Über die Nichtexistenz gewisser Type von Linienelementräumen von rekurrenter Krümmung

Von ARTHUR MOÓR (Sopron)

§ 1. Einleitung

Ein Linienelementraum L_n ist eine Mannigfaltigkeit der Linienelemente $(x^i, \dot{x}^i)$ in der eine geometrische Struktur durch ein invariantes Differential der Vektoren $\xi^i(x, \dot{x})$ definiert ist (vgl. [2]). Sind die Übertragungsparameter von einer Grundfunktion $F(x, \dot{x})$, die in den $\dot{x}^i$ positiv homogen von erster Dimension ist, ableitbar und bestimmt diese Grundfunktion eine Metrik in dem Linienelementraum, so ist der Linienelementraum ein Finslerraum (vgl. [1]).

In den Linienelementräumen existieren im Wesentlichen drei Krümmungstensoren und zwei fundamentale kovariante Ableitungen, die in der Formel des invarianten Differentials vorkommen. Wenn für eine der Krümmungstensoren eine Relation von der Form

$$F_j{}^i{}_{kl|m_1 m_2 \dots m_s} = T_{m_1 m_2 \dots m_s} F_j{}^i{}_{kl} \qquad (s \geqq 1)$$

besteht, wo $F_j{}^i{}_{kl}$ eine der Krümmungstensoren und „$|m$" eine der kovarianten Ableitungen bedeutet, so nennen wir den Linienelementraum einen Raum von s-fach rekurrenter Krümmung ($s \geqq 1$).

Wir wollen im folgenden beweisen, daß bezüglich der Krümmungstensoren $S_j{}^i{}_{kl}$ und $P_j{}^i{}_{kl}$ sowohl in Finslerräumen, wie auch in allgemeinen Linienelementräumen keine Type von rekurrenter Krümmung existieren können, wenn die kovariante Ableitung im Finslerraum die durch

$$\xi^i{}_{;m} = F(\partial_{\dot{x}^m} \xi^i + C_j{}^i{}_m \xi^j) \tag{1. 1}$$

angegebene zweite kovariante Ableitung bzw. im allgemeinen affinzusammenhängenden Linienelementraum deren Verallgemeinerung ist.

§ 2. Der Fall der Finslerräume

Wenn wir die Überschiebung mit dem Einheitsvektor

$$l^i \overset{\text{def}}{=} \frac{\dot{x}^i}{F(x, \dot{x})}$$

des Finslerraumes — wie gewöhnlich — durch den Index „$_0$" bezeichnen, so gilt das folgende

Lemma 1. *Gilt für einen Tensor* $H{:}{:}._i \not\equiv 0$ *der in den* $\dot{x}^i$ *homogen von nullter Dimension ist im Finslerraum die Relation*

$$H{:}{:}._0(x, \dot{x}) = 0, \tag{2. 1}$$

so kann der Tensor $H{:}{:}._i$ *einer Relation von der Form:*

$$H{:}{:}._{i;m_1 \dots m_s} = T_{m_1 \dots m_s} H{:}{:}._i \qquad (s \geqq 1) \tag{2. 2}$$

nicht genügen (die Punkte bei H bedeuten nicht ausgeschriebene Indizes).

Beweis. Nehmen wir an, daß (2. 2) besteht. Nach einer Überschiebung mit $l^{m_{s-1}}$ wird:

$$H{:}{:}._{i;m_1 \dots m_{s-2} 0 m_s} - H{:}{:}._{i;m_1 \dots m_{s-1}} l^{m_{s-1}}_{;m_s} = T_{m_1 \dots 0 m_s} H{:}{:}._i. \tag{2. 3}$$

Auf Grund von (1. 1), ferner auf Grund von $C_j{}^i{}_0 = 0$ ist für Tensoren, die in den $\dot{x}^i$ homogen von nullter Dimension sind

$$_{;m} l^m = 0, \tag{2. 4}$$

$$l^i{}_{;m} = \delta^i_m - l^i l_m. \tag{2. 5}$$

Da die Operation (1. 1) den Homogeneitätsgrad nicht verändert ($C_j{}^i{}_m$ ist in den $\dot{x}^i$ homogen von (-1)-ter Dimension), ferner $H{:}{:}._i(x, \dot{x})$ in den $\dot{x}^i$ homogen von nullter Dimension vorausgesetzt wurde, folgt aus (2. 3) die Relation:

$$H{:}{:}._{i;m_1 \dots m_{s-2} m_s} = -T_{m_1 \dots m_{s-2} 0 m_s} H{:}{:}._i.$$

