О групповых кольцах конечных групп II.*

А. И. САКСОНОВ (Харьков)

Групповые алгебры конечных групп над нехарактеристическими полями

§ 1. Предварительные сведения

Пусть **K** — произвольное поле, характеристика которого не делит порядка группы G (нехарактеристическое поле). Групповая алгебра **K**G группы G над полем **K** полупроста и разлагается в ортогональную сумму минимальных двусторонних идеалов:

$$\mathbf{K}G \cong \mathfrak{A}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{A}_t, \tag{16}$$

где каждая подалгебра $\mathfrak{A}_i$ $(i=1, \ldots, t)$ изоморфна полной матричной алгебре над подходящим телом D_i индекса m_i. Разложение (16) индуцирует разбиение множества всех абсолютно неприводимых характеров группы G на непересекающиеся семейства характеров, алгебраически сопряженных относительно поля **K**. Если η_i — характер неприводимого **K**-представления группы G, реализуемого в минимальном левом идеале алгебры $\mathfrak{A}_i$, то разложение этого характера в сумму абсолютно неприводимых имеет вид

$$\eta_i = m_i \sum_{j=1}^{\mathbf{z}_i} \chi_{ij},$$

где суммирование ведется по всем характерам i-го семейства. Индекс Шура $m_{\mathbf{K}}(\chi_{ij})$ любого из характеров i-го семейства (т. е. при произвольном $j=1, \ldots, \mathbf{z}_i$) относительно поля **K** равен индексу m_i тела D_i, а центр тела D_i изоморфен полю $\mathbf{K}(\chi_{ij})$ при любом $j=1, \ldots, \mathbf{z}_i$.

Поле **K** мы называем полем расщепления группы G (или ее групповой алгебры), если все компоненты в (16) являются полными матричными алгебрами над некоторыми (коммутативными) расширениями поля **K**. Характеристические свойство поля расщепления **K** группы G: индекс Шура $m_{\mathbf{K}}(\chi)$ любого абсолютно неприводимого характера χ группы G относительно поля **K** равен 1. Аналогично определяется поле расщепления данного абсолютно неприводимого характера χ группы G.

---

* 1-ю часть статьи и общий список литературы см. в предыдущем номере журнала.

Известно (см., например, [28], теорема A), что групповая алгебра $\mathbf{K}G$ конечной группы G над произвольным нехарактеристическим полем $\mathbf{K}$ с точностью до изоморфизма определяется рациональной групповой алгеброй QG. При изучении же последней основную трудность представляет выяснение строения тел D_i и, в частности, указание их полей расщепления, алгебраических и локальных. Таким образом, в теории немодулярных групповых алгебр замена числовых полей произвольным нехарактеристическим полем дает лишь иллюзорное обобщение, и в дальнейшем мы ограничиваемся рассмотрением алгебр над числовыми полями.

Необходимые читателю сведения из арифметической теории простых алгебр над числовыми полями можно найти в [18]. Оттуда же заимствбваны соответствующие обозначения.

Излагая в этом параграфе некоторые известные результаты арифметической теории представлений конечных групп, мы приводим отдельные доказательства, поскольку ниже ссылаемся на них.

Лемма 2. 1. (О. Шиллинг [37]). *Пусть G — группа, $\mathbf{K}$ — алгебраическое числовое поле, $\mathfrak{A}$ — произвольная простая компонента разложения (16) алгебры $\mathbf{K}G$. Точками ветвления алгебры $\mathfrak{A}$ могут быть лишь простые дивизоры ее центра, делящие число $|G|$.*

Доказательство. Согласно арифметической теории алгебр точками ветвления алгебры $\mathfrak{A}$ могут быть лишь простые дивизоры ее центра, делящие дискриминант $\mathfrak{A}$. Последний делит дискриминант любого порядка алгебры $\mathfrak{A}$ [18, стр. 87]. Легко проверить, что дискриминант (немаксимального) порядка алгебры $\mathfrak{A}$, порожденного элементами $g \in G$, равен $|G|^{|G|}$. Отсюда вытекает утверждение леммы.

Телами вещественных кватернионов мы называем тела 4-го ранга над алгебраическими числовыми полями, не распадающиеся при расширении основного поля до поля вещественных чисел.

Теорема 2. 2. (П. Роккет [30]). *Пусть G — нильпотентная группа. Тогда простые компоненты разложения (16) для алгебры QG являются полными матричными алгебрами над полями или над телами вещественных кватернионов. Если $|G|$ нечетно, то алгебра QG расщепляется.*

Доказательство. Как известно, если $G \cong G_1 \times G_2$, то любая простая компонента алгебры QG является тензорным произведением соответсвующих простых компонент алгебр QG_1 и QG_2 (над пересечением центров этих компонент). Поэтому теорему 2.2 достаточно доказать для групп примарного порядка.

Пусть G — $\mathbf{p}$-группа. Конечными точками ветвления алгебры $\mathfrak{A}$ могут быть лишь простые дивизоры $\mathfrak{Z}(\mathfrak{A})$, делящие $\mathbf{p}$ (лемма 2. 1). Имеется в точности один такой простой дивизор $\mathfrak{p}$, так как $\mathfrak{Z}(\mathfrak{A})$ есть подполе поля $\mathbf{p}^a$-х корней из 1, а в последнем $\mathbf{p} = \mathfrak{p}^{\varphi(\mathbf{p}^a)}$ [24, стр. 338].

Если $\mathbf{p}$ нечетно, то ранг $\mathfrak{A}$ над ее центром нечетен и, следовательно, $\mathfrak{A}$ не имеет бесконечных точек ветвления. Но тогда из теоремы монодромии вытекает, что $\mathfrak{A}$ вообще не имеет точек ветствления, т. е. является полной матричной алгеброй над своим центром.

Если $\mathfrak{p}=2$ и для всех бесконечных простых дивизоров $\mathfrak{Z}(\mathfrak{A}) \left(\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{p}}\right)=0$, то в силу тех же соображений $\mathfrak{A}$ расщепляется. Если же для некоторых бесконечных точек $\mathfrak{p}$ $\left(\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{p}}\right) = \frac{1}{2} \bmod 1$, то по теореме монодромии для единственной возможной конечной точки ветвления $\mathfrak{p}|2$ $\left(\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{p}}\right) = \frac{1}{2}$ или $0 \bmod 1$. В этом случае наименьшее общее кратное $\mathfrak{p}$-индексов алгебры $\mathfrak{A}$ равно 2. $\mathfrak{A}$ — алгебра индекса 2, не расщепляющаяся над полем Q_∞. Теорема доказана.

Следствие 2. 3 [*30*]. Любое представление нильпотентной группы G с характером χ реализуется над полем $Q(\chi, \sqrt{-1})$. Если $|G|$ нечетно, то это представление реализуется над полем характера.

При изучении групповых алгебр конечных групп над числовыми полями возможна редукция двух типов. С одной стороны, результаты арифметической теории алгебр позволяют ограничиться рассмотрением вещественной и $\mathfrak{p}$-адических (по всем $\mathfrak{p}$, делящим порядок группы) групповых алгебр. С другой стороны, изучение немодулярной групповой алгебры произвольной конечной группы сводится к изучению групповых алгебр групп весьма специального строения фундаментальний теоремой Э. Витта [47], формулируемой ниже.

Пусть $\mathbf{K}$ — поле нулевой характеристики. $\mathbf{K}$- элементарной (по простому $\mathfrak{p}$) подгруппой H группы G называется такое полупрямое произведение циклического $\mathfrak{p}'$-холловского нормального делителя A группы H на $\mathfrak{p}$-группу $\mathbf{P}$, что группа $\mathrm{Aut}_{\mathbf{H}}(A)$ изоморфна некоторой p-подгруппе группы $\mathrm{Gal}\,(\mathbf{K}(\varepsilon)/\mathbf{K})$. Здесь ε — примитивный $|G|$-й корень из 1. Q-элементарная подгруппа называется гиперэлементарной. Часто мы будем говорить о гиперэлементарной группе H, не рассматривая ее как подгруппу G. В этом случае H — произвольное полупрямое произведение циклического $\mathfrak{p}'$-холловского нормального делителя, A на $\mathfrak{p}$-группу $\mathbf{P}$.

Теорема 2. 4 (Э. Витт [47]). *Для любой простой компоненты $\mathfrak{A}$ алгебры $\mathbf{K}G$ существует такая $\mathbf{K}$-элементарная подгруппа H группы G и такая простая компонента $\mathfrak{B}$ алгебры $\mathbf{K}H$, что $\mathfrak{p}$-компоненты алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ подобны.*

Если в теореме 2. 4 потребовать лишь совпадения $\mathfrak{p}$-частей индексов алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, то получим известную теорему Р. Брауэра [11], [16, § 70].

Следствие 2. 5. Если для любой $\mathbf{K}$-элементарной подгруппы H группы G алгебра $\mathbf{K}H$ расщепляется, то расщепляется и алгебра $\mathbf{K}G$.

Замечание 2. 6. Из результатов Витта [47] и С. Д. Бермана [5] [6] вытекает, что точно представляемая в компоненте $\mathfrak{B}$ (из теоремы 2. 4) факторгруппа $\bar{H}$ $\mathbf{K}$-элементарной подгруппы H является расширением самоцентрализующегося нормального делителя с помощью (абелевой) $\mathfrak{p}$-группы (см. также [38]). Такую группу мы, следуя С. Д. Берману [6], будем называть $\mathbf{K}$-специальной.

Следующие важные утверждения принадлежат, по существу, Э. Витту [47].

Предложение 2. 7 A. Пусть G гиперэлементарна по простому q. Если для нечетного простого $\mathfrak{p} \neq q$ $\mathbf{K}=Q(\varepsilon_{\mathfrak{p}})$, где $\varepsilon_{\mathfrak{p}}$ — примитивный $\mathfrak{p}$-й корень из 1, то алгебра $\mathbf{K}G$ расщепляется.

Предложение 2. 7 B. Пусть G гиперэлементарна по простому $q \neq 2$. Тогда алгебра Q_2G расщепляется.

Предложение 2. 7 C. Пусть G гиперэлементарна по простому $q \neq 2$. Тогда алгебра Q_qG расщепляется.

Предложение 2. 7 D. Пусть G гиперэлементарна по простому 2. Если $\mathbf{K} = Q_2(\sqrt{-1})$, то алгебра $\mathbf{K}G$ расщепляется.

При доказательстве Витт пользуется своим методом сдвига скрещенных произведений [45]. Однако этого можно избежать, оставаясь в рамках тех же идей. Приведем, например, доказательство предложения 2. 7 A.

Нам понадобится следующая хорошо известная

Лемма 2. 8. *Пусть G — циклическая $\mathbf{p}$-группа, σ — $\mathbf{p}'$-элемент группы* $\mathrm{Aut}\,(G)$. *Если σ тривиально действует на элементах порядка $\mathbf{p}$ группы G, то* $\sigma = 1$.

