Richtungsbegriff in metrischen Räumen

Herrn Prof. Julius Strommer anlässlich seines 50. Geburtstages gewidmet

Von SÁNDOR SOÓS (Budapest)

Einleitung

Die Richtungsbegriffe in den metrischen Räumen stammen von A. D. ALEXANDROW [3] und von S. GOŁĄB [1], die unabhängig voneinander zwei verschiedene Äquivalenzrelationen auf der Menge der von einem Punkt ausgehenden stetigen Kurven eingeführt haben. Wir haben in dieser Arbeit den Zusammenhang zwischen den Richtungsbegriffen von Alexandrow und Gołąb bestimmt.

Die von Gołąb eingeführte Berührungsrelation ist im allgemeinen nicht symmetrisch [2]. In der Arbeit wurde eine allgemeine Klasse der stetigen Kurven bestimmt, in der diese Relation umkehrbar ist.

Die Verallgemeinerung der Berührungs- und Richtungsbegriffe war ein Ziel dieser Arbeit. Durch die Verallgemeinerung der Berührungsrelation von Gołąb haben wir den Richtungsbegriff in einem solchen metrischen Raum erklärt, in dem keine stetigen Kurven existieren. Die von uns erklärten *tropogenen* und *total tropogenen* Mengen sind die Verallgemeinerungen der Kurven, die eine Richtung im Sinne von Alexandrow haben (1. 2.).

Wir haben den Begriff des *Richtungsspektrums* eingeführt (1. 3.). Mit Hilfe des Richtungsspektrums können wir die Mengen nach den Richtungen charakterisieren. Den Vergleich der Richtungsbegriffe von Alexandrow und Gołąb haben wir mit Hilfe der Richtungsspektren durchgeführt.

§ 1. Der Begriff der Richtung und der Berührung in metrischen Räumen

1. 1. Berührung von Mengen

Es sei ein metrischer Raum (M, ϱ) und ein Punkt $p \in (M, \varrho)$ mit der folgenden Bedingung gegeben: Existiere eine nichtleere Menge $L \subset (M, \varrho)$ so, daß p ein Häufungspunkt von L ist. Betrachten wir das System $\mathscr{L}(M, p)$ aller Mengen, deren Häufungspunkt p ist.

Es sei $L_1, L_2 \in \mathscr{L}(M, p)$. Wir sagen: Die Menge L_1 *berührt* die Menge L_2 in dem Punkt p, falls es zu jedem $p \neq x \in L_1$ einen Punkt $y_x \in L_2$ gibt, so daß

$$\lim_{x \to p} \frac{\varrho(x, y_x)}{\varrho(p, x)} = 0$$

ist. Die derart erklärte Relation auf $\mathscr{L}(M,p)$ ist im allgemeinen unsymmetrisch, ist also keine Äquivalenz.

Berührt L_1 die Menge L_2 und auch L_2 die Menge L_1 in dem Punkt p, dann sagen wir: Die Mengen L_1 und L_2 *berühren sich* in dem Punkt p. Damit haben wir eine Relation auf $\mathscr{L}(M,p)$ eingeführt, die wir *Berührungsrelation* nennen und mit $B_p(L_1, L_2)$ bezeichnen. Diese Relation ist nach Definition reflexiv und symmetrisch. Die Transitivität kann man auf Grund der Definition leicht beweisen. Es gilt der folgende Satz:

Satz 1. *Die Berührungsrelation ist eine Äquivalenz auf* $\mathscr{L}(M,p)$.

Eine Äquivalenzklasse $\lambda(M,p)$ heißt eine *verallgemeinerte Richtung* in dem Punkt p. Die Menge aller verallgemeinerten Richtungen in p werden wir *verallgemeinerter Richtungsraum* $\mathfrak{L}(M,p)$ in dem Punkt p nennen.

