

О мультипликативных группах модулярных групповых алгебр примарных абелевых групп произвольной мощности. II.

Т. Ж. МОЛЛОВ (Пловдив)

Статья является продолжением работы [7]. Пусть $M(LG)$ — мультипликативная группа групповой алгебры LG абелевой p -группы G произвольной мощности над полем L характеристики p , и $S(LG)$ — силовская p -подгруппа группы $M(LG)$:

$$S(LG) = \left\{ x = \sum_{g \in G} \alpha_g g / \sum_{g \in G} \alpha_g = 1 \right\}.$$

Группа $S(LG)$ описана в [1] С. Д. Берманом в случае, когда L — алгебраическое расширение характеристики p простого поля Π (с характеристикой p), а G — счетная группа.

В настоящей работе описывается силовская p -подгруппа $S(LG)$ в следующих случаях:

1) L — произвольное алгебраическое расширение K характеристики p простого поля Π (с характеристикой p), а G — такая абелева p -группа, что если P — ее максимальная полная подгруппа, то фактор-группа $A = G/P$ имеет конечный тип n и все ульмовские факторы группы A — прямые произведения циклических групп;

2) L — поле K случая 1, а для абелевой p -группы G требуется следующее: если P — ее максимальная полная подгруппа и $G^{(i)}$ — подгруппа всех элементов бесконечной высоты группы $G^{(i-1)}$ $i = 1, 2, \dots, n$, $G^{(0)} = G$, то G/P — такое прямое произведение счетных групп, имеющее бесконечный тип τ , что группа $G^{(n)}$ счетная;

3) абелева p -группа G — счетная, а L — счетное поле характеристики p , являющееся чисто трансцендентным расширением алгебраического расширения K простого поля Π .

Укажем на некоторые *основные обозначения и понятия*, которые будем употреблять неизменно в статье:

G — абелева p -группа с мощностью μ и P — ее максимальная полная подгруппа;

L — поле характеристики p с мощностью λ , или коммутативное ассоциативное кольцо с единицей характеристики p (если оговорено противное);

$G^{p^i}(L^p)$, где $i = 0, 1, 2, \dots$ — множество p^i -ых степеней элементов группы G (поля или колца L), которое очевидно является группой (полем или кольцом);

$N(H)$ — нижний слой абелевой p -группы H ;

$|M|$ — мощность множества M , $\mu_i = |G^{p^i}|$ и $\lambda_i = |L^{p^i}|$, $i=0, 1, 2, \dots$ ($\lambda_0 = \lambda$, $\mu_0 = \mu$).

\aleph_0 — мощность множества натуральных чисел;

счетное множество — множество, равномощное множеству натуральных чисел;

знак „ Π ”, или „ \times ” — знак прямого произведения групп.

Терминология абелевых p -групп, которую будем употреблять, соответствует монографии [6], однако, в отличие от [6], групповую операцию абелевых p -групп будем записывать мультипликативно. Если β — произвольное порядковое число, то аналогично [6], стр. 158—159, вводим обозначение $G^{(\beta)}$, соответствующее в [6] обозначению G^β , для произвольной абелевой p -группы G , не обязательно редуцированной.

Пусть i и n — натуральные числа и $n \geq i$, а γ — произвольное кардинальное число. Через $C_\gamma^{i,n}$ (соответственно через C_γ^i) обозначаем прямое произведение циклических p -групп порядков $p^i, p^{i+1}, \dots, p^{i+n}$ (соответственно порядков $p^i, p^{i+1}, \dots, p^{i+s}, \dots$, где s — произвольное натуральное число), причем каждая из циклических групп порядка p^k , $i \leq k \leq n$ (соответственно каждая из циклических групп порядка p^l , $l \geq i$) встречается γ раз. Кроме того обозначаем $C_\gamma^{i+1,i} = 1$.

Предложение 1. Пусть G — абелева p -группа, H — ее подгруппа и L — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей характеристики p . Если фактор-группа G/H — прямое произведение циклических групп, то фактор-группа $S(LG)/S(LH)$ — также прямое произведение циклических групп.

Доказательство. Согласно критерию Куликова ([6], стр. 144) фактор-группу G/H можно представить объединением возрастающей последовательности

$$(1) \quad G_1|H \subseteq G_2|H \subseteq \dots \subseteq G_n|H \subseteq \dots$$

таких своих подгрупп, что высоты элементов каждой группы G_n/H в группе G/H конечны и ограничены в совокупности. Пусть N — точная верхняя грань высот элементов группы G_n/H в группе G/H .