Ввиду замечания 2. 6 для доказательства предложения 2. 7 A достаточно рассмотреть такую простую алгебру $\mathfrak{B}$, что точно представляемая в ней группа $\overline{G}$ является Q-специальной по простому q. $\overline{G} \cong A \leftthreetimes \mathbf{\Gamma}$, где A циклична, $C_{\overline{G}}(A) = A$ и $\mathbf{\Gamma}$ — q-группа. $\mathfrak{B} \cong (\mathbf{L}, \mathbf{\Gamma}, \{\alpha\})$, где циклотомическое поле $\mathbf{L}$ над $Q_{\mathbf{p}}$ есть композит вполне разветвленного поля $\mathbf{V}$ $\mathbf{p}^a$ — х корней из 1 и неразветвленного поля $\mathbf{W}$.

Так как $\varepsilon_{\mathbf{p}} \in \mathbf{K} \leqq \mathfrak{Z}(\mathfrak{B})$, то q-группа $\mathbf{\Gamma}$ оставляет на месте элементы $\mathbf{p}$-го порядка мультипликативной группы поля и поэтому в силу леммы 2. 8 тривиально действует на элементах поля $\mathbf{V}$. $\mathfrak{B} \sim (\mathbf{W}, \{\alpha'\})$. Поскольку $\mathbf{W}$ неразветвлено, а $\{\alpha'\}$ — система факторов, состоящая из корней из 1, т. е. единиц в $\mathbf{W}$, то $\mathfrak{B}$ расщепляется [46].

Из предложений 2. 7 $A-D$ Витта непосредственно выводятся многие более поздние результаты арифметической теории представлений конечных групп.

Следствие 2. 9. Пусть G — произвольная конечная группа, $\mathbf{K} = Q_{\mathbf{p}}(\varepsilon_{\mathbf{p}})$, где $\varepsilon_{\mathbf{p}}$ при $\mathbf{p}$ нечетном есть примитивный $\mathbf{p}$-й корень из 1, $\varepsilon_2 = \sqrt{-1}$. Тогда алгебра $\mathbf{K}G$ расщепляется.

Следствие 2. 10 [6]. Пусть χ — любой абсолютно неприводимый характер группы G. Тогда индекс Шура $m_{Q_{\mathbf{p}}}(\chi)$ при $\mathbf{p} \neq 2$ делит $\mathbf{p}-1$, $m_{Q_2}(\chi)$ делит 2.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}$ — простая компонента алгебры $Q_{\mathbf{p}}G$, отвечающая характеру χ. Положим $d = (Q_{\mathbf{p}}(\chi, \varepsilon_{\mathbf{p}}) : Q_{\mathbf{p}}(\chi))$, где $\varepsilon_{\mathbf{p}}$ есть примитивный p-й корень из 1 при $p \neq 2$ и $\varepsilon_2 = \sqrt{-1}$. Так как по следствию 2. 9 алгебра $\mathfrak{A} \otimes_{Q_{\mathbf{p}}(\chi)} Q_{\mathbf{p}}(\chi, \varepsilon_{\mathbf{p}})$ расщепляется, то индекс $\mathfrak{A}$ делит d. Но из элементов теории полей известно, что d делит

$$(Q_{\mathbf{p}}(\varepsilon_{\mathbf{p}}) : Q_{\mathbf{p}}) = \begin{cases} \mathbf{p}-1 & \text{при } \mathbf{p} \neq 2, \\ 2 & \text{при } \mathbf{p} = 2. \end{cases}$$

Переходя от локального случая к глобальному, получаем

Следствие 2. 11 [39]. Пусть G — группа порядка $\prod_{i=1}^{n} \mathbf{p}_i^{d_i}$, χ — абсолютно неприводимый характер группы G. Тогда $m_Q(\chi)$ делит $2 \prod_{i=1}^{n} (\mathbf{p}_i - 1)$.

Вытекает из следствия 2. 10 и того факта, что $m_Q(\chi)$ равно наименьшему общему кратному чисел $m_{Q_\infty}(\chi)$, $m_{Q_2}(\chi)$, ..., $m_{Q_\mathbf{p}}(\chi)$, ..., из которых отличным от 1 могут быть лишь $m_{Q_\infty}(\chi)$ и те $m_{Q_\mathbf{p}}(\chi)$, для которых $p \,\|\, G|$.

Заметим, что в следствии 2. 11 произведение $2 \prod_{i=1}^{n} (\mathbf{p}_i - 1)$ можно заменить соответствующим наименьшим общим кратным.

Следствие 2. 12 [39]. Пусть G — группа порядка $\prod_{i=1}^{n} \mathbf{p}_i^{d_i}$, ε_i — примитивный $\mathbf{p}_i$-й корень из 1, $\mathbf{K} = Q(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ при $|G|$ нечетном и $\mathbf{K} = Q(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \sqrt{-1})$ при $|G|$ четном. Тогда алгебра $\mathbf{K}G$ расщепляется.

Вытекает из следствия 2. 9.

§ 2. Группы с расщепляющимися групповыми алгебрами

Пусть задан некоторый класс $\mathscr{L}$ конечных групп. Поле $\mathbf{K}$ назовем минимальным полем расщепления для класса $\mathscr{L}$, если для любой $G \in \mathscr{L}$ алгебра $\mathbf{K}G$ расщепляется и в то же время для всякого поля $\mathbf{K}_1 \subset \mathbf{K}$ найдется $G \in \mathscr{L}$ такая, что алгебра $\mathbf{K}_1 G$ не расщепляется.

Почти очевидно следующее

Предложение 2. 13. Пусть θ — теоретико-групповое свойство, наследственное на гиперэлементарные подгруппы. Тогда для того, чтобы поле $\mathbf{K}$ было минимальным полем расщепления для класса θ-групп, необходимо и достаточно, чтобы $\mathbf{K}$ было минимальным полем расщепления для класса гиперэлементарных θ-групп.

Для доказательства достаточно сослаться на следствие 2. 5 и учесть, что любая $\mathbf{K}$-элементарная подгруппа является гиперэлементарной.

Редукция к гиперэлементарным подгруппам позволяет выделить те классы групп, для которых свойство расщепляемости групповых $\mathbf{K}$-алгебр наследственно на подгруппы. Однако на этом пути нельзя получить полного описания групп с расщепляющимися, скажем, рациональными групповыми алгебрами (соответствующий пример доставляет семейство симметрических групп, имеющих расщепляющиеся групповые Q-алгебры, хотя Q-алгебры их подгрупп могут быть, разумеется, весьма далекими от расщепляющихся). Пока найдены лишь отдельные классы групп, рациональные или $\mathbf{p}$-адические групповые алгебры которых расщепляются.

Результат П. Роккета изложен выше (теорема 2. 2). Ж.-П. Серр показал, что если $\mathbf{p}$ и q — различные простые и группа G обладает инвариантной q-силовской подгруппой с циклической факторгруппой, то алгебра $Q_\mathbf{p} G$ расщепляется. Этот результат Серра обобщается следующей теоремой С. Д. Бермана [6]:

Если G содержит холловский нормальный делитель N, $\mathbf{p} \nmid |N|$, с нильпотентной факторгруппой, то для произвольного абсолютно неприводимого характера χ группы G $m_{Q_\mathbf{p}}(\chi) = 1$ при $\mathbf{p} \neq 2$ и $m_{Q_2}(\chi) = 1$ или 2. Если, кроме того, 2-силовская подгруппа группы G абелева, то $m_{Q_2}(\chi) = 1$.

Здесь мы укажем более широкие классы групп с расщепляющимися или „почти расщепляющимися" рациональными и p-адическими групповыми алгебрами.

Группа G порядка $\prod_{i=1}^{n} \mathbf{p}_i^{d_i}$, $\mathbf{p}_1 < \ldots < \mathbf{p}_n$, называется дисперсивной, если подгруппа H порядка $\prod_{i=1}^{k} \mathbf{p}_i^{d_i}$ для любого $\mathbf{k}=1, \ldots, n$ инвариантна в G. G называется $\mathbf{C}N$-группой, если централизатор любого ее неединичного элемента нильпотентен. Как дисперсивность, так и $\mathbf{C}N$-свойство, очевидно, наследственны на подгруппы.

Лемма 2. 14. *Пусть G — $\mathbf{C}N$-группа, g — её $\mathbf{p}'$-элемент. Если $\mathbf{C}_G(g)$ содержит нетривиальный $\mathbf{p}$-элемент g', то $\mathbf{C}_G(g)$ содержит $\mathbf{p}$-силовскую подгруппу G.*

Доказательство. Без нарушения общности g можно считать q-элементом, $g \neq \mathbf{p}$, q — простое. Пусть $g'' \neq 1$ принадлежит центру $\mathbf{p}$-силовской подгруппы $\mathbf{P}$, содержащей g'. Очевидно, $g \in \mathbf{C}_G(g')$ и $g'' \in \mathbf{C}_G(g')$. По $\mathbf{C}N$-свойству отсюда вытекает $g \in \mathbf{C}_G(g'')$ и $g \in \mathbf{C}_G(\mathbf{P})$. Лемма доказана.

Лемма 2. 15. *Гиперэлементарная дисперсивная группа нильпотентна. Гиперэлементарная $\mathbf{C}N$-группа либо нильпотентна, либо является группой Фробениуса с циклическим ядром (и циклическим дополнением).*

Доказательство. Пусть H — гиперэлементарная дисперсивная группа. $H = A \rtimes \mathbf{P}$, где A — циклическая $\mathbf{p}'$-группа, $\mathbf{P}$ — $\mathbf{p}$-группа. Пусть $q \,\big|\, |A|$ и A_q — q-силовская подгруппа H. Если $q < \mathbf{p}$, то $A_q\mathbf{P}$ нильпотентна ввиду $A_q \lhd A_q\mathbf{P}$ и $\mathbf{p} \nmid |\mathrm{Aut}\,(A_q)|$. Если $q > p$, то $A_q\mathbf{P}$ также нильпотентна, ибо $A_q \lhd A_q\mathbf{P}$, а ввиду дисперсивности $A_q\mathbf{P}$ и $\mathbf{P} \lhd A_q\mathbf{P}$. Таким образом, $\mathbf{P} \subset \mathbf{C}_{\mathbf{H}}(A)$ и $H = A \times \mathbf{P}$.

Пусть теперь $H = A \rtimes \mathbf{P}$ — $\mathbf{C}N$-группа. Если все неединичные элементы подгруппы $\mathbf{P}$ индуцируют регулярные автоморфизмы подгруппы A, то H — группа Фробениуса с циклическим ядром **A.** Дополнение $\mathbf{P}$ изоморфно подгруппе группы автоморфизмов циклической группы, следовательно, абелево и поэтому циклично.