Nach einfachen Rechnungen ergeben sich die folgenden Eigenschaften:

a) Die Menge $L_1 \in \mathscr{L}(M,p)$ berührt die Menge $L_2 \in \mathscr{L}(M,p)$ in dem Punkt p genau dann, wenn es eine Menge $L_2' \subseteqq L_2$ mit $B_p(L_1, L_2')$ gibt.

b) Es seien die Mengen $L_1, L_2 \in \mathscr{L}(M,p)$ und die Teilmengen $L_1' \subseteqq L_1$, $L_2' \subseteqq L_2$ so gegeben, daß die Relationen $B_p(L_1, L_2')$, $B_p(L_2, L_1')$ gelten. Dann gilt auch $B_p(L_1, L_2)$.

c) Wenn $L_1, L_2 \in \mathscr{L}(M,p)$ und $B_p(L_1, L_2)$ gilt, dann existiert zu jedem $L_1' \subseteqq L_1$, das die Relation $L_1' \in \mathscr{L}(M,p)$ erfüllt, ein $L_2' \subseteqq L_2$ derart, daß $B_p(L_1', L_2')$ besteht.

d) Für die Vereinigung der Mengen L_i $(i=1, 2, 3, \dots, n)$ aus einer verallgemeinerten Richtung $\lambda(M,p)$ gilt: $\cup L_i \in \lambda(M,p)$.

1. 2. Die tropogene Menge

Der Winkelbegriff in den metrischen Räumen wird auf folgende Weise definiert: Unter dem Winkel an der Ecke p des Dreiecks $\{p, x, y\} \subset (M, \varrho)$ $(p \neq x, y)$ versteht man den Wert $\gamma(p; x, y)$, für den

$$\cos\gamma(p; x, y) = \frac{\varrho(p,x)^2 + \varrho(p,y)^2 - \varrho(x,y)^2}{2\varrho(p,x)\varrho(p,y)}$$

und $0 \leqq \gamma(p; x, y) \leqq \pi$ gelten.

Es sei $G \in \mathscr{L}(M,p)$ in dem metrischen Raum (M, ϱ) gegeben, wo $\mathscr{L}(M,p)$ das in 1. 1. definierte System ist. Wir sagen: Die Menge G ist *tropogen*[1]) in dem Punkt p, wenn

$$\lim_{x,y\to p} \gamma(p; x, y) = 0$$

für alle $p \neq x, y \in G$ gilt.

Es sei $\mathscr{G}(M,p)$ das System aller in p tropogener Mengen. Wenn $G_1, G_2 \in \mathscr{G}(M,p)$ und auch $(G_1 \cup G_2) \in \mathscr{G}(M,p)$, dann sagen wir: Die Mengen G_1 und G_2 *haben die gleiche Richtung* in dem Punkt p, oder G_1 und G_2 sind *gleichgerichtete* Mengen in dem Punkt p.

Die so erklärte Relation nennen wir *Richtungsgleichheit* und bezeichnen *sie* mit $R_p(G_1, G_2)$.

---

[1]) Der Ausdruck *tropogen* stammt aus dem Griechischen: $\tau\varrho o\pi o\sigma$=Richtung, Wendung, Bogen, $\gamma\varepsilon\nu\nu\alpha\omega$=bilden, erzeugen, darstellen. „Tropogen" heißt also *richtungserzeugend.*

Aus der Definition folgt, daß die Richtungsgleichheit reflexiv und symmetrisch ist. Die Transitivität gilt aber im allgemeinen nicht. (Das zeigt das Beispiel 1.)

Wenn $H \in \mathcal{G}(M, p)$ und folgt aus $R_p(H, G)$ für alle G, daß G die Menge H in p berührt, so nennen wir die Menge H *total tropogen* in (M, ϱ).

Bezeichne $\mathcal{H}(M, p)$ das System der in (M, ϱ) total tropogenen Mengen von $\mathcal{G}(M, p)$. Wir werden beweisen, daß die Richtungsgleichheit eine Äquivalenz auf $\mathcal{H}(M, p)$ ist. Zum Beweis benötigen wir die folgenden Hilfssätze:

Satz 2. *Wenn $G_1, G_2 \in \mathcal{G}(M, p)$, und besteht die Relation $B_p(G_1, G_2)$, so folgt daraus stets, daß auch $R_p(G_1, G_2)$ besteht.*

Beweis. Zum Beweis des Satzes müssen wir zeigen, daß $\lim\limits_{x, y \to p} \gamma(p; x, y) = 0$ ist, falls $p \neq x, y \in (G_1 \cup G_2)$. Im Falle $x, y \in G_i$ $(i = 1, 2)$ gilt diese Relation offensichtlich, weil $G_1, G_2 \in \mathcal{G}(M, p)$.