Wenn wir jetzt in ähnlicher Weise mit $l^{m_{s-2}}, \dots, l^{m_1}$ Überschiebungen durchführen, so bekommen wir endlich eine Formel von der Form:

$$H{:}{:}._{i;m} = K_m H{:}{:}._i, \tag{2. 6}$$

wo K_m aus $T_{m_1 \dots m_s}$ durch Überschiebungen mit dem Einheitsvektor $l^{m_{s-1}}, \dots$ entstanden ist. Auf Grund von (2. 1) folgt aus (2. 6) nach einer Überschiebung mit l^i in Hinsicht auf (2. 4) und (2. 5):

$$H{:}{:}._i l^i_{;m} \equiv H{:}{:}._m = 0$$

und das widerspricht der Voraussetzung. Daraus folgt die Richtigkeit des Lemmas.

Da in den Finslerräumen für den zweiten bzw. dritten Krümmungstensor

$$P_j{}^i{}_{k0} = 0, \quad S_j{}^i{}_{k0} = 0$$

gilt, folgt aus dem Lemma 1 der

Satz 1. *Es existieren keine Finslerräume von rekurrenter Krümmung bezüglich der Krümmungstensoren $P_j{}^i{}_{kl}$ und $S_j{}^i{}_{kl}$, wenn die kovariante Ableitung die durch* (1. 1) *bestimmte zweite Cartansche kovariante Ableitung ist.*

Es kann leicht verifiziert werden, daß statt der Operation (1. 1) im Lemma 1 und im Satz 1 auch die Operation:

$$\|_m = F\partial_{\dot{x}^m}$$

verwendet werden kann, die auch eine kovariante Ableitung des Finslerraumes ist.

§ 3. Der Fall der affinzusammenhängenden Linienelementräume

Die Begründung der Theorie der affinzusammenhängenden Linienelementräume hat O. Varga in seiner Arbeit [2] durchgeführt. Das invariante Differential eines kontravarianten Vektors $\xi^i(x, \dot{x})$ ist durch die Formel:

(3. 1) $$D\xi^i = d\xi^i + C_j{}^i{}_k(x, \dot{x})\xi^j\, d\dot{x}^k + \Gamma_j{}^i{}_k(x, \dot{x})\xi^j\, dx^k$$

festgelegt. Aus der Forderung:

$$D\xi^i(x, \dot{x}) = D\xi^i(x, \lambda\dot{x}),$$

wenn $\xi^i(x, \dot{x})$ in den $\dot{x}^i$ homogen von nullter Dimension vorausgesetzt wurde, leitete O. Varga für die $C_j{}^i{}_k$ die Relationen:

(3. 2) $$C_j{}^i{}_0 \equiv C_j{}^i{}_k \dot{x}^k = 0$$

und

(3. 3) $$C_j{}^i{}_k(x, \lambda\dot{x}) = \lambda^{-1} C_j{}^i{}_k(x, \dot{x})$$

ab. (Der Index „0" wird im affinen Fall die Überschiebung mit $\dot{x}^i$ bezeichnen.) Die Größen $C_j{}^i{}_k$ sind also in den $\dot{x}^i$ homogen von (-1)-ter Dimension. Im weiteren wird in der Vargaschen Theorie noch die Bedingung $C_0{}^i{}_k=0$ vorausgesetzt, die aber wir im folgenden fallen lassen werden. Wir bemerken noch, daß $C_j{}^i{}_k$ ein Tensor ist und die Transformationsformeln der $\Gamma_j{}^i{}_k$ befinden sich in [2] (Formel (1, 6)). $\Gamma_j{}^i{}_k(x, \dot{x})$ ist übrigens in den $\dot{x}^i$ homogen von nullter Dimension.

Wir umformen (3. 1). Da $\dot{x}^i$ im Wesentlichen auch ein kontravarianter Vektor ist, folgt aus (3. 1) nach der Substitution $\xi^i = \dot{x}^i$ und $D\dot{x}^i = \pi^i(d)$:

(3. 4) $$\pi^i(d) \equiv d\dot{x}^k(\delta^i_k + C_0{}^i{}_k) + \Gamma_0{}^i{}_k\, dx^k.$$