Если H не является группой Фробениуса, то найдется $a \in A^*$ такой, что $\mathbf{C}_{\mathbf{H}}(a) \supset A$. Тогда $\mathbf{C}_{\mathbf{H}}(a)$ содержит нетривиальный $\mathbf{p}$-элемент и — по лемме 2. 14 — всю подгруппу $\mathbf{P}$. Так как H — $\mathbf{C}N$-группа и $A \subset \mathbf{C}_{\mathbf{H}}(a)$, $\mathbf{P} \subset \mathbf{C}_{\mathbf{H}}(a)$, то A и $\mathbf{P}$ поэлементно перестановочны, $H = A \times \mathbf{P}$ и H нильпотентна. Лемма доказана.

Для дальнейшего нам нужно выяснить строение рациональных групповых алгебр 2-групп Судзуки [42].

Пусть F — поле из 2^{2n+1} элементов, $\alpha \to \alpha^*$ $(\alpha \in F)$ — произвольный автоморфизм поля F, удовлетворяющий условию: из $\alpha\alpha^* = 1$ следует $\alpha = 1$. 2-группу Судзуки T_n можно определить [42] как мультипликативную группу матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha^* & 1 & 0 \\ \beta & \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, 2-группа Судзуки T_n есть множество пар (α, β), $\alpha, \beta \in F$, с композицией, задаваемой правилом

$$(\alpha, \beta)(\gamma, \delta) = (\alpha+\gamma, \alpha\gamma^*+\beta+\delta). \tag{17}$$

Порядок группы T_n равен 2^{4n+2}. Центр, коммутант и подгруппа Фраттини совпадают и изоморфны элементарной абелевой группе порядка 2^{2n+1}. Все инволюции группы T_n центральны.

Лемма 2. 16. *Все нелинейные характеры 2-группы Судзуки* невещественны.

Доказательство. Элемент $g \in G$ называется вещественным, если он сопряжен со своим обратным. По известной теореме Фробениуса—Шура [20] число вещественных характеров конечной группы равно числу классов, состоящих из сопряженных вещественных элементов, коротко: числу вещественных классов. Из сказанного выше о порядке коммутанта 2-группы Судзуки T_n вытекает, что T_n имеет 2^{2n+1} линейных характеров, причем все они вещественны, ибо T_n/T_n' — элементарная абелева. С другой стороны, поскольку экспонента центра группы T_n равна 2, то все 2^{2n+1} центральных классов вещественны. Таким образом для доказательства леммы достаточно убедиться в том, что любой нецентральный класс сопряженных элементов группы T_n невещественен.

Пусть ξ — примитивный элемент поля F. Нецентральным элементам группы T_n соответствуют, как нетрудно проверить, пары (α, β), для которых $\alpha \neq 0$, т. е. $\alpha = \xi^i$, $i=1, \ldots, 2^{2n+1}-1$. Применяя правило (17), находим, что если $g=(\xi^i, \xi^j)$, то $g^{-1} = (\xi^i, (\xi\xi^*)^i+\xi^j)$. Допустим, что g и g^{-1} сопряжены. Тогда уравнение

$$(\xi^i, \xi^j)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{v})(\xi^i, (\xi\xi^*)^i+\xi^j) \tag{18}$$

должно иметь решение $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in F$. Из (18) вытекает, что

$$\xi^i\mathbf{u}^*+\xi^j+\mathbf{v} = \mathbf{u}\xi^{*i}+(\xi\xi^*)^i+\xi^j+\mathbf{v},$$

$$\xi^i\mathbf{u}^*+\xi^{*i}+(\xi\xi^*)^i = 0, \quad (\xi^i+\mathbf{u})^*(\xi^i+\mathbf{u}) = 0$$

и, наконец,

$$\frac{\mathbf{u}}{\xi^i+\mathbf{u}}\left(\frac{\mathbf{u}}{\xi^i+\mathbf{u}}\right)^* = 1. \tag{19}$$

Из определения автоморфизма $\alpha \to \alpha^*$ поля F и равенства (19) следует, что $\dfrac{\mathbf{u}}{\xi^i+\mathbf{u}} = 1$ и $\xi^i=0$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Следствие 2. 17. Рациональные групповые алгебры 2-групп Суздуки расщепляются.

В самом деле, из доказательства теоремы 2. 2 видно, что для 2-группы G нерасщепляемость алгебры QG влечет нерасщепляемость алгебры $Q_\infty G$. Однако ввиду леммы 2. 16 вещественные алгебры 2-групп Судзуки расщепляются.

Кватернионными телами специального типа мы называем некоммутативные тела, возникающие в разложении (16) для рациональной групповой алгебры группы обычных или об общенных кватернионов. Имеет место следующее обобщение теоремы Роккета.

Теорема 2. 18. *Рациональная групповая алгебра дисперсивной группы или* $\mathbf{C}N$*-группы является ортогональной суммой полных матричных алгебр над полями или над кватернионными телами специального типа. Если* G *удовлетворяет любому из следующих условий:*

1) G *— дисперсивная группа с абелевой 2-силовской подгруппой,*

2) G *—* $\mathbf{C}N$*-группа, 2-силовская подгруппа которой абелева или является 2-группой Судзуки,*

то алгебра QG *расщепляется.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная простая компонента разложения (16) для алгебры QG. По теореме 2. 4 для данного простого $\mathbf{p}$ найдется такая гиперэлементарная подгруппа $H \subseteq G$ и такая простая компонента $\mathfrak{B}$ разложения (16) для алгебры QG, что $\mathbf{p}$-компоненты алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ подобны. Так как дисперсивность и $\mathbf{C}N$-свойство наследственны на подгруппы, то в соответствии с леммой 2. 15 любая гиперэлементарная подгруппа группы G либо нильпотентна, либо является группой Фробениуса с циклическим ядром и циклическим дополнением.

Q- алгебра группы Фробениуса указанного типа, очевидно, расщепляется. Если гиперэлементарная подгруппа H нильпотентна, то по теореме 2. 2 p-компоненты любого простого двустороннего идеала $\mathfrak{B}$ алгебры QH, отвечающие нечетным $\mathbf{p}$, расщепляются. Что же касается 2-компоненты алгебры $\mathfrak{B}$, то она либо расщепляется, либо подобна некоторому телу вещественных кватернионов, возникающему в разложении рациональной групповой алгебры 2-группы. В силу замечания 2. 6 точно представляемая в таком теле кватернипнов группа есть расширение самоцентрализующейся циклической 2-группы $\mathbf{S}$ с помощью 2-группы T и притом нерасщепляемое расширение. Так как индекс тела равен 2, то $|T|=2$, а так как тело не расщепляется над полем вещественных чисел, то нетривиальный элемент факторгруппы $\mathbf{S}T/\mathbf{S}$ индуцирует на $\mathbf{S}$ автоморфизм, переводящий каждый элемент в его обратный. Таким образом, мы приходим к определяющим соотношениям группы обычных или обобщенных кватернионов.

Если при наших предположениях относительно G 2-силовская подгруппа группы G абелева, то, конечно, 2-компонента рассматривавшейся выше алгебры $\mathfrak{B}$ расщепляется.

Остается рассмотреть случай, когда G — $\mathbf{C}N$-группа, 2-силовская подгруппа которой является 2-группой Судзуки. Если H — нильпотентная гиперэлементарная подгруппа группы G и порядок H четен, то существует нильпотентная подгруппа $H_1 \supseteq H$, 2-силовская подгруппа которой совпадает с 2-силовской подгруппой группы G. Действительно, пусть $H = \mathbf{U} \times T$, где T — 2-силовская подгруппа H, $|T|>1$. Пусть $T \subseteq T_1$, где T_1 — некоторая 2-силовская подгруппа группы G. Если $t \in (\mathfrak{Z}(T_1))^{\#}$, то $t \in \mathbf{C}_G(T)$, а ввиду нильпотентности H $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{C}_G(T)$. Но тогда по $\mathbf{C}N$-свойству группы G $t \in \mathbf{C}_G(\mathbf{U})$, $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{C}_G(t)$. Так как и $T_1 \subseteq \mathbf{C}_G(t)$, то T_1 и $\mathbf{U}$ поэлементно перестановочны, $H_1 = \mathbf{U} \times T$ нильпотентна, $H_1 \supseteq H$.

Выше мы показали, что в случае, когда G обладает $\mathbf{C}N$-свойством, всякая гиперэлементарная нильпотентная подгруппа H четного порядка содержится в такой нильпотентной подгруппе $H_1 \subseteqq G$, что 2-силовские подгруппы групп H_1 и G совпадают. Таким образом, 2-компонента группы H_1 оказывается 2-группой Судзуки. Учитывая следствие 2. 17, получаем, что алгебра QH_1 расщепляется. Доказательство теоремы 2. 18 завершается ссылкой на следствие 2. 5.

Из теоремы 2. 18 вытекают очевидные следствия для индексов Шура характеров групп рассматриваемых типов. В частности получаем

Следствие 2. 19. Представления простых неабелевых групп $\mathbf{L}F(2, 2^a)$, $a>1$, (специальные проективные группы) и $\mathbf{Sz}(2^{2b+1})$ (простые группы Судзуки) реализуются над полем характера.

Аналог теоремы 2. 18 для локальных числовых полей обобщает сформулированные выше результаты Ж.-П. Серра [38] и С. Д. Бермана [6].

Теорема 2. 20. *Пусть $\mathbf{p} \neq 2$, G содержит холловский нормальный делитель N, $\mathbf{p} \nmid |N|$ и выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

1) G/N дисперсивна,

2) для произвольного простого делителя $q(\neq \mathbf{p})$ числа $(G:N)$ централизатор любого нетривиального q-элемента группы G/N нильпотентен.

Тогда алгебра $Q_\mathbf{p} G$ расщепляется.

Пусть G — произвольная группа с абелевой 2-силовской подгруппой. Тогда алгебра $Q_2 G$ расщепляется.

Доказательство. Легко видеть, что вместе с группой G требованиям теоремы удовлетворяет всякая ее подгруппа. Поэтому ввиду следствия 2. 5 мы можем считать, что G $Q_\mathbf{p}$-элементарна.

Рассмотрим сначала случай нечетного p. Если G $Q_\mathbf{p}$ элементарна по $\mathbf{p}$, то по предложению 2. 7 C алгебра $Q_G G$ расщепляется.

Пусть $G = A \leftthreetimes T$ $Q_\mathbf{p}$-элементарна по $q \neq p$. Из доказательства предложения 2. 7 A следует, что алгебра $Q_\mathbf{p} G$ расщепляется, если расщепляется алгебра $Q_\mathbf{p} H$, где $H = A_\mathbf{p} \leftthreetimes T$, а $A_\mathbf{p}$ — $\mathbf{p}$-силовская подгруппа группы A (и G). Ограничимся поэтому исследованием алгебры $Q_\mathbf{p} H$.