Wir nehmen an $x \in G_1$ und $y \in G_2$. Aus den Voraussetzungen des Satzes folgen die Eigenschaften: Zu jedem x bzw. y existiert $y_x \in G_2$ bzw. $x_y \in G_1$ derart, daß die Relationen

$$\lim_{x \to p} \frac{\varrho(x, y_x)}{\varrho(p, x)} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{y \to p} \frac{\varrho(y, x_y)}{\varrho(p, y)} = 0 \tag{1}$$

gelten und

$$\lim_{x \to p} \cos \gamma(p; x, x_y) = 1 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{y \to p} \cos \gamma(p; y, y_x) = 1 \tag{2}$$

bestehen.

Aus (1) kann man leicht beweisen, daß auch die Beziehungen

$$\lim_{x \to p} \frac{\varrho(p, y_x)}{\varrho(p, x)} = 1 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{y \to p} \frac{\varrho(p, x_y)}{\varrho(p, y)} = 1 \tag{3}$$

gelten.

Betrachten wir die Punkte p, x, y, y_x. In dem Dreieck $\{p, x, y\}$ gilt:

$$\cos \gamma(p; x, y) = \frac{\varrho(p, x)^2 + \varrho(p, y)^2 - \varrho(x, y)^2}{2\varrho(p, x)\varrho(p, y)}.$$

Mit Hilfe der Dreiecksungleichung und der Beziehung

$$\varrho(y, y_x)^2 = \varrho(p, y)^2 + \varrho(p, y_x)^2 - 2\varrho(p, y)\varrho(p, y_x) \cos \gamma(p; y, y_x)$$

bekommen wir:

(4)
$$\cos \gamma(p; x, y) \geqq \frac{\varrho(p, y_x) \cos \gamma(p; y, y_x) - \varrho(x, y_x)}{\varrho(p, x)} - \frac{2\varrho(p, x)\varrho(x, y_x) + 2\varrho(x, y_x)^2}{\varrho(p, x)\varrho(p, y)}.$$

Betrachten wir jetzt die Punkte p, x, y, x_y, so ergibt sich:

(5)
$$\cos \gamma(p; x, y) \geqq \frac{\varrho(p, x_y) \cos \gamma(p; x, x_y) - \varrho(y, x_y)}{\varrho(p, y)} - \frac{2\varrho(p, y)\varrho(y, x_y) + 2\varrho(y, x_y)^2}{\varrho(p, y)\varrho(p, x)}.$$

Eine der Relationen $\varrho(p, x) \leqq \varrho(p, y)$ und $\varrho(p, y) \leqq \varrho(p, x)$ besteht immer. Es sei $\varrho(p, x) \leqq \varrho(p, y)$. So bleibt die Ungleichung (4) offenbar erhalten, wenn wir $\varrho(p, x)$ statt $\varrho(p, y)$ schreiben, d.h.:

$$1 \geqq \cos\gamma(p; x, y) \geqq \frac{\varrho(p, y_x)}{\varrho(p, x)} \cos\gamma(p; y, y_x) - \frac{3\varrho(x, y_x)}{\varrho(p, x)} - \frac{2\varrho(x, y_x)^2}{\varrho(p, x)^2}.$$

Aus (1), (2), (3) folgt:

$$\lim_{x, y \to p} \left(\frac{\varrho(p, y_x)}{\varrho(p, x)} \cos\gamma(p; y, y_x) - \frac{3\varrho(x, y_x)}{\varrho(p, x)} - \frac{2\varrho(x, y_x)^2}{\varrho(p, x)^2} \right) = 1.$$

So ist also

$$\lim_{x, y \to p} \gamma(p; x, y) = 0.$$

Gilt nun die Relation $\varrho(p, y) \leqq \varrho(p, x)$, so erhalten wir aus (5) auf der gleichen Weise

$$\lim_{x, y \to p} \gamma(p; x, y) = 0.$$

Aus den erhaltenen Resultaten folgt, daß $G_1 \cup G_2$ eine in p tropogene Menge ist. Damit ist aber der Satz bewiesen: Berühren sich die tropogenen Mengen in einem Punkt, so haben sie die gleiche Richtung in diesem Punkt.