Wir stellen nun die wichtige Forderung, daß

(3. 5) $$\operatorname{Det}(\delta^i_k + C_0{}^i{}_k) \neq 0$$

bestehe, d.h. es ist

(3. 6) $$(\delta^i_k + C_0{}^i{}_k) J^k_r = \delta^i_r$$

für den Tensor J_r^k eindeutig lösbar. Nach einer bekannten Satz der Tensoralgebra folgt aus (3. 6) auch die Relation:

$$(\delta_j^i + C_0{}^i{}_j) J_i^k = \delta_j^k. \tag{3.7}$$

Überschieben wir nun (3. 4) mit J_i^s, so kann auf Grund von (3. 7) $d\dot{x}^i$ durch $\pi^i(d)$ ausgedrückt werden. Setzen wir diesen Wert von $d\dot{x}^i$ in (3. 1) ein, so wird:

$$D\xi^i = d\xi^i + C_j^{*i}{}_k \xi^j \pi^k(d) + \Gamma_j^{*i}{}_k \xi^j dx^k, \tag{3.8}$$

wo

$$C_j^{*i}{}_k \equiv C_j{}^i{}_s J_k^s \tag{3.9a}$$

$$\Gamma_j^{*i}{}_k \equiv \Gamma_j{}^i{}_k - C_j^{*i}{}_s \Gamma_0{}^s{}_k \tag{3.9b}$$

bedeuten.

$$I_j^h \equiv \delta_j^h + C_0{}^h{}_j \tag{3.10}$$

ist nach (3. 6) offenbar der inverse Tensor von J_r^k, und da nach (3. 5) und (3. 6) $\mathrm{Det}\,(J_r^k) \neq 0$ besteht, folgt aus (3. 6), daß I_j^h eindeutig bestimmt ist.

Die fundamentalen kovarianten Ableitungen erhalten wir unmittelbar, wenn wir in (3. 8)

$$d\xi^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} dx^k + \frac{\partial \xi^i}{\partial \dot{x}^k} d\dot{x}^k$$

setzen, und $d\dot{x}^k$ wie vorher mittels (3. 4) durch $\pi^k(d)$ ausdrücken. Es wird:

$$D\xi^i = \xi^i_{;r} J_k^r \pi^k(d) + \xi^i|_k dx^k, \tag{3.11}$$

wo

$$\xi^i_{;r} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial \xi^i}{\partial \dot{x}^r} + C_j{}^i{}_r \xi^j, \tag{3.12}$$

$$\xi^i|_k \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \xi^i}{\partial \dot{x}^s} \Gamma_0^{*s}{}_k + \Gamma_j^{*i}{}_k \xi^j \tag{3.13}$$

die fundamentalen kovarianten Ableitungen sind, doch folgt aus (3. 11), daß auch

$$\xi^i_{,k} \overset{\text{def}}{=} \xi^i_{;r} J_k^r \tag{3.14}$$

als eine fundamentale kovariante Ableitung des Raumes betrachtet werden kann.

Wir bemerken noch, daß wir bei der Herleitung der Formeln (3. 11)—(3. 13) die aus (3. 6), (3. 9a) und (3. 9b) folgenden Relationen

$$C_0^{*i}{}_r \equiv C_0{}^i{}_k J_r^k = \delta_r^i - J_r^i, \quad \Gamma_0^{*i}{}_k = \Gamma_0{}^s{}_k J_s^i$$

benützt haben.

Die kovarianten Ableitungen (3. 12) und (3. 14) vermindern den Homogeneitätsgrad der Tensoren in den $\dot{x}^i$ um eins, während (3. 13) den Homogeneitätsgrad unverändert läßt. Die partielle Ableitung $\partial_{\dot{x}^i}$ ist im Wesentlichen auch eine kovariante Ableitung, doch kommt sie in der Formel (3. 11) des invarianten Differentials nicht explizit vor.

Die Krümmungstensoren erhält man ebenso, wie in dem von O. Varga untersuchten Fall. Wenn d und δ vertauschbare Differentiationssymbole bedeuten, ferner D und Δ die zu ihnen gehörigen invarianten Differentiale bezeichnen, so ist:

$$(\Delta D - D\Delta)\xi^i = \{\tfrac{1}{2} R_j{}^i{}_{kl}[dx^k dx^l] + P_j{}^i{}_{kl}[dx^k \pi^l] + \tfrac{1}{2} S_j{}^i{}_{rt} J_k^r J_l^t [\pi^k \pi^l]\}\xi^j,$$

$$R_j{}^i{}_{kl} \equiv \hat{R}_j{}^i{}_{kl} + C_j{}^i{}_r \hat{R}_0{}^r{}_{kl},$$

$$\hat{R}_j{}^i{}_{kl} \equiv \partial_l \Gamma^{*i}_{j\ k} - (\partial_{\dot{s}} \Gamma^{*i}_{j\ k})\Gamma^{*s}_{0\ l} + \Gamma^{*s}_{j\ k}\Gamma^{*i}_{s\ l} - (k|l),$$