Если $q \,\big|\, |H|$, то H q-замкнута и, следовательно, нильпотентна. Так как $\mathbf{p} \neq 2$, то $Q_\mathbf{p} H$, а вместе с ней и $Q_\mathbf{p} G$, расщепляется. Если же $q \,\big|\, (G:H)$, то $H \cap N = \{1\}$, H изоморфна некоторой подгруппе группы G/N и удовлетворяет требованиям 1) или 2) условия доказываемой теоремы. Мы утверждаем, что в этом случае H либо нильпотентна, либо является группой Фробениуса с циклическим ядром и циклическим дополнением.

В самом деле, если H не является группой Фробениуса, то найдется пара коммутирующих элементов $\mathbf{x} \in A_\mathbf{p}^\#$ и $y \in T^\#$. Тогда по условию 2) теоремы $\mathbf{x} \in \mathbf{C_H}(\mathfrak{Z}(T))$ и $T \subseteqq \mathbf{C_H}(x)$. Отсюда вытекает, что T тривиально действует на $\langle \mathbf{x} \rangle \subseteqq A_\mathbf{p}$ и поэтому, ввиду леммы 2. 8, на всей $A_\mathbf{p}$. Таким образом, H нильпотентна и алгебра $Q_\mathbf{p} H$ снова расщепляется.

Теперь рассмотрим случай $\mathbf{p}=2$. Условие абелевости 2-силовской подгруппы, очевидно, наследственно на подгруппы, так что мы можем считать G Q_2-элементарной. Если G Q_2-элементарна по нечетному простому q, то по предложению 2. 7 B алгебра $Q_2 G$ расщепляется.

Пусть G Q_2-элементарна по числу 2, а $\mathfrak{A}$ — произвольная простая компонента алгебры Q_2G. Точно представляемая в компоненте $\mathfrak{A}$ факторгруппа группы G является Q_2-специальной группой по простому 2. $\mathfrak{A}$ изоморфна скрещенному произведению циклотомического поля $\mathbf{L}$ над Q_2 на некоторую 2-подгруппу $\boldsymbol{\Gamma}$ группы $\mathrm{Gal}(\mathbf{L}/Q_2)$. $\mathbf{L} = \mathbf{V} \otimes_{Q_2} \mathbf{W}$, где $\mathbf{V}$ — поле 2^a-х корней из 1 над Q_2, а $\mathbf{W}$ — поле инерции поля $\mathbf{L}$. Повторяя рассуждения Витта [47], использованные в доказательстве предложения 2.7 D, убеждаемся, что

$$(\mathbf{L}, \Gamma, \{\alpha\}) \sim (\mathbf{V}, \Gamma_1, \{\alpha'\}) \otimes (\mathbf{W}, \Gamma_2, \{\alpha''\}) \sim (\mathbf{V}, \Gamma_1, \{\alpha'\}).$$

Если 2-силовская подгруппа группы G абелева, то это же верно для точно представляемой в $\mathfrak{A}$ ее Q_2-специальной факторгруппы и, следовательно, $\Gamma_1 \cong \{1\}$. $\mathfrak{A}$ расщепляется. Теорема 2. 30 доказана.

В заключение настоящего параграфа рассмотрим случай, в некотором смысле противоположный случаю полного расщепления. Именно, рассмотрим групповые алгебры, среди простых компонент которых имеются алгебры с делением.

Теорема 2. 21. *Пусть G — произвольная конечная группа. Тогда среди простых компонент разложения (16) для алгебры QG, соответствующих точным представлениям группы G, имеется не более одной алгебры с делением.*

Доказательство. Пусть простая компонента $\mathfrak{A}_j$ разложения (16), отвечающая точному представлению Δ_j группы G является телом. Тогда Δ_j индуцируется регулярным представлением алгебры $\mathfrak{A}_j$. Так как в теле уравнение $\mathbf{x}a=a$ при любом отличном от нуля $a \in \mathfrak{A}_j$ имеет единственное решение $x=1$, то Δ_j является представлением без неподвижных точек, т. е. матрицы, соответствующие неединичным элементам группы G, не имеют характеристических корней, равных 1. Это означает, что ограничение характера ζ_j представления Δ_j на любой нетривиальной циклической подгруппе H_i группы G не содержит главного характера $1_{\mathbf{H}_i}$ группы H_i.

Пусть $\zeta_j = m(\chi_{j_1} + \dots + \chi_{jr_j})$ — разложение характера ζ_j на абсолютно неприводимые компоненты. В силу закона взаимности Фробениуса [16, § 38]

$$0 = (\zeta_j \downarrow_{\mathbf{H}_i}, 1_{\mathbf{H}_i})_{\mathbf{H}_i} = mr_j(\chi_{j1} \downarrow_{\mathbf{H}_i}, 1_{\mathbf{H}_i})_{\mathbf{H}_i} = mr_j(1_{\mathbf{H}_i}^G, \chi_{j1})_G,$$

откуда вытекает, что в разложении индуцированного характера на неприводимые

$$1_{\mathbf{H}_i}^G = \sum_{s=1}^{t} a_{is} \zeta_s$$

коэффициент $a_{ij}=0$. Так как в роли H_j может выступать любая циклическая подгруппа, кроме единичной H_1, то для рассматриваемого значения j $a_{ij}=0$ при всех $i \neq 1$.

Характер $1_{\mathbf{H}_i}^G$ не зависит от выбора H_i в классе сопряженных с H_i подгрупп. По индукционной теореме Артина [16, § 39] число классов сопряженных циклических подгрупп группы G равно t и матрица $A=(a_{ij})$, $i, j=1, \dots, t$, невырождена.

Предположим теперь, что вопреки утверждению теоремы, существует группа G такая, что среди компонент разложения (16), соответствующих точным представлениям группы G, имеются две алгебры с делением, скажем, $\mathfrak{A}_{j_1}$ и $\mathfrak{A}_{j_2}$. Тогда по доказанному выше в матрице $A=(a_{ij})_1^t$ будут равны нулю все элементы j_1-го и j_2-го столбцов, кроме тех элементов, которые находятся в 1-й строке. Матрица A оказывается вырожденной. Полученное противоречие доказывает теорему.

Замечание. Конечные группы, для которых среди компонент разложения (16) групповой алгебры, отвечающих точным представлениям группы, имеются алгебры с делением, полностью описаны Амицуром [1]. Согласно результатам Амицура единственной неразрешимой конечной группой, вкладывающейся в тело, является $\mathbf{SL}(2, 5)$. Нетрудно проверить, что единственными точками ветвления подтела, порождаемого элементами группы $\mathbf{SL}(2, 5)$, являются две бесконечные точки. Поэтому это подтело расщепляется при $\mathfrak{p}$-адическом пополнении основного поля для любого конечного простого дивизора $\mathfrak{p}$ основного поля. Таким образом, справедливы следующие два эквивалентных утверждения:

1°. В разложении $Q_{\mathfrak{p}}G \cong \mathfrak{A}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{A}_t$ $\mathfrak{p}$-адической групповой алгебры неразрешимой группы G среди $\mathfrak{A}_j$, соответствующих точным представлениям группы G, нет алгебр с делением.

2°. Любая конечная подгруппа мультипликативной группы p-адического тела разрешима.

§ 3. Обобщение теоремы Шпайзера—Брауэра—Хассе

Займемся вопросом о том, что можно сказать о строении немодулярной групповой алгебры по таблице характеров группы. Если $\mathbf{K}$ — произвольное нехарактеристическое поле, то таблица характеров группы G определяет, как легко видеть, число простых компонент $\mathfrak{A}_i$ в разложении (16) для алгебры $\mathbf{K}G$, строение центра каждой компоненты и ранг $\mathfrak{A}_i$ над ее центром. Однако таблица характеров не определяет, вообще говоря, строения тела D_i и даже его индекса — индекса Шура соответствующего характера группы G. Так, группы кватернионов и диедра 8-го порядка имеют изоморфные таблицы характеров, но неизоморфные рациональные групповые алгебры. Тем не менее, зная таблицу характеров можно дать некоторые оценки для индексов Шура (см., например, [40]).

Иногда значения характера χ „почти определяют" его индекс Шура. Мы имеем ввиду следующий классический результат А. Шпайзера [41] — Р. Брауэра [9] — Г. Хассе [23]:

Пусть χ — абсолютно неприводимый характер группы G, значения которого вещественны. Тогда $m_Q(\chi)=1$, если степень χ нечетна, и $m_Q(\chi)=1$ или 2, если эта степень четна.

Здесь будет установлено обобщение этого утверждения.

Пусть χ — произвольный абсолютно неприводимый характер группы G, ε — примитивный $|G|$-й корень из 1. Если $\varkappa$ — автоморфизм поля $Q(\varepsilon)$, индуцируемый подстановкой $\varepsilon \to \varepsilon^r$, то через $\chi^{(r)}$ обозначим характер группы G, являющийся $\varkappa$-образом характера χ. Наконец, через $\mathfrak{A}^r$ обозначим тензорное произведение (над центром $\mathfrak{A}$) r экземпляров простой алгебры $\mathfrak{A}$.

Теорема 2. 24. *Пусть* **K** *— числовое поле, содержащее значения абсолютно неприводимого характера* χ *группы* G, $\mathfrak{A}_\chi$ *— (центральная) простая компонента разложения (16) алгебры* KG, *соответствующая характеру* χ. *Тогда алгебры* $\mathfrak{A}_{\chi^{(r)}}$ *и* $\mathfrak{A}_\chi^r$ *подобны.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{S}$ — произвольное центральное конечномерное тело над **K**. Будем обозначать через $[\mathfrak{A}]$ индекс алгебры $\mathfrak{A}$. Из индукционной теоремы Витта—Бермана, сформулированной для представлений конечных групп над телами, вытекает формула (см. [47], стр. 241):

$$[\mathfrak{A}_\chi \otimes_{\mathbf{K}} \mathfrak{S}^{-1}] = \underset{H,\psi}{\text{нод}} \{[\mathfrak{B}_\psi \otimes_{\mathbf{K}} \mathfrak{S}^{-1}] (\chi{\downarrow_{\mathrm{H}}}, \mathbf{Sp}_{\mathbf{K}}\psi)\} \tag{20}$$

(нод — наибольший общий делитель). Здесь ψ пробегает в точности те характеры **K**-элементарных подгрупп H группы G, которые появляются в записи χ как целочисленной линейной комбинации индуцированных характеров; $\mathfrak{B}_\psi$ — простая компонента (вообще говоря, нецентальная) разложения (16) для групповой **K**-алгебры **K**-элементарной подгруппы H, соответствующая любому из характеров группы H, **K**-сопряженных с ψ. Из теории алгебр (см., например, [18], 1У, § 2, теорема 4) известно, что $\mathfrak{B}_\psi \otimes_{\mathbf{K}} \mathfrak{S}^{-1}$ является простой алгеброй, центр которой совпадает с центром алгебры $\mathfrak{B}_\psi$, так что индекс алгебры $\mathfrak{B}_\psi \otimes_{\mathbf{K}} \mathfrak{S}^{-1}$ имеет смысл.