Покажем, что группа $S^* = S(LG)/S(LH)$ является объединением возрастающей последовательности

$$S(LG_1)/S(LH) \subseteq S(LG_2)/S(LH) \subseteq \dots \subseteq S(LG_n)/S(LH) \subseteq \dots$$

своих подгрупп. Действительно, если $x = \left(\sum_{i=1}^s \alpha_i g_i \right) S(LH) \in S^*$ и $g_i \in G_{r_i}$, $i=1, 2, \dots, s$, то $x \in S(LG_{r_i})/S(LH)$, где $r_i = \max(r_1, \dots, r_s)$.

Высоты элементов группы $S_n^* = S(LG_n)/S(LH)$ в группе S^* не превосходит N . Допустим противное. Пусть элемент $\left(\sum_{i=1}^s \alpha_i g_i \right) S(LH) \neq S(LH)$, принадлежащий группе S_n^* , имеет высоту $m > N$ в группе S^* , т. е. существует элемент $\sum_j \beta_j g_j \in S(LG)$, так, что имеет место

$$(2) \quad \left(\sum_j \beta_j g_j \right)^{p^m} S(LH) = \left(\sum_{i=1}^s \alpha_i g_i \right) S(LH)$$

Так как элемент $z = \sum_{i=1}^s \alpha_i g_i$ не принадлежит группе $S(LH)$, то некоторое $g_i = g$,

которое участвует в записи элемента z , не принадлежит группе H . Тогда из равенства (2) получим

$$(3) \quad g = g_j^{p^m} h_r \quad (h_r \in H),$$

откуда

$$gH = (g_j H)^{p^m}$$

т. е. неединичный элемент gH фактор-группы G_n/H имеет высоту m ($m > N$) в фактор-группе G/H , что является противоречием. Согласно критерию Куликова, фактор-группа $S(LG)/S(LH)$ разлагается в прямое произведение циклических групп.

Примечание. Теорема и ее доказательство остаются без изменения, если вместо группы $S(LG)$ рассмотрим силовскую p -подгруппу $S^*(LG)$ группы $M(LG)$ (см. [7]) группового кольца LG , т. е. фактор-группа $S^*(LG)/S^*(LH)$ разлагается в прямое произведение циклических групп.

Следующая лемма исправляет некоторую неточность формулировки и доказательства леммы 1. 2' работы [1].

Лемма 1. Пусть $G^{(1)}$ — подгруппа всех элементов бесконечной высоты группы G и P — ее максимальная полная подгруппа, а L — поле характеристики p и K — подполе поля L , составленное из всех алгебраических элементов над простым подполем Π поля L . Пусть L — чисто трансцендентное расщирение поля K . Тогда группы $S(KG^{(1)})$ и $S(KP)$ являются соответственно подгруппой всех элементов бесконечной высоты и максимальной полной подгруппой группы $S(LG)$. Кроме того фактор-группы G/P и $S(LG)/S(KP)$ имеют один и тот же тип τ .

Доказательство. Мы будем использовать, что алгебраическое расщирение K характеристики p простого поля Π (с характеристикой p) является совершенным, т. е. из любого элемента поля K можно извлечь p^s -тый корень (s — произвольное натуральное) и наоборот, если из некоторого элемента α поля L извлекается произвольный p^s -тый корень, s — натуральное, то α принадлежит под полю K поля L .

Если $a = \sum_{k=1}^n \alpha_k g_k$ является элементом группы $S(LG)$ с бесконечной высотой, то для произвольного натурального s имеем $\sum_{k=1}^n \alpha_k g_k = (\sum_i \beta_i g_i)^{p^s}$, откуда получим $g_k = g_{k_1}^{p^s} = \dots = g_{k_r}^{p^s}$ и $\alpha_k = \beta_{k_1}^{p^s} + \dots + \beta_{k_r}^{p^s}$, следовательно, $g_k \in G^{(1)}$, $\alpha_k \in K$ и $\sum_{k=1}^n \alpha_k g_k \in S(KG^{(1)})$, $k=1, 2, \dots, n$, т. е. подгруппа элементов бесконечной высоты группы $S(LG)$ содержится в $S(KG^{(1)})$. Обратное включение очевидно.

Совпадение группы $S(KP)$ с максимальной полной подгруппой группы $S(LG)$ устанавливается аналогичным способом. Остальная часть доказательства совершается подобно доказательству леммы 1. 2' работы [1].