$$P_j{}^i{}_{kl} \equiv (\partial_{\dot{s}} \Gamma^{*i}_{j\ k}) J_l^s - C^{*i}_{j\ l}|_k + \dot{x}^t C_j{}^i{}_r (\partial_{\dot{s}} \Gamma^{*r}_{t\ k}) J_l^s - C^{*i}_{j\ t} I_r^t|_k J_l^r,$$

$$S_j{}^i{}_{rt} \equiv \partial_{\dot{t}} C_j{}^i{}_r + C_j{}^m{}_r C_m{}^i{}_t - (r|t),$$

wo das Symbol $(k|l)$ den vorigen Ausdruck, aber mit vertauschten Indexen bedeutet, ferner $\partial_{\dot{s}} = \dfrac{\partial}{\partial \dot{x}^s}$, $\partial_l = \dfrac{\partial}{\partial x^l}$ ist, und die eckigen Klammern in d, δ alternierenden Differentialformen bezeichnen.

Nun gehen wir zur Formulierung unseres letzten Problems über. Wir beweisen den

Satz 2. *Es existieren keine allgemeinen affinzusammenhängenden Linienelementräume, die in Bezug auf eine der Tensoren $P_j{}^i{}_{kl}$ und $S_j{}^i{}_{kl}$ und bezüglich der kovarianten Ableitung* (3. 12), *oder* (3. 14) *von rekurrenter Krümmung wären.*

Zuerst beweisen wir das folgende

Lemma 2. *Ist $H{:}{:}._i \neq 0$ ein Tensor, für den $H{:}{:}._0 = 0$ besteht, ferner ist $H{:}{:}._i(x, \dot{x})$ in den $\dot{x}^i$ homogen von $(-r)$-ter Dimension $(r \geqq 1)$, so kann*

(3.15) $$H{:}{:}._{i;m_1 \dots m_s} = T_{m_1 \dots m_s} H{:}{:}._i, \qquad s > 0,$$

wo „;m" eine der kovarianten Ableitungen (3. 12), (3. 14) *oder ∂_{x^m} bedeutet, nicht bestehen.*

Beweis. Eine Überschiebung von (3. 7) mit $\dot{x}^j$ gibt wegen (3. 2)

(3.16) $$J_0^k \equiv J_i^k \dot{x}^i = \dot{x}^k.$$

Somit wird wieder auf Grund von (3. 2), ferner in Hinsicht auf (3. 12) und (3. 14):

$$\xi^i_{;r}\dot{x}^r = (\partial_{\dot{x}^r}\xi^i)\dot{x}^r, \quad \xi^i_{,r}\dot{x}^r = (\partial_{\dot{x}^r}\xi^i)\dot{x}^r.$$

Wenn wir also das Bestehen von (3. 15) voraussetzen, und dann diese Gleichung mit $\dot{x}^{m_s}, \dots, \dot{x}^{m_2}$ überschieben und die Homogeneität von $H{:}{:}._i(x, \dot{x})$ in den $\dot{x}^i$ beachten, so erhalten wir eine Formel von der Form:

$$H{:}{:}._{i;m} = K_m H{:}{:}._i,$$

wo K_m —abgesehen von einem konstanten Faktor— aus $T_{m_1 \dots m_s}$ durch Überschiebungen entstanden ist. Überschieben wir jetzt die letzte Formel mit $\dot{x}^i$, so wird nach der Annahme über $H{:}{:}._0$:

(3.17) $$-H{:}{:}._i \dot{x}^i{}_{;m} = 0.$$

Nun ist nach (3. 12), (3. 14) und (3. 6)

$$\dot{x}^i{}_{;m} = \delta^i_m + C_0{}^i{}_m, \quad \dot{x}^i{}_{,m} = \partial_{\dot{x}^m}\dot{x}^i = \delta^i_m .$$

Somit wird aus (3. 17)

$$H{:}{:}{\cdot}_i(\delta^i_m + C_0{}^i{}_m) = 0 \tag{3.18}$$

bzw. $H{:}{:}{\cdot}_i = 0$. Wenn also „$:m$" die kovariante Ableitung (3. 14) bedeutet, so haben wir schon aus (3. 15) einen Widerspruch erhalten. Aus (3. 18) folgt aber nach Überschiebung mit J^m_k auf Grund von (3. 6) auch $H{:}{:}{\cdot}_k = 0$, womit das Lemma 2 bewiesen ist.

