichtbeschränkter Mengen, *Analele Universităţii Din Oradea*, *Oradea*, 1991.

[6] M. Réthy, Zerlegungsgleiche ebene Bereiche, *Math. Phys. L.* **2** (1893), 1–15, (*ungarisch*).

[7] P.-M. Schmidt, Zerlegungs- und Ergänzungsgleichheit von quasikompakten Punktmengen bezüglich diskreter Transformationsgruppen, *Beitr. Alg. u. Geom.* **22** (1986), 125–142.

[8] B. Szénássy, History of mathematics in Hungary until the 20th century, *Akadémiai Kiadó*, *Budapest*, 1992.

SÁNDOR KÁNTOR
INSTITUTE OF MATHEMATICS AND INFORMATICS
LAJOS KOSSUTH UNIVERSITY
H–4010 DEBRECEN, P.O.BOX 12
HUNGARY

(Eingegagen am 16. November 1995.)