Допустим, что теорема верна для **K**-элементарных групп H, появляющихся в правой части равенства (20), т. е. $\mathfrak{B}_{\bar\psi^{(r)}} \sim \mathfrak{B}_\psi^r$. При этом предположении докажем теорему для произвольных групп. Нам нужно показать, что $\mathfrak{A}_{\bar\chi} \sim \mathfrak{S}$ влечет $\mathfrak{A}_{\chi^{(r)}} \sim \mathfrak{S}^r$. Очевидно, соотношение $\mathfrak{A}_\chi \sim \mathfrak{S}$ эквивалентно соотношению $[\mathfrak{A}_\chi \otimes_{\mathbf{K}} \mathfrak{S}^{-1}] = 1$. Вычислим $[\mathfrak{A}_{\chi^{(r)}} \otimes_{\mathbf{K}} \mathfrak{S}^{-r}]$.

Легко видеть, что для характера $\chi^{(r)}$ роль характеров ψ играют $\psi^{(r)}$ и формула (20) принимает вид

$$[\mathfrak{A}_{\chi^{(r)}} \otimes_{\mathbf{K}} \mathfrak{S}^{-r}] = \underset{H,\psi}{\text{нод}} \{[\mathfrak{B}_{\psi^{(r)}} \otimes_{\mathbf{K}} \mathfrak{S}^{-r}] (\chi^{(r)}{\downarrow_{\mathrm{H}}}, \mathbf{Sp}_{\mathbf{K}}\psi^{(r)})\}.$$

Так как число $(\chi{\downarrow_{\mathrm{H}}}, \mathbf{Sp}_{\mathbf{K}}\psi)$ рационально, то $(\chi^{(r)}{\downarrow_{\mathrm{H}}}, \mathbf{Sp}_{\mathbf{K}}\psi^{(r)}) = (\chi{\downarrow_{\mathrm{H}}}, \mathbf{Sp}_{\mathbf{K}}\psi)$. Далее, $[\mathfrak{B}_{\psi^{(r)}} \otimes_{\mathbf{K}} \mathfrak{S}^{-r}] = [\mathfrak{B}_\psi^r \otimes_{\mathbf{K}} \mathfrak{S}^{-1}] = [(\mathfrak{B}_\psi \otimes_{\mathbf{K}} \mathfrak{S}^{-1})^r]$. Но индексы и, следовательно, экспоненты всех рассматриваемых простых алгебр взаимо просты с r. Поэтому $[(\mathfrak{B}_{\bar\psi} \otimes_{\mathbf{K}} \mathfrak{S}^{-1})^r] = [\mathfrak{B}_{\bar\psi} \otimes_{\mathbf{K}} \mathfrak{S}^{-1}]$. Таким образом, все числа, нод которых берется в правой части (20), не меняются при переходе от χ и ψ соответственно к $\chi^{(r)}$ и $\psi^{(r)}$ и одновременной замене $\mathfrak{S}$ на $\mathfrak{S}^r$. Тем более неизменным остается нод этих чисел и, следовательно, левая чатсь (20). Мы получили, что $[\mathfrak{A}_{\bar\chi^{(r)}} \otimes_{\mathbf{K}} \mathfrak{S}^{-r}] = 1$, т. е. $\mathfrak{A}_{\chi^{(r)}} \sim \mathfrak{A}_\chi^r$, что и требовалось.

Нам осталось теперь доказать теорему для **K**-элементарных групп H, фигурирующих в правой части (20). Согласно замечанию 2.6 точно представляемая в алгебре $\mathfrak{B}_\psi$ факторгруппа группы H является расширением самоцентрализующегося нормального делителя с помощью (абелевой) $\mathfrak{p}$-группы. Для нас сейчас важно лишь то, что $\mathfrak{B}_\psi$ изоморфна скрещенному произведению некоторого циклотомического поля **L** на группу Gal $(\mathbf{L}/Q(\psi))$ при системе факторов, состоящей из корней из 1. Отображение $\varepsilon \to \varepsilon^r$ индуцирует изоморфизм σ (вообще говоря, нецентральный) алгебры $\mathfrak{B}_\psi$ на алгебру $\mathfrak{B}_{\psi^{(r)}}$. При этом $\sigma(\mathbf{L})\cong\mathbf{L}$, $\sigma(Q(\psi))\cong Q(\psi^{(r)})=Q(\psi)$, а система факторов для алгебры $\mathfrak{B}_{\psi^{(r)}}$ является r-й степенью системы факторов для $\mathfrak{B}_\psi$. Следовательно, $\mathfrak{B}_{\psi^{(r)}}\sim\mathfrak{B}_\psi^r$ и теорема полностью доказана.

Следствие 2. 25. Предположим, что для абсолютно неприводимого характера χ группы G выполняется условие $\chi^{(r)}=\chi$. Тогда индекс Шура характера χ относительно любого поля нулевой характеристики делит $r-1$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{K}=Q(\chi)$. По теореме 2. 24 простая компонента $\mathfrak{A}_\chi$ алгебры $\mathbf{K}G$ подобна своей r-й тензорной степени, т. е. элемент $\{\mathfrak{A}_\chi\}$ брауэровской группы классов совпадает со своей r-й степенью. Отсюда следует, что порядок класса $\{\mathfrak{A}_\chi\}$, т. е. экспонента алгебры $\mathfrak{A}_\chi$ делит $r-1$. Остается заметить, что для простых алгебр над числовыми полями экспонента равна индексу. Таким образом, $m_{\mathbf{K}}(\chi)=m_Q(\chi)$ делит $r-1$ и, следовательно, это имеет место для индекса Шура относительно любого поля характеристики 0.

Сформулированный выше результат Шпайзера—Брауэра—Хассе получается, если в следствии 2. 25 положить $r=-1$.

Заметим, что для частного случая $r=-1$, т. е. когда χ и $\chi^{(r)}$ комплексно сопряжены, можно дать простое доказательство теоремы 2. 24, не использующее индукционной теоремы Витта—Бермана.

Рассмотрим линейное преобразование σ алгебры $\mathbf{K}G$, индуцированное подстановкой $g\to g^{-1}$ на множестве элементов группы G. σ переводит любой центральный идемпотент алгебры $\mathbf{K}G$ снова в центральный идемпотент и, следовательно, переставляет простые компоненты разложения (16) алгебры $\mathbf{K}G$. Легко проверить, что σ — антиавтомофизм алгебры $\mathbf{K}G$.

$$\sigma\Big(\sum_i a_ig_i\cdot\sum_j b_jg_j\Big)=\sigma\Big(\sum_{i,j} a_ib_jg_ig_j\Big)=\sum_{i,j} a_ib_jg_j^{-1}g_i^{-1}=$$
$$=\sum_j b_jg_j^{-1}\cdot\sum_i a_ig_i^{-1}=\sigma\Big(\sum_j b_jg_j\Big)\cdot\sigma\Big(\sum_i a_ig_i\Big),\qquad a_i,b_j\in\mathbf{K},\ g_i,g_j\in G.$$

Так как элементы поля $\mathbf{K}$ σ-неподвижны, то отображение $\mathfrak{A}\to\sigma(\mathfrak{A})$ есть центральный антиизоморфизм и, следовательно, $\sigma(\mathfrak{A})\sim\mathfrak{A}^{-1}$.

§ 4. Спектральная таблица группы и теоретико-инвариантные свойства ее линейных представлений

В этом и следующем параграфах изучается информация о строении немодулярной групповой алгебры, доставляемая спектральной таблицей группы. Задание спектральной таблицы группы G, очевидно, эквивалентно заданию множества из $\mathbf{k}^2$ характеристических полиномов матриц $\Gamma_\varrho(i)$, $1\leqq i,\varrho\leqq\mathbf{k}$, где $\Gamma_\varrho(i)$ обозначает матрицу элемента i-го класса группы G в ϱ-м абсолютно неприводимом представлении. Рассмотрим еще один способ задания спектральной таблицы. Пусть $\eta=\eta(g)$, $g\in G$ — комплекснозначная функция классов сопряженных элементов группы G. Положим $\eta_m(g)=\eta(g^m)$. Легко видеть, что отображения $\eta\to\eta_m$, $m=0, 1, 2, \ldots$ (среди них лишь конечное число различных!) являются линейными преобразованиями комплексной алгебры функций классов.

Обозначим через $\mathbf{ZX}(G)$ кольцо обобщенных характеров группы G.

Лемма 2. 26. *Отображения* τ_m: $\xi \to \xi_m$, $\xi \in \mathbf{ZX}(G)$, *являются эндоморфизмами* $\mathbf{Z}$-*модуля* $\mathbf{ZX}(G)$.

Доказательство. Так как продолжение τ_m на комплексную алгебру функций классов является линейным преобразованием, то нам нужно лишь показать, что для каждого $\xi \in \mathbf{ZX}(G)$ ξ_m снова принадлежит $\mathbf{ZX}(G)$. Совокупность неприводимых комплексных характеров χ_ϱ, $\varrho = 1, \ldots, \mathbf{k}$, образует $\mathbf{Z}$-базис кольца $\mathbf{ZX}(G)$, а множество отображений $\tau_\mathbf{p}$, где $\mathbf{p}$ пробегает все простые, порождает полугруппу преобразований τ_m, $m=2, 3, \ldots$. Поэтому достаточно проверить, что для любых χ и $\mathbf{p}$ $\chi(g^\mathbf{p}) \in \mathbf{ZX}(G)$.

Пусть Ω — поле комплексных чисел, M — ΩG-модуль с характером χ, $\overline{M}$ — тензорное произведение $\mathbf{p}$ экземпляров ΩG-модуля M:

$$\overline{M} = M_1 \otimes \cdots \otimes_{\Omega G} M_\mathbf{p}, \quad M_\mu \cong M, \qquad \mu = 1, \ldots, \mathbf{p}.$$

Используя идею Г. Вейля [44], определим действие группы подстановок $\mathbf{P} = \langle \pi \rangle$ порядка $\mathbf{p}$ на модуле $\overline{M}$ следующим образом.

Если $\{e_i\}$ — базис ΩG -модуля M, то обозначим через $\{e_i^{(\mu)}\}$ базис модуля M_μ ($\mu = 1, \ldots, \mathbf{p}$), являющийся образом базиса $\{e_i\}$ при произвольном, но фиксированном ΩG-изоморфизме M на M_μ. Очевидно, $\{e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_\mathbf{p}}\}$ является базисом $\overline{M}$. Теперь положим

$$\pi(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_\mathbf{p}}) = e_{\pi(i_1)} \otimes \cdots \otimes e_{\pi(i_\mathbf{p})},$$

превратив, таким образом, $\overline{M}$ в $\Omega\mathbf{P}$-модуль. Легко видеть, что каждый оператор $\Omega\mathbf{P}$ перестановочен с каждым оператором из ΩG.