Лемма 2. Пусть $G^{(1)} \neq 1$, $|G^{p^k}| = \mu_k$, $|(G/G^{(1)})^{p^k}| = \nu_k$ и $|G^{(1)}| = \varrho$. Тогда $\mu_k = \max(\nu_k, \varrho)$.

Доказательство. Легко получается, что $(G/G^{(1)})^{p^k} = G^{p^k}/G^{(1)}$, откуда для мощности группы G^{p^k} имеем $\mu_k = \nu_k \varrho$. Однако ν_k — бесконечное кардинальное

число, так как порядки элементов группы $(G/G^{(1)})^{p^k}$ неограничены в совокупности. Следовательно $\mu_k = \max(v_k, \varrho)$.

Лемма 3. Пусть H — бесконечная периодическая группа, b — ее фиксированный элемент и A — ее подгруппа с мощностью $\varrho \cong \aleph_0$. Тогда мы можем вполне упорядочить элементы группы A таким образом, чтобы в A найти подмножество $F: g_1, \dots, g_\alpha, \dots$ с мощностью ϱ со следующим свойством: для любых двух элементов g_α и g_β этого подмножества, для которых $\alpha < \beta$, равенство $g_\alpha = g_\beta b$ является невозможным.

Доказательство. Положим $g_1 = 1$. Пусть α — произвольное порядковое число, мощность которого не превосходит ϱ . Допустим, что выбраны все элементы g_γ искомого подмножества для $\gamma < \alpha$. Пусть x_γ являются решениями уравнений $g_\gamma = x_\gamma b$, $\gamma < \alpha$. Тогда выбираем элемент $g_\alpha \in A$, $g_\alpha \neq g_\gamma, x_\gamma, \gamma < \alpha$, в качестве элемента искомого подмножества. Этим образом получим подмножества элементов $g_1, \dots, g_\alpha, \dots$ и $x_1, \dots, x_\alpha, \dots$, имеющие мощность ϱ . Легко видеть, что первое из них является искомым подмножеством F .

Лемма 4. Пусть K — алгебраическое расширение характеристики p простого поля Π (с характеристикой p). Если $G^{(1)} \neq 1$ и фактор-группа $G/G^{(1)}$ — прямое произведение циклических групп, то

$$S(KG)/S(KG^{(1)}) \cong \prod_{k=0}^{\infty} C_{\mu_k}^{k+1, k+1}, \quad \mu_0 = \mu.$$

Доказательство. По предложению 1 фактор-группа $B = S(KG)/S(KG^{(1)})$ разлагается в прямое произведение циклических групп. Порядки элементов $(G/G^{(1)})^{p^k} = G^{p^k}/G^{(1)}$ неограничены в совокупности. Покажем, что число прямых множителей порядка p^{k+1} , $k=0, 1, 2, \dots$ в прямом разложении группы B равняется числу μ_k . Мы будем использовать, что по лемме 2 $\mu_k = \max(v_k, \varrho)$. Обозначим $D = G/G^{(1)}$, $N[B^{p^s}] = \tilde{N}_s$, $s=0, 1, 2, \dots$

и

$$(4) \quad D^{p^k} = \prod_{i \in I} (a_i G^{(1)}), \quad D^{p^{k+1}} = \prod_{i \in I} (a_i^p G^{(1)}).$$

Различаем следующие случаи:

1. $\varrho \leq v_k$ ($v_k = \mu_k$).

Образует элементы

$$A_j = [1 + a_j(g' - 1)]S(KG^{(1)}), \quad g' \neq 1, \quad i \in I, \quad g'^p = 1, \quad g' \in G^{(1)}.$$

Очевидно $A_j \in \tilde{N}_k$. Обозначим $\bar{A}_j = 1 + a_j(g' - 1)$. Элементы A_i и A_j , при $i \neq j$, $j \in I$, лежат в разных смежных классах группы \tilde{N}_k по подгруппе \tilde{N}_{k+1} . В противном случае получим $\bar{A}_i S(KG^{(1)}) = \bar{A}_j S(KG^{(1)})E$, где $E \in B^{p^{k+1}} = S(KG^{p^{k+1}})/S(KG^{(1)})$. Так как произвольный элемент группы $S(KG^{p^{k+1}})$ записываем в виде

$A = \sum_{i_1, \dots, i_r} a_{i_1}^{p \times i_1} \dots a_{i_r}^{p \times i_r} A_{i_1 \dots i_r}$, где $A_{i_1 \dots i_r} \in S(KG^{(1)})$, то из вышеуказанного равенства получим

$$\bar{A}_i = \bar{A}_j AC, \quad \text{где } C \in S(KG^{(1)}),$$

или

$$1 + a_i(g' - 1) = [1 + a_j(g' - 1)] \sum_{i_1, \dots, i_r} a_{i_1}^{p^{\alpha_{i_1}}} \dots a_{i_r}^{p^{\alpha_{i_r}}} A_{i_1 \dots i_r} C.$$