Beweis *des Satzes 2.* Der Tensor $P_j{}^i{}_{kl}$ bzw. $S_j{}^i{}_{kl}$ ist in den $\dot{x}^i$ homogen von (-1)-ter bzw. (-2)-ter Dimension. Wegen (3. 2), (3. 10) und $\dot{x}^i|_k = 0$ wird im Hinblick auf (3. 16):

$$P_j{}^i{}_{k0} = 0, \quad S_j{}^i{}_{k0} = 0,$$

da die $C_j{}^i{}_r(x, \dot{x})$ in den $\dot{x}^i$ homogen von (-1)-ter Dimension sind. Somit sind die Bedingungen des Lemmas 2 für die Krümmungstensoren $P_j{}^i{}_{kl}$ und $S_j{}^i{}_{kl}$ erfüllt, und die Behauptung des Lemmas 2 ergibt für die genannten Krümmungstensoren eben den Satz 2.

Wir wollen noch darauf hinweisen, daß der Satz 2 auch bezüglich des Krümmungstensors

$$S^{*}_j{}^i{}_{kl} \equiv S_j{}^i{}_{rt} J^r_k J^t_l$$

gilt, da nach (3. 16) $S^{*}_j{}^i{}_{k0} = 0$ ist. Der Tensor $S^{*}_j{}^i{}_{kl}$ kommt eben in der Formel von $(\Delta D - D\Delta)\xi^i$ vor.

Ähnlich den Beweisen der Sätze 1 und 2 kann auch das folgende Korollarium gezeigt werden:

Korollarium. Es existieren keine Finslersche bzw. affinzusammenhängende Linienelementräume, für deren Krümmungstensoren $P_j{}^i{}_{kl}$ und $S_j{}^i{}_{kl}$ bzw. $S^{*}_j{}^i{}_{kl}$ bezüglich der kovarianten Ableitungen (1. 1) bzw. (3. 12) und (3. 14) eine Relation von der Form

$$P_j{}^i{}_{kl:m_1\dots m_s} = T_j{}^i{}_k{}^s{}_r{}^t{}_{m_1\dots m_s} P_s{}^r{}_{tl} \tag{3.19}$$

$$S_j{}^i{}_{kl:m_1\dots m_s} = T_j{}^i{}_k{}^s{}_r{}^t{}_{1\dots m_s} S_s{}^r{}_{tl} \tag{3.19a}$$

gültig wäre, wo „$:m$" eine der genannten kovarianten Ableitungen bezeichnet. (Selbstverständlich sollen $P_j{}^i{}_{kl} \neq 0$, $S_j{}^i{}_{kl} \neq 0$ bestehen.)

Die Formeln (3. 19) und (3. 19a) sind Verallgemeinerungen der Räume von s-fach rekurrenter Krümmung, d.h. sie verallgemeinern die Relationen (2. 2) bzw. (3. 15) für die Krümmungstensoren $P_j{}^i{}_{kl}$ und $S_j{}^i{}_{kl}$. Wenn

$$T_j{}^i{}_k{}^s{}_r{}^t{}_{m_1\dots m_s} = \delta^s_j \delta^i_r \delta^t_k T_{m_1\dots m_s}$$

besteht, so bekommen wir eben die Räume von s-fach rekurrenter Krümmung, die also durch eine Formel von der Form (3. 15) charakterisiert sind.

Zum Schluß wollen wir darauf hinweisen, daß zwar der Finslerraum als ein Spezialfall der L_n-Räume betrachtet werden kann, doch ist der Finslersche Fall, den wir im § 2 untersucht haben, nicht eine unmittelbare Folgerung des affinen Falles. Das folgt daraus, daß im Finslerraum alle Größen — unter der Ausnahme der Grundfunktion $F(x, \dot{x})$ — in den $\dot{x}^i$ homogen von nullter Dimension sind, und die Operation (1. 1), die der Operation (3. 12) entspricht, den Homogeneitätsgrad nicht verändert. Eben wegen der Homogeneität in den $\dot{x}^i$ sind die Beweise der Sätze 1 und 2 voneinander etwas verschieden.

Schriftenverzeichnis

[1] E. Cartan, Les espaces de Finsler. *Actualités scientifiques et industrielles,* **79,** (*Paris,* 1937).
[2] O. Varga, Über affinzusammenhängende Mannigfaltigkeiten von Linienelementen insbesondere deren Äquivalenz. *Publ. Math. (Debrecen),* **1,** (1949), 7—17.

(Eingegangen am 29. März 1971.)