Группа $\mathbf{P}$ имеет $\mathbf{p}$ линейных характеров $\zeta_1 \equiv 1, \ldots, \zeta_\mathbf{p}$. Пусть $\overline{M} = M^{(1)} \dotplus \dotplus \cdots \dotplus M^{(\mathbf{p})}$ — разложение $\Omega\mathbf{P}$-модуля $\overline{M}$ в такую прямую сумму $\Omega\mathbf{P}$-модулей, что характер модуля $M^{(j)}$ есть кратное характера ζ_j. Поскольку группы операторов $\mathbf{P}$ и G поэлементно перестановочны, то $M^{(j)}$ являются и ΩG -модулями.

Вычислим характер ψ_j ΩG-модуля $M^{(j)}, j \neq 1$. Из известных формул теории характеров (см., например, [26], стр. 70) выводим, что

$$\psi_j(g) = \frac{1}{\mathbf{p}} \sum_{m=1}^{\mathbf{p}} \overline{\zeta_j(\pi^m)} \chi(g^{l_{1m}}) \chi(g^{l_{2m}}) \ldots \chi(g^{l_{sm}}),$$

где l_{im} — длина i-го цикла циклического разложения подстановки π^m. В нашем случае при $j \neq 1$ имеем

$$\psi_j(g) = \frac{\chi^\mathbf{p}(g) - \chi(g^\mathbf{p})}{\mathbf{p}}.$$

Так как ψ_j-характер некоторого ΩG-модуля, то $\dfrac{\chi^\mathbf{p}(g) - \chi(g^\mathbf{p})}{\mathbf{p}} \in \mathbf{ZX}(G)$, откуда $\chi(g^\mathbf{p}) \in \mathbf{ZX}(G)$, что и требовалось доказать.

Известно [32], что кольцо $\mathbf{ZX}(G)$ определяет таблицу характеров G. Отсюда и из леммы 2. 26 вытекает, что спектральная таблица группы G вполне определяется кольцом $\mathbf{ZX}(G)$ и некоторой полугруппой эндоморфизмов аддитивной группы этого кольца. (Разумеется, эта полугруппа эндоморфизмов самим кольцом не выделяется, ибо спектральная таблица группы, вообще говоря, таблицей характеров не определяется).

Каждому абсолютно неприводимому характеру χ группы G можно поставить в соответствие комплексные числа

$$a_n(\chi)=\frac{1}{n}\sum_{g\in G,\ g^n=1}\chi(g)\quad \text{и}\quad b_n(\chi)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g^n),$$

которые мы назовем **числами Фробениуса** соответственно 1-го и 2-го рода характера χ.

Предложение 2. 27. Числа Фробениуса 1-го и 2-го рода характера χ суть целые рациональные.

Доказательство для чисел $a_n(\chi)$ было дано Фробениусом [19]. Для чисел $b_n(\chi)$ утверждение вытекает из леммы 7. 26, поскольку $b_n(\chi)$ совпадает с коэффициентом при главом характере в разложении $\chi(g^n)$ по неприводимым характерам.

Числа Фробениуса характера содержат определенную информацию и его индексе Шура. Оценка для $m_Q(\chi)$, зависящая от $a_n(\chi)$ указана в [40]. С другой стороны, из результата Фробениуса—Шура [20] следует, что $b_2(\chi)$ полностью определяет $m_{Q_\infty}(\chi)$.

Нетрудно убедиться, что числа Фробениуса 1-го и 2-го рода всех характеров группы G определяются спектральной таблицей G (но не ее таблицей характеров!). Действительно, для вычисления чисел Фробенуса кроме таблицы характеров нужно лишь для любого $i=1,\dots,\mathbf{k}$ и любого $m=1,2,\dots$ знать, какой класс сопряженных элементов содержит m-е степени элементов i-го класса. Но это определяется спектральной таблицей (см. выше теорему 1. 23).

Рассмотрим вопрос о связи между спектральной таблицей группы и теоретико-инвариантными свойствами ее матричных представлений.

Пусть $\mathbf{V}$ обозначает n-мерное векторное пространство над полем $\mathbf{K}$ характеристики 0, $\mathbf{V}^{(m)}$ — тензорное произведение m экземпляров пространства $\mathbf{V}$. Действие полной линейной группы $G\mathbf{L}(n,\mathbf{K})$ в пространстве $\mathbf{V}^{(m)}$ очевидным образом индуцируется ее действием в $\mathbf{V}$. Как известно (см. [44] или [16], § 67), каждое неприводимое рациональное представление ранга m группы $G\mathbf{L}(n,\mathbf{K})$ реализуется в некотором подпространстве пространства $\mathbf{V}^{(m)}$.

$\mathbf{V}^{(m)}$ можно считать пространством m-линейных форм от n переменных. Будем говорить, что две формы из $\mathbf{V}^{(m)}$ принадлежат одному и тому же типу, если они удовлетворяют одним и тем же условиям симметрии, скажем, обе являются симметрическими, кососимметрическими и т. д. Пространство $\mathbf{V}^{(m)}$ разлагается в прямую сумму подпространств, каждое из которых состоит из форм одного типа. Продолжением этого разложения служит разложение $\mathbf{V}^{(m)}=\cdot\sum\mathbf{V}_i^{(m)}$ на неприводимые относительно $G\mathbf{L}(n,\mathbf{K})$ подпространства [44].

Пусть теперь $\mathbf{\Gamma}$ — абсолютно неприводимое $\mathbf{K}$-представление степени n группы G, χ — характер $\mathbf{\Gamma}$. Каждое рациональное представление ранга m группы $G\mathbf{L}(n,\mathbf{K})$ индуцирует такое же представление линейной группы $\mathbf{\Gamma}$. Некоторые (вообще говоря, приводимые) рациональные представления m-го ранга группы $\mathbf{\Gamma}$ реализуются в пространствах $\mathbf{V}_i^{(m)}$. Так как $\mathbf{\Gamma}$ — представление группы G, то $\mathbf{V}_i^{(m)}$ можно интерпретировать как $\mathbf{K}G$-модули. Характеры этих $\mathbf{K}G$-модулей называются m-ми тензорными (или кронекеровскими) симметризованными степенями характера χ.

Если разложение (обычной) кронекеровской степени характера χ на абсолютно неприводимые компоненты определяется таблицей характеров G, то разложение его симметризованных кронекеровских степеней таблицей характеров, вообще говоря, не определяется (ср. разложение симметрического и кососимметрического квадрата точного характера для групп кватернионов и диедра). Знания спектральной таблицы группы уже оказывается достаточным для отыскания всех симметризованных кронекеровских степеней любого характера.

Предложение 2. 28. Пусть G и $\tilde{G}$ — группы с изоморфными спектральными таблицами, χ и $\tilde{\chi}$ — любая пара соответствующих абсолютно неприводимых характеров G и $\tilde{G}$,

$$[\chi]_{\mathbf{s}}^{m} = \sum_{\varrho=1}^{\mathbf{k}} a_{\mathbf{s}\varrho}^{(m)} \chi_{\varrho} \quad \text{и} \quad [\tilde{\chi}]_{\mathbf{s}}^{m} = \sum_{\varrho=1}^{\mathbf{k}} \tilde{a}_{\mathbf{s}\varrho}^{(m)} \tilde{\chi}_{\varrho}, \tag{21}$$

где $\mathbf{s}$ обозначает тип симметрии, — разложения (одинаково) симметризованных m-х кронекеровских степеней характеров χ и $\tilde{\chi}$ соответственно на абсолютно неприводимые характеры групп G и $\tilde{G}$. Тогда для всех натуральных m и любого типа симметрии $\mathbf{s}$ $a_{\mathbf{s}\varrho}^{(m)} = \tilde{a}_{\mathbf{s}\varrho}^{(m)}$.

Доказательство. Пусть χ — абсолютно неприводимый характер группы G. Формулы для вычисления симметризованных кронекеровских степеней характера χ содержат лишь обобщенные характеры вида $\chi(g^n)$ группы G [26]. Последние же определяются спектральной таблицей G.

Следствие 2. 29. Пусть G и $\tilde{G}$ — группы с изоморфными спектральными таблицами, $\mathbf{\Gamma}$ и $\tilde{\Gamma}$ — пара соответствующих абсолютно неприводимых представлений групп G и $\tilde{G}$. Тогда матричные группы $\mathbf{\Gamma}$ и $\tilde{\Gamma}$ имеют для каждого m одинаковое число линейно независимых инвариантных m-линейных форм любого данного типа симметрии.

Доказательство. Пусть $\mathbf{\Gamma}$ — линейная группа с характером χ, являющаяся гомоморфным образом группы G. Инвариантная относительно $\mathbf{\Gamma}$ m-линейная форма типа симметрии $\mathbf{s}$ является $\mathbf{\Gamma}$-неподвижным вектором пространства всех m-линейных форм типа симметрии $\mathbf{s}$. Это пространство есть $\mathbf{\Gamma}$- и, следовательно, G-модуль, характер которого совпадает с $\mathbf{c}[\chi]_{\mathbf{s}}^{m}$, где $[\chi]_{\mathbf{s}}^{m}$ — m-я симметризованная (по типу $\mathbf{s}$) кронекеровская степень характера χ, а $\mathbf{c}$ — кратность, зависящая лишь от m, $\mathbf{s}$ и степени характера χ (но не от G). Поэтому размерность пространства $\mathbf{\Gamma}$-инвариантных m-линейных форм типа $\mathbf{s}$ равна $\mathbf{c}a_{\mathbf{s}1}^{(m)}$ — c-кратному коэффициенту при главном характере χ_1 в разложении (21). Последний определяется спектральной таблицей группы G.

Следствие 2. 29 показывает, что теоретико-инвариантные свойства конечной матричной группы $\mathbf{\Gamma}$ полностью определяются ее спектральной таблицей как абстрактной группы.

Связь между теоретико-инвариантными свойствами конечных групп матриц обсуждалась неоднократно [20] [41] [9] [10]. При этом фундаментальный результат был установлен Фробениусим и Шуром [20], которые показали, что индекс Шура абсолютно неприводимого представления с вещественными характером относительно поля Q_∞ равен 1 или 2 в зависимости от того, будет ли инвариантная относительно матричной группы Γ комплексная билинейная форма симметрической или кососимметрической. Другими словами, если χ — характер Γ, то $m_{Q_\infty}(\chi)=\dfrac{3-b_2(\chi)}{2}$, где $b_2(\chi)$ — число Фробениуса 2-го рода характера χ. Учитывая, что для любого нехарактеристического поля $\mathbf{K}$ спектральная таблица группы G определяет ранги простых компонент алгебры $\mathbf{K}G$ и строение их центров и что алгебра с делением над полем вещественных чисел вполне определяется своим центром и индексом, получаем

Теорему 2. 30. *Строение групповой алгебры произвольной группы G над полем вещественных чисел определяется спектральной таблицей G.*

В случае других нехарактеристических полей мы в состоянии по спектральной таблице произвольной группы дать лишь некоторые оценки для индексов Шура ее характеров.