Это равенство однако невозможно, так как в левой его части классу $a_i G^{(1)}$ принадлежат только элементы $a_i g'$ и a_i , в то время как в его правой части не встречаются элементы этого класса. Следовательно $|\tilde{N}_k/\tilde{N}_{k+1}| \cong v_k$. С другой стороны $|\tilde{N}_k/\tilde{N}_{k+1}| \cong |S(KG^{p^k})| = \max |\mathfrak{N}_0, \mu_k) = \mu_k = v_k$. Следовательно $|\tilde{N}_k/\tilde{N}_{k+1}| = v_k$, т. е. число прямых множителей порядка p^{k+1} в прямом разложении группы B на циклические группы равняется $v_k = \mu_k$.

2. $v_k = \varrho$.

Можем предполагать, что порядок фиксированного элемента $a_i = a$ группы G^{p^k} из (4) равняется p^m , где $m > 1$. $G^{p^k} = \mu_k = \varrho$. Обозначим $a^{p^{m-1}} = b$. Согласно лемме 3 элементы подгруппы $G^{(1)}$ группы G^{p^k} можно вполне упорядочить и из ней выделить такое подмножество $F: g_1, \dots, g_\alpha, \dots$ с мощностью ϱ , что равенство $g_\alpha = g_\beta b$ невозможно при $\alpha < \beta$. Образуют элементы

$$A(g_\alpha) = (1 + g_\alpha a - g_\alpha a^{1+p^{m-1}}) S(KG^{(1)}), \quad g_\alpha \in F.$$

Очевидно $A(g_\alpha) \in \tilde{N}_k$. Если $g_\alpha, g_\beta \in F$ и $g_\alpha \neq g_\beta$, $\alpha < \beta$, то $A(g_\alpha)$ и $A(g_\beta)$ лежат в разных смежных классах подгруппы \tilde{N}_k по группе \tilde{N}_{k+1} . В противном случае, используя обозначения случая 1, получим

$$1 + g_\alpha a - g_\alpha a^{1+p^{m-1}} = (1 + g_\beta a - g_\beta a^{1+p^{m-1}}) AC.$$

В правой части этого равенства при умножении единицы 1 на элементы произведения AC получаются всегда степени элемента a , показатели которого кратны числу p , а при умножении элементов $g_\beta a$ и $g_\beta a^{1+p^{m-1}}$ на элементы, которые входят в AC , так как

$$1 + lp \not\equiv 0 \pmod{p}, \quad 1 + p^{m-1} + lp \not\equiv 0 \pmod{p}, \quad m - 1 \geq 1,$$

не получаем таких степеней. Отсюда следует, что $1 = AC$, что приводит к равенству

$$g_\alpha a - g_\alpha a^{1+p^{m-1}} = g_\beta a - g_\beta a^{1+p^{m-1}}.$$

Если $p \neq 2$, то это равенство невозможно. Если $p = 2$, то должно было быть $g_\alpha = g_\beta a^{2^{m-1}}$, что согласно рассматриванию в начале случая ($a^{2^{m-1}} = b$), также невозможно. Следовательно $|\tilde{N}_k/\tilde{N}_{k+1}| \cong \varrho$, однако $|\tilde{N}_k/\tilde{N}_{k+1}| \cong \varrho$, так как $|B^{p^k}| \cong \varrho$. Мы получили, что число прямых множителей порядка p^{k+1} в прямом разложении группы B на циклические группы равняется $\varrho = \mu_k$, чем доказательство закончено.

Пусть бесконечная абелева p -группа G разлагается в прямое произведение циклических групп, при котором мощность множества прямых множителей порядка p^n равняется τ_n . Говорят, что последовательность

$$(5) \quad \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \dots$$

является последовательностью группы G . В [7] введены понятия последовательность первого и последовательность второго рода и критические числа группы G . Эти понятия используем для формулировки следующей теоремы.