Предложение 2. 31. Пусть $\mathbf{K}$ — поле характеристики 0, G — группа, χ — ее абсолютно неприводимый характер, для которого $m_{\mathbf{K}}(\chi)=m$. Тогда представление группы G, характер которого равен m-й симметризованной по любому типу кронекеровской степени характера χ, реализуется над полем $\mathbf{K}(\chi)$.

Доказательство. Характеру χ соответствует простая компонента $\mathfrak{A}$ алгебры $\mathbf{K}G$, индекс которой равен m. Так как экспонента алгебры делит ее индекс, то компонента $\mathfrak{A}^{(m)}=\mathfrak{A}\otimes\ldots\otimes_{3(\alpha)}\mathfrak{A}$ (m раз) алгебры $\mathbf{K}G_m$, где через G_m обозначена группа, изоморфная прямому произведению m экземпляров G, расщепляется, т. е. абсолютно неприводимое представление группы G_m с характером, соответствующим произведению m экземпляров характера χ группы G, реализуется над полем $\mathbf{K}(\chi)$. Диагональная подгруппа группы G_m изоморфна группе G и ограничение рассматриваемого представления группы G_m на диагональной подгруппе имеет характер, равный m-й кронекеровской степени характера χ. Таким образом, представление Γ группы G, характер которого равен χ^m, релизуется над полем $\mathbf{K}(\chi)$.

Далее, модулем представления Γ является пространство $\mathbf{V}^{(m)}$ m-линейных форм над полем $\mathbf{K}(\chi)$, которое является также $\mathbf{S}_m$-модулем ($\mathbf{S}_m$ — симметрическая группа m-й степени). Как известно [44] (см. также [16], § 67), представления группы G, характеры которых равны m-м симметризованным кронекеровским степеням характера χ, реализуются в модулях вида $\mathbf{V}^{(m)}e_\sigma$, где e_σ — минимальный идемпотент комплексной групповой алгебры группы $\mathbf{S}_m$. Полная система таких идемпотентов e_σ содержится уже в рациональной алгебре группы $\mathbf{S}_m$ [16] [43] и, тем более, в алгебре $\mathbf{K}(\chi)\mathbf{S}_m$. Отсюда вытекает, что $\mathbf{V}^{(m)}e_\sigma$ является $\mathbf{K}(\chi)G$-модулем. Предложение доказано.

Следствие 2. 32. Пусть χ — абсолютно неприводимый характер группы G, индекс Шура которого относительно поля $\mathbf{K}$ нулевой характеристики делит m. Тогда для любого ϱ, $1\leqq\varrho\leqq\mathbf{k}$, и всех возможных типов симметрии $\mathbf{s}$ индекс $m_{\mathbf{K}(\chi)}(\chi_\varrho)$ делит число $a_{\mathbf{s}\varrho}^{(m)}$ из равенства (21).

Доказательство. $a_{\mathbf{s}\varrho}^{(m)}$ ($\varrho=1,\ldots,\mathbf{k}$) есть кратность, с которой характер χ_ϱ входит в m-ю симметризованную по типу $\mathbf{s}$ кронекеровскую степень $[\chi]_{\mathbf{s}}^m$

характера χ. Так как в силу предложения 2. 31 представление группы G с характером $[\chi]_{\mathrm{s}}^{m}$ релизуется над $\mathbf{K}(\chi)$, то, как это следует из элементов теории индекса Шура, $m_{\mathbf{K}(\chi)}(\chi_{\varrho})$ делит $a_{\mathrm{s}\varrho}^{(m)}$.

Следствие 2. 32 дает возможность из одних оценок для индексов Шура с помощью спектральной таблицы группы получить ряд новых.

§ 5. Спектральная таблица группы и строение ее немодулярной групповой алгебры

В предыдущем параграфе было показано, что теоретико-инвариантные свойства линейных представлений группы G определяются ее спектральной таблицей и, таким образом, была установлена связь между спектральной таблицей группы G и строением ее групповой алгебры. С другой стороны, эту связь можно обнаружить с помощью теоремы 2. 4 (Э. Витта).

Предложение 2. 33. Пусть $\mathbf{K}$ — произвольное поле характеристики 0, G и $\tilde{G}$ — группы с изоморфными спектральными таблицами, $\mathscr{M} = \{H = A \rtimes \mathbf{P}\}$ и $\tilde{\mathscr{M}} = \{\tilde{H} = \tilde{A} \rtimes \tilde{\mathbf{P}}\}$ — множества всех $\mathbf{K}$-элементарных подгрупп групп G и $\tilde{G}$ соответственно (A — циклический холловский нормальный делитель, $\mathbf{P}$ — группа примарного порядка). Тогда существует взаимно однозначное соответствие $H \leftrightarrow \tilde{H}$ между множествами $\mathscr{M}$ и $\tilde{\mathscr{M}}$, при котором

1) $A \cong \tilde{A}$,

2) $|\mathbf{C}_{\mathbf{H}}(A)| = |\mathbf{C}_{\tilde{\mathbf{H}}}(\tilde{A})|$,

3) $\mathrm{Aut}_{\mathbf{H}}(A) \cong \mathrm{Aut}_{\tilde{\mathbf{H}}}(\tilde{A})$.

Доказательство. В теории представлений конечных групп (см., например, [43], стр. 223) устанавливается формула

$$\sum_{g \in G} \chi_{\varrho}(ag^{-1}bg) = \frac{|G|}{v_{\varrho}} \chi_{\varrho}(a)\chi_{\varrho}(b), \qquad a, b \in G. \tag{22}$$

С другой стороны, хорошо известно соотношение

$$h_a h_b \chi_{\varrho}(a)\chi_{\varrho}(b) = v_{\varrho} \sum_{i=1}^{\mathbf{k}} \mathbf{c}_{ab}^{i} h_i \chi_{\varrho}(i), \tag{23}$$

где $\mathbf{c}_{ab}^{i}$ — структурные константы $\mathbf{Z}$-кольца „классовых сумм" группы G. Сравнивая (22) с (23) и обозначая i-й класс сопряженных элементов G через $\mathfrak{C}_i$, получаем, что число решений уравнения

$$ax^{-1}bx \in \mathfrak{C} \tag{24}$$

в группе G равно $\dfrac{|G|\mathbf{c}_{ab}^{i} h_i}{h_a h_b}$, т. е. определяется таблицей характеров группы G. Это число не зависит, разумеется, от выбора a и b в их классах сопряженных элементов.

По спектральной таблице группы мы в состоянии указать класс, состоящий из m-х степеней элементов любого данного класса. Следовательно, спектральная таблица определяет число решений уравнения (24) при $a=b^{-n}$ и $\mathfrak{C}_i=\mathfrak{C}_1=\{1\}$, т. е. число решений уравнения $x^{-1}gx=g^n$ в группе G. Добавим, что, если $\langle g\rangle$ — циклическая группа с образующим g, то порядок ее автоморфизма $g\to g^n$ вполне определяется числом n.

Далее, уже таблица характеров G определяет для каждого $g\in G$ порядок централизатора $\mathbf{C}_G(g)$ и число элементов группы $\langle g\rangle$, сопряженных с g в G. Поэтому, если G и $\tilde{G}$ имеют изоморфные таблицы характеров, то существует взаимно однозначное соответствие между классами сопряженных циклических подгрупп групп G и $\tilde{G}$, сохраняющее порядки централизаторов и нормализаторов соответствующих подгрупп. При этом порядки соответствующих циклических подгрупп не обязаны совпадать (контрпример — две неабелевы группы порядка $\mathbf{p}^3$, $\mathbf{p}$ — простое). Однако, если изоморфны спектральные таблицы групп G и $\tilde{G}$, то порядки элементов соответствующих классов этих групп совпадают, т. е. совпадают порядки соответствующих циклических подгрупп. Из сказанного в предыдущем абзаце вытекает, что для каждого $g\in G$ спектральная таблица группы G определяет число элементов любого данного порядка группы $\mathrm{Aut}\,(\langle g\rangle)$. Так как группа $\mathrm{Aut}\,(\langle g\rangle)$ абелева, то она определяется с точностью до изоморфизма своим порядковым строением [27]. Предложение 2.33 доказано.

Пусть $H = A\leftthreetimes \mathbf{P}$ — $\mathbf{K}$-элементарная подгруппа группы G. Очевидно, H нильпотента тогда и только тогда, когда $\mathrm{Aut}_{\mathbf{H}}(A)\cong\{1\}$. Нетрудно убедиться также в том, что свойство H быть группой Фробениуса с ядром A определяется строением группы $\mathrm{Aut}_{\mathbf{H}}(A)$ и условием $|\mathbf{C}_{\mathbf{H}}(A)|=|A|$. Таким образом, из предложения 2. 33 вытекает

Следствие 2. 34. Допустим, что группы G и $\tilde{G}$ имеют изоморфные спектральные таблицы и любая $\mathbf{K}$-элементарная подгруппа группы G либо нильпотентна, либо является группой Фробениуса. Тогда любая $\mathbf{K}$-элементарная подгруппа группы $\tilde{G}$ также либо нильпотентна, либо является группой Фробениуса.

Теперь мы можем доказать основной результат этого параграфа.

Теорема 2. 35. *Пусть $\mathbf{K}$ — произвольное поле характеристики* 0, *G — группа, все $\mathbf{K}$-элементарные подгруппы которой нильпотентны или являются группами Фробениуса. Тогда для любой группы $\tilde{G}$, спектральная таблица которой изоморфна спектральной таблице G, алгебры $\mathbf{K}G$ и $\mathbf{K}\tilde{G}$ изоморфны.*

Из этой теоремы и леммы 2. 15 вытекает

Следствие 2. 36. Пусть G — дисперсивная группа или $\mathbf{C}N$-группа, в частности нильпотентная группа, $\mathbf{K}$ — произвольное поле, характеристика которого не делит $|G|$. Тогда строение алгебры $\mathbf{K}G$ определяется спектральной таблицей группы G.

Доказательство теоремы 2. 35. Пусть G — группа, удовлетворяющая условию теоремы 2. 35. Выше, при доказательстве теоремы 2. 18, было установлено, что любая простая компонента $\mathfrak{A}$ алгебры $\mathbf{K}G$ является полной матричной алгеброй над некоторым полем или над кватернионным телом специального типа. Центр $\mathfrak{A}$ изоморфен полю $\mathbf{K}(\chi)$, где χ — один из соответствующих алгебре

$\mathfrak{A}$ абсолютно неприводимых характеров группы G. Ранг $\mathfrak{A}$ над ее центром также определяется характером χ. Нам нужно показать, что спектральная таблица группы G определяет индекс алгебры $\mathfrak{A}$ и — в случае, если этот индекс равен 2, — строение соответствующего тела.