Теорема А. Пусть K — алгебраическое расширение характеристики p простого поля Π (с характеристикой p) и G — такая абелева p -группа, что $G^{(1)} \neq \mathbf{P}$ и фактор-группа $G/G^{(1)}$ разлагается в прямое произведение циклических групп, причем мощность множества прямых множителей порядка p^i равняется τ_i . Тогда фактор-группа $B = S(KG)/S(KG^{(1)})$ разлагается в прямое произведение циклических групп, причем

- 1) если (5) — последовательность первого рода группы $G/G^{(1)}$, то $B \cong C_\mu^1$;
- 2) если (5) — последовательность второго рода группы $G/G^{(1)}$ с критическими числами $\tau_{\alpha_1}, \tau_{\alpha_2}, \dots, \tau_{\alpha_s}$, то

$$B \cong C_{\mu}^{1, \alpha_1} \times C_{\mu_{\alpha_1}}^{\alpha_1 + 1, \alpha_2} \times \dots \times C_{\mu_{\alpha_{s-1}}}^{\alpha_{s-1} + 1, \alpha_s} \times C_{\mu_{\alpha_s}}^{\alpha_s + 1}.$$

Доказательство. По предложению 1 группа B разлагается в прямое произведение циклических групп. Теорема вытекает из леммы 4 и из леммы 2, 3 статьи [7].

Теорема Б. Если G — полная абелева p -группа мощности μ , а K — алгебраическое расширение характеристики p простого поля Π , то группа $S(KG)$ разлагается в прямое произведение μ групп типа p^∞ .

Доказательство. По лемме 1 группа $S(KG)$ является полной и, следовательно, она разлагается в прямое произведение групп типа p^∞ . При $\mu = \aleph_0$ в силу доказательства леммы 1.12 статьи [1]. Пусть $\mu > \aleph_0$. Тогда по следствию 2 леммы 4 работы [7] имеем $|S(KG)| = \mu$. Пусть $S(KG) = \prod_{i \in I} P_i$, где P_i — группа типа p^∞ . Если предположим, что $|I| < \mu$, то по лемме 4 статьи [7] получим $|S(KG)| = \max(\aleph_0, |I|) < \mu$, что является противоречием. Аналогично предположение $|I| > \mu$ приводит к противоречию. Остается $|I| = \mu$.

Теорема В. Пусть G — счетная полная абелева p -группа, а L — такое счетное поле характеристики p , что оно является чисто трансцендентным расширением алгебраического расширения K простого поля Π . Тогда фактор-группа $S(LG)/S(KG) \cong C_{\aleph_0}^1$.

Доказательство. Мощность фактор-группы $S = S(LG)/S(KG)$ не превосходит \aleph_0 (см. следствие 2 леммы 4 статьи [7]). Группа S не содержит элементов бесконечной высоты, ибо по лемме 1 группа $S(KG)$ совпадает с подгруппой элементов бесконечной высоты группы $S(LG)$ и, следовательно, S разлагается в прямое произведение циклических групп. Обозначим $\tilde{N}_k = N(S^{p^k})$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Пусть a — фиксированный элемент нижнего слоя группы G . Согласно лемме 3, элементы группы G можно вполне упорядочить и из ней выделить такое счетное подмножество $F: b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$, что равенство $b_r = b_s a$ невозможно при $r < s$. Пусть $(x_i)_{i \in I}$ — является базисом трансцендентности поля L (см. [2]). Рассматриваем элементы

$$A_r = [b_r + (1+a)x_1^{p^k}]S(KG), \quad b_r \in F.$$

Очевидно $A_r \in \tilde{N}_k$. При $b_r \neq b_s$ элементы A_r и A_s лежат в разных смежных классах группы \tilde{N}_k по подгруппе \tilde{N}_{k+1} . В противном случае

$$b_r + (1-a)x_1^{p^k} = [b_s + (1-a)x_1^{p^k}] \sum_{\tau} \frac{f_\tau}{h_\tau} g_\tau,$$

или

$$(6) \quad \tilde{h}[b_r + (1-a)x_1^{p^k}] = [b_s + (1-a)x_1^{p^k}] \sum_t \tilde{f}_t g_t, \quad g_t \in G,$$

где h_t, \tilde{h}, f_t и \tilde{f}_t являются полиномами неизвестных $x_1^{p^{k+1}}, \dots, x_n^{p^{k+1}}$ над полем K . Обозначим $I' = I \setminus 1$. Пусть K_1 является таким чистым расширением поля K , что $(x_i)_{i \in I'}$ — чистый базис поля K_1 над K (см. [2], стр. 108). Легко видеть, что LG является свободным K_1G -модулем, в L — свободным K_1 -модулем и $1, x_1, x_1^2, \dots$ входят в их базис, следовательно

$$(7) \quad \sum_t \tilde{f}_t g_t = \sum_{i=0}^m u_i (x_1^{p^{k+1}})^i, \quad \tilde{h} = \sum_{i=0}^m v_i (x_1^{p^{k+1}})^i, \quad u_i \in K_1G, v_i \in K_1.$$