Так как кватернионное тело специального типа (определение см. в § 2) имеет по крайней мере одну бесконечную точку ветвления, то алгебра $\mathfrak{A}$ расщепляется или не расщепляется одновременно с соответствующей простой компонентой алгебры GQ_∞. Индекс же последней согласно теореме 2. 30 определяется спектральной таблицей группы G. В действительности спектральная таблица определяет не только индекс подобного алгебре $\mathfrak{A}$ тела, но и само это тело с точностью до изоморфизма, как показывает

Лемма 2. 37. *Пусть D — тело, возникающее в разложении (16) для рациональной групповой алгебры некоторой 2-группы. Тогда тело D определяется с точностью до изоморфизма своим центром.*

Доказательство. Как вытекает из доказательства теоремы 2. 18, точно представляемая в теле D 2-группа является группой обычных или обобщенных кватернионов. Легко проверить, что неизоморфным группам этой серии отвечают тела с неизоморфными центрами (полями соответствующих характеров). С другой строны, неизоморфным телам по теореме 2. 21 отвечают неизоморфные группы. Доказательство леммы 2. 27, а вместе с ней и теоремы 2. 35 завершено.

Результаты §§ 5 и 6 делают правдоподобным следующее

Предположение. Спектральная таблица произвольной конечной группы G определяет строение алгебры QG и, следовательно, алгебры $\mathbf{K}G$, где $\mathbf{K}$ — произвольное нехарактеристическое поле.

Примечание при корректуре. Указанное предмоложение опровергается результатом K. Kronstein'a (Proc. Symp. Pure Math., Vol. 21, 1971, 97—98).

Приложение. Об инвариантах конечных групп

Предположим, что каждой конечной группе G поставлен в соответствие некоторый объект $I=I(G)$, который может быть числом или совокупностью чисел, алгебраической системой и т. д. Для объектов I определяется понятие изоморфизма, зависящее от природы объекта. Так, если I — числа, то изоморфизм означает равенство, если I — алгебраическая система, то изоморфизм понимается в обычном смысле. Мы будем говорить, что $I(G)$ — инвариант группы G, если для любой пары изоморфных конечных групп G и $\tilde{G}$ $I(G)$ и $I(\tilde{G})$ изоморфны. Примерами инвариантов служат порядок группы и ее экспонента, таблица характеров группы, (сильная) структура ее (инвариантных) подгрупп*), групповое кольцо, кольцо Ли, ассоциированное с группой и т. д. Группу G также иногда удобно считать (тривиальным образом полным) инвариантом самой себя.

*) Сильной структурой подгрупп называется структура подгрупп с заданными индексами подгрупп.

Рассмотрим некоторое множество $\mathcal{M}$ инвариантов группы. На множестве $\mathcal{M}$ можно ввести бинарное отношение $\geqq$, полагая $I_1 \geqq I_2$ для I_1, $I_2 \in \mathcal{M}$, если инвариант I_1 содержит не меньшую информацию о группе, чем инвариант I_2. Придадим этим словам точный смысл. Будем говорить, что инвариант I_1 мажорирует (или определяет) инвариант I_2, в обозначениях $I_1 \geqq I_2$, если для любой пары конечных групп G и $\tilde{G}$ из $I_1(G) \cong I_1(\tilde{G})$ следует $I_2(G) \cong I_2(\tilde{G})$. Если $I_1 \geqq I_2$ и найдется пара G, $\tilde{G}$ такая, что $I_2(G) \cong I_2(\tilde{G})$' но $I_1(G) \not\cong I_1(\tilde{G})$, то скажем, что инвариант I_1 строго мажорирует инвариант I_2 ($I_1 > I_2$). Отношение $\geqq$, очевидно, рефлексивно и транзитивно, т. е. является отношением квазипорядка в сымсле [8]. Отождествив, как обычно, те пары I_1, I_2, для которых одновременно $I_1 \geqq I_2$ и $I_2 \geqq I_1$, мы придем к частично упорядоченному множеству $\mathcal{M}'$.

Нетрудно проверить, что в структуре $\mathcal{L}$, натянутой на n инвариантов $I_1, \ldots, I_n$ группы G, всегда выполняется дистрибутивный закон и, следовательно, $\mathcal{L}$ есть факторструктура свободной дистрибутивной структуры с n образующими [8, стр. 207]. Так как последняя конечна, то конечна и структура $\mathcal{L}$.

Если $I_{i_1} \geqq I_{i_2}$, то всякий автоморфизм инварианта I_{i_1} индуцирует автоморфизм инварианта I_{i_1}. В этом случае существует гомоморфизм $f\colon \mathrm{Aut}\,(I_{i_1}) \to \mathrm{Aut}\,(I_{i_2})$ и интерес представляет исследование вложения группы $\mathrm{Im}\, f$ в группу $\mathrm{Aut}\,(I_{i_2})$ (см., например, [34]).

В 1-й части настоящей статьи рассматривались связи кольца RG с другими инвариантами группы G: сильной структурой нормальных делителей $\mathfrak{N}(G)$, таблицей характеров $X(G)$, спектральной таблицей $\Sigma(G)$, кольцом Ли $\mathbf{L}(G)$. Имеют место следующие отношения между этими инвариантами:

a) $X(G) \geqq \mathfrak{N}(G)$ (следствие 2. 2 из [40]),

b) $\Sigma(G) \geqq X(G)$ (следует из определения спектральной таблицы),

c) $RG \geqq \Sigma(G)$ (следствие 1. 26)

d) $RG \geqq \mathbf{L}(G)$ (теорема 1. 28),

e) $\mathbf{L}(G) > \mathfrak{N}(G)$ (см. ниже предложение D. 1.).

Покажем на примерах, что в пунктах a)—d) знак $\geqq$ следует заменить на $>$.

Рассмотрим $\mathbf{p}$-группы порядка $\mathbf{p}^4$ ($\mathbf{p} \neq 2$):

(25) $$G = \langle a, b, \mathbf{c} \mid a^{\mathbf{p}^2} = b^{\mathbf{p}} = 1,\ a^b = a^{1+\mathbf{p}},\ a^{\mathbf{c}} = ab,\ b^{\mathbf{c}} = b,\ a^{\mathbf{p}} = \mathbf{c}^{\mathbf{p}} \rangle,$$

(26) $$\tilde{G} = \langle a, b, \mathbf{c} \mid a^{\mathbf{p}^2} = b^{\mathbf{p}} = c^{\mathbf{p}} = 1,\ a^b = {}^{1+\mathbf{p}},\ a^{\mathbf{c}} = ab,\ b^{\mathbf{c}} = b \rangle.$$

G и $\tilde{G}$ сильно N-структурно изоморфны, но имеют неизоморфные таблицы характеров.

Две неабелевы $\mathbf{p}$-группы порядка $\mathbf{p}^3$ имеют изоморфные таблицы характеров, но неизоморфные спектральные таблицы.

Группы Дэйда [17] порядка $\mathbf{p}^7 (\mathbf{p} \geqq 5)$ имеют изоморфные спектральные таблицы, но неизоморфные колца Ли. С другой стороны, группы (25) и (26) имеют изоморфные кольца Ли, но неизоморфные таблицы характеров. Таким образом, пары $X(G)$, $\mathbf{L}(G)$ и $\Sigma(G)$, $\mathbf{L}(G)$ обе несравнимы и, кроме того, RG строго мажорирует как $\mathbf{L}(G)$, так и $\Sigma(G)$.

Предложение D. 1. Кольцо Ли группы G определяет сильную структуру ее нормальных делителей.

Доказательство. Существует изоморфизм структуры идеалов кольца $\mathbf{L}(G)$ на структуру нормальных делителей G, при котором числа элементов идеала и соответсвующего нормального делителя совпадают. Действительно, каждому $N \lhd G$ отвечает идеал J кольца $\mathbf{L}(G)$ такой, что $\mathbf{L}(G)/J \cong \mathbf{L}(G/N)$. Обратно, если задан $J \leqq \mathfrak{Z}(\mathbf{L}(G))$, то ему соответствует $N \leqq \mathfrak{Z}(G)$. Если же $J \nleqq \mathfrak{Z}(\mathbf{L}(G))$, то найдется $J_1 \leqq \mathfrak{Z}(\mathbf{L}(G))$, $(0) \subset J_1 \subset J$ (например, $J_1 = J \cap \mathfrak{Z}(\mathbf{L}(G))$. $\mathbf{L}(G)/J_1$ содержит идеал J/J_1 и по индукции можно считать, что идеалу J/J_1 соответствует нормальный делитель N/N_1 группы G/N_1. При этом снова $\mathbf{L}(G)/J \cong$ $\cong \mathbf{L}(G/N)$.

Если рассматривать не класс всех конечных групп, а его собственный подкласс, то пара несравнимых инвариантов может стать сравнимой, и мы получим некоторую факторструктуру $\overline{\mathscr{L}}$ структуры $\mathscr{L}$. Так, в случае конечных абелевых групп G инварианты $\mathfrak{R}(G)$, $X(G)$, $\Sigma(G)$, $\mathbf{L}(G)$ определяют G и, следовательно, натянутая на них структура вырождается в одноэлементную.

Более интересна ситуация для многообразия нильпотентных групп класса 2.

Предложение D. 2. Для конечных групп ниль-класса 2 кольцо Ли определяет таблицу характеров.

Доказательство. Пусть G — группа ниль-класса 2. Для $g, h \in G$ кольцо $\mathbf{L}(G)$ определяет $[g, h] \in G$ по mod $\{1\}$, т. е. точно. Поэтому кольцо $\mathbf{L}(G)$ указывает, какие элементы группы G сопряжены с данным $g \in G$. Этот класс сопряженных элементов совпадает со смежным классом по подгруппе $[g, G]$, порожденным g.

Но кроме распределения элементов группы G по классам сопряженных кольцо $\mathbf{L}(G)$ определяет и таблицу умножения „классовых сумм". В самом деле, для любых (не обязательно различных) $g, h \in G$

$$g \cdot [g, G] \cdot h \cdot [h, G] = gh[g, G]\,[h, G] = hg[g, G]\,[h, G].$$

Нормальные делители $[g, G]$ и $[h, G]$ содержатся в G' и комплекс $[g, G]\,[h, G]$ а, следовательно, и распределение инвариантного кножества $gh\,[g, G]\,[h, G]$ по классам сопряженных элементов определяются кольцом $\mathbf{L}(G)$.

Отметим, что спектральная таблица группы G не определяется кольцом $\mathbf{L}(G)$ даже для групп ниль-класса 2 (контпример: группы кватернионов и диедра 8-го порядка) и что, как уже указывалось, для группы ниль-класса 2 кольцо Ли и спектральная таблица составляют полную систему инвариантов.

Харьковский филиал института автоматики

(Поступило 6. II. 1970)