Из (6) и (7) следует

$$(8) \quad \sum_{i=0}^m [b_r v_i x_1^{i p^{k+1}} + (1-a)v_i x_1^{i p^{k+1} + p^k}] = \sum_{i=0}^m [b_s u_i x_1^{i p^{k+1}} + (1-a)u_i x_1^{i p^{k+1} + k}].$$

Сравнивая в (8) коэффициенты перед одинаковыми степенями элемента x_1 , получается $b_r v_i = b_s u_i, (1-a)v_i = (1-a)u_i$, откуда

$$(1-a)v_i = (1-a)b_s^{-1} b_r v_i \quad (i=0, 1, 2, \dots, m).$$

Так как по крайней мере одно $v_i \neq 0$ и $v_i \in K_1$, то $1-a = b_s^{-1} b_r - a b_s^{-1} b_r$. Элемент a левой части этого равенства не встречается в его правой части согласно выбору элементов b_r и b_s , что является противоречием. Следовательно $|\tilde{N}_k / \tilde{N}_{k+1}| \cong \cong \aleph_0$, чем теорема доказана.

Теорема Г. Пусть для абелевой p -группы G имеет место $G = P \times G_1$, где $P \neq 1$ — полная группа, а G_1 — прямое произведение циклических групп, причем $|G| = \mu, |G_1| = \nu, |P| = \gamma$, а K — алгебраическое расширение характеристики p простого поля Π . Тогда группа $B = S(KG)/S(KP)$ разлагается в прямое произведение циклических групп, причем

1) если (5) — последовательность первого рода группы G_1 , то $B \cong C_\mu^1$ или $B \cong C_\mu^{1,\alpha}$ в зависимости от того, являются ли порядки элементов группы G_1 соответственно неограниченными в совокупности или показатель этой группы равняется p^x ;

2) если (5) — последовательность второго рода групп G_1 с критическими числами $\tau_{\alpha_1}, \tau_{\alpha_2}, \dots, \tau_{\alpha_s}$, то

$$B \cong C_\mu^{1,\alpha_1} \times C_{\mu_{\alpha_1}}^{\alpha_1+1,\alpha_2} \times \dots \times C_{\mu_{\alpha_{s-1}}}^{\alpha_{s-1}+1,\alpha_s} \times B',$$

где группа B' описывается следующим образом:

а) если порядки элементов группы G_1 неограничены в совокупности, то

$$B' \cong C_{\mu_{\alpha_s}}^{\alpha_s+1}$$

б) если показатель группы G_1 равняется p^x , то

$$B' \cong C_\gamma^{\alpha_s+1,\alpha}.$$

Теорема Д. Пусть G — такая счетная абелева p -группа (необязательно редуцированная), что $G \neq G^{(1)} \neq 1$ и L — такое счетное поле характеристики p , что оно является чисто трансцендентным расширением алгебраического расширения K простого поля Π . Тогда фактор-группа $B = S(LG)/S(KG^{(1)}) \cong C_{\aleph_0}^1$.

Доказательство. Теоремы Д и Г можно доказать одновременно. Их доказательство аналогично доказательству теоремы А. Мощность фактор-группы $B = S(LG)/S(KG^{(1)})$ не превосходит \aleph_0 и так как не содержит элементов бесконечной высоты, то она разлагается в прямое произведение циклических групп. Если порядки элементов фактор-группы $G/G^{(1)}$ неограничены в совокупности, то рассуждаем как в случае 2 леммы 4, имея ввиду, что $v_k = \aleph_0$. Если фактор-группа $G/G^{(1)}$ имеет показатель p^x , то мощность множества прямых множителей порядка p^{x+i} , $i=1, 2, \dots$ в прямом разложении группы B на циклические группы равняется кардинальному числу \aleph_0 . Действительно, мощность множества прямых множителей порядка p^{x+i} , $i=1, 2, \dots$, в прямом разложении группы B на циклические группы равняется мощности множества прямых множителей порядка p^i в прямом разложении группы $B^{p^x} = S(L^{p^x}P)/S(KP)$, а эта мощность по теореме В действительно равняется \aleph_0 .

Для установления формулы разложения группы B в случае 2 теоремы Г необходимо отметить, что $\max(\gamma, \nu) = \mu$, $\max(\gamma, \tau_{x_i}) = \mu_{x_i-1}$, $1 \leq i \leq s$, $\mu_{x_0} = \mu$.

Теорема 1. Пусть G — такая бесконечная абелева p -группа мощности μ , что, если P — ее максимальная полная подгруппа мощности p , то фактор-группа $A = G/P$ имеет конечный тип n (является единичной группой) и ульмовские факторы группы A — прямые произведения циклических групп. Пусть K — алгебраическое расширение характеристики p простого поля Π . Тогда силовская p -подгруппа $S(KG)$ мультипликативной группы групповой алгебры KG описывается следующим образом.

Имеет место прямое разложение

$$(7) \quad S(KG) = S(KP) \times Q$$

Силовская p -подгруппа $S(KP)$ мультипликативной группы групповой алгебры KP — максимальная полная подгруппа группы $S(KG)$. Если $P=1$, то $S(KP)=1$, а если $P \neq 1$, то группа $S(KP)$ разлагается в прямое произведение γ групп типа p^∞ .

Если G — полная абелева p -группа, то $Q=1$.

Пусть G — неполная абелева p -группа. Обозначаем через $G^{(i+1)}$ подгруппу, составленную из всех элементов группы $G^{(i)}$, имеющих в $G^{(i)}$ бесконечную высоту, $i=0, 1, 2, \dots, n-1$; $G^{(0)}=G$, $G^{(n)}=P$. Группа Q имеет тип n и определяется с точностью до изоморфизма своим типом и своим ульмовскими факторами \bar{Q}_i , для которых имеем

$$\bar{Q}_i \cong S(KG^{(i)})/S(KG^{(i+1)}), \quad i=0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Факторы \bar{Q}_i , $0 \leq i \leq n-2$, разлагаются в прямые произведения циклических групп и характеризуются теоремой А (при подходящем изменении обозначений).

При $P=1$ последний фактор $\bar{Q}_{n-1} \cong S(KG^{(n-1)})/S(KP)$ разлагается в прямое произведение циклических p -групп, причем он характеризуется теоремой А* работы [7].

При $P \neq 1$ фактор \bar{Q}_{n-1} разлагается в прямое произведение циклических групп и его можно характеризовать теоремой Г.

Доказательство. Теорема следует из леммы 1, теорем А* работы [7] Б, А, Г и теоремы CRAWLEY [5]. Считаемся с тем, что порядки элементов групп $G^{(i)}/G^{(i+1)}$, $i=0, 1, \dots, n-2$, неограничены в совокупности, так как $G^{(i)}/G^{(i+1)} \cong \cong A^{(i)}/A^{(i+1)}$ ([6], стр. 161) и с тем, что ряд Ульма группы Q состоит из членов, соответственно изоморфных членам ряда

$$S(KG)/S(KP) \supset S(KG^{(1)})/S(KP) \supset \dots \supset S(KG^{(n-1)})/S(KP) \supset 1.$$

Теорема 2. Пусть G — такая счетная абелева p -группа, что если P — ее максимальная полная подгруппа, то $A=G/P$ имеет тип τ или является единичной группой, L — счетное поле характеристики p , Π — простое подполе поля L и K — подполе поля L , составленное из всех алгебраических элементов над полем Π . Пусть L — чисто трансцендентное расширение поля K . Тогда силовская p -подгруппа $S(LG)$ мультипликативной группы групповой алгебры LG описывается следующим образом. Имеет место прямое разложение

$$(8) \quad S(LG) = S(KP) \times Q.$$

Группа $S(KP)$ — максимальная полная подгруппа группы $S(LG)$ и если $P \neq 1$, то она разлагается в прямое произведение счетного числа групп типа p^∞ .

Если G — полная абелева p -группа, то $Q \cong C_{80}^1$.

Пусть G не является полной абелевой p -группой. Группа Q имеет τ и определяется с точностью до изоморфизма своим типом и своими ульмовскими факторами которые, за исключением последнего, при положении, что τ — неперделное, порядковое число, являются изоморфными группе C_{80}^1 .

Пусть τ не является предельным порядковым числом. Последний ульмовский фактор $\bar{Q}_{\tau-1} \cong S(KG^{(\tau-1)})/S(KG^{(\tau)})$ характеризуется при $P=1$ теоремой А* работы [7], а при $P \neq 1$ — теоремой Г.

Доказательство. Теорема непосредственно вытекает из леммы 1, теорем А, Б, В, Г, Д, и из теоремы Ульма, причем применяется схема рассуждения теоремы 1. 3 работы [1].

Теорема 3. Пусть K — алгебраическое расширение характеристики p простого поля Π (с характеристикой p). Пусть абелева p -группа G имеет максимальную подгруппу P с мощностью γ , и фактор-группа G/P — такое прямое произведение счетных групп, имеющее бесконечный тип τ , что группа $G^{(n)}$ счетная (n — натуральное число). Тогда силовская p -подгруппа $S(KG)$ мультипликативной группы групповой алгебры KG описывается следующим образом.

Имеет место прямое разложение (7). Группа $S(KP)$ характеризуется тем же самым образом, как в теореме 1.

Группа Q имеет тип τ и определяется с точностью до изоморфизма своим типом и своими ульмовскими факторами \bar{Q}_α , для которых имеет место $\bar{Q}_\alpha \cong \cong S(KG^{(\alpha)})/S(KG^{(\alpha+1)})$, где α — порядковое число, меньше τ или равно нулю.

Факторы \bar{Q}_0 и \bar{Q}_α , $\alpha < \tau$, разлагаются в прямые произведения циклических групп и описываются теоремой А (при подходящем изменении обозначений).

Пусть τ не является предельным порядковым числом. При $P=1$ последний ульмовский фактор $\bar{Q}_{\tau-1} = S(KG^{(\tau-1)})/S(KG^{(\tau)})$ характеризуется теоремой A^* работы [7], а при $P \neq 1$ — теоремой Г.

Доказательство. По лемме 1 группа Q имеет тип τ . Так как $G^{(n)} \neq P$ и $G^{(n)}$ счетная, то из теоремы А следует, что группа $Q^{(n)} \cong S(KG^{(n)})/S(KP)$ является также счетной. Фактор-группа $A = G/P$ — прямое произведение счетных групп, следовательно, фактор-группы $G^{(i-1)}/G^{(i)} \cong A^{(i-1)}/A^{(i)}$, $i=1, 2, \dots, n$ — прямые произведения циклических групп, откуда по предложению 1 вытекает, что фактор-группы $S(KG^{(i-1)})/S(KG^{(i)})$, $i=1, 2, \dots, n$, являются прямыми произведениями циклических групп. Однако $Q^{(i-1)}/Q^{(i)} \cong S(KG^{(i-1)})/S(KG^{(i)})$, т. е. $Q^{(i-1)}/Q^{(i)}$ — прямые произведения циклических групп, $i=1, 2, \dots, n$. Тогда из работы [3] Ирвина и Рихмана вытекает, что группа Q является прямым произведением счетных групп, следовательно, по теореме Колеттиса [4], группа Q определяется с точностью до изоморфизма своим типом и своим ульмовскими факторами, описание которых дано в формулировке теоремы.

Условия изоморфизма. Пусть абелева p -группа G и коммутативное кольцо L с единицей и характеристики p , а также абелева p -группа \bar{G} и коммутативное кольцо \bar{L} с единицей и характеристики p такие, что они удовлетворяют условиям некоторых формулированных теорем настоящей работы и работы [7]. В таком случае можно указать на необходимые и достаточные условия изоморфизма групп $S(LG)$ и $S(\bar{L}\bar{G})$. Мы не будем останавливаться на этом вопросе из-за большого числа возможных случаев, и, главным образом, из-за того, что руководствуясь формулировками уже доказанных теорем, указание на изоморфизм происходит без затруднений (это указание состоит из обычного комбинирования случаев разложения группы $S(LG)$ с случаями разложения группы $S(\bar{L}\bar{G})$ и описания непротиворечивых комбинированных случаев на основании вышедоказанных теорем).

Литература

- [1] Берман С. Д., Групповые алгебры счетных абелевых p -групп, *Publ. Math. (Debrecen)* **14** (1967), 365—405.
- [2] Бурбаки Н., Алгебра, многочлены и поля, упорядоченные группы, *Москва*, 1965.
- [3] IRWIN J. and RICHMAN F., Direct sums of countable groups and related concepts, *J. Algebra* **2** (1965), 443—450.
- [4] KOLETTIS, G., Direct sums of countable groups, *Duke Math. J.*, **27** (1960), 111—125.
- [5] CRAWLEY P., ABELIAN p -groups determined by their Ulm sequences, *Pacific J. Math.*, **22** (1967), 235—239.
- [6] Курош А. Г., *Теория групп*, Москва 1967.
- [7] Моллов Т. Ж., О мультипликативных группах модулярных групповых алгебр примарных абелевых групп произвольной мощности. I., *Publ. Math. (Debrecen)* **18** (1971), 9—21.

(Поступило 25. III. 1969.)