Bemerkungen: 1. Die Bedingung des Satzes 2, daß beide der Mengen in p tropogen seien, ist notwendig. Aus $G \in \mathcal{G}(M, p)$ und $B_p(G, L)$ folgt nicht, daß auch $L \in \mathcal{G}(M, p)$. Es können sich sogar eine Menge, die keine in p tropogene Teilmenge enthält, und eine in p tropogene Menge in dem Punkt p berühren. (S: Beispiel 2.)

2. Der Satz 2 ist nicht umkehrbar (S: Satz 5). Aus $G_1, G_2 \in \mathcal{G}(M, p)$ und $R_p(G_1, G_2)$ folgt nicht, daß auch die Beziehung $B_p(G_1, G_2)$ besteht. (In dem Beispiel 1. gilt die Relation $R_p(A, B)$, doch berühren sich die Mengen A und B in dem Punkt p nicht.)

Sind $H_1, H_2 \in \mathcal{H}(M, p)$, so gilt der folgende Satz:

Satz 3. *Die Relation $R_p(H_1, H_2)$ besteht genau dann, wenn auch die Relation $B_p(H_1, H_2)$ gilt.*

Beweis. Auf Grund des Satzes 2 folgt die Richtungsgleichheit immer aus der Berührungsrelation.

Besteht die Relation $R_p(H_1, H_2)$, so berührt die Menge H_2 die Menge H_1 in p. Aus der Symmetrie der Richtungsgleichheit ergibt sich, daß auch die Menge H_2 in p berührt. So besteht also die Relation $B_p(H_1, H_2)$.

Die Richtungsgleichheit und die Berührungsrelation sind also äquivalent auf dem System $\mathcal{H}(M, p)$. Daher können wir sagen:

Satz 4. *Die Richtungsgleichheit ist eine Äquivalenz auf $\mathcal{H}(M, p)$.*

Eine Äquivalentklasse $\mathfrak{r}(M, p)$ heißt eine *Richtung* in dem Punkt p. Die Menge aller Richtungen in p werden wir

Richtungsraum $\mathfrak{R}(M, p)$ in dem Punkt p nennen.

Aus dem Satz 2 folgt der

Satz 5. *Sind $G_1, G_2 \in \mathscr{G}(M, p)$, so gilt die Relation $B_p(G_1, G_2)$ genau dann, wenn $R_p(G_1, G_2)$ besteht und zu jedem $x \in G_i$ $(i=1, 2)$ ein $y_x \in G_j$ $(i \neq j=1, 2)$ derart existiert, daß* $\lim\limits_{x \to p} \dfrac{\varrho(p, y_x)}{\varrho(p, x)} = 1$ *ist.*

Aus der Eigenschaft der tropogenen Mengen ergibt sich:

Satz 6. *Ist $G \in \mathscr{G}(M, p)$ eine zusammenhängende Menge, so ist G total tropogen in dem Punkt p.*

1. 3. Das Richtungsspektrum

Es sei der Punkt p in (M, ϱ) so gegeben, daß $\mathfrak{R}(M, p) \neq \theta$ ist. Dann ist das System $\mathscr{L}(M, p)$ auch nicht leer. Es sei die Menge $L \in \mathscr{L}(M, p)$ derart gegeben, daß L eine Teilmenge $H \in \mathscr{H}(M, p)$ enthält. Es ist bekannt, daß (L, ϱ) auch ein metrischer Raum ist. So können wir $\mathfrak{L}(L, p)$ und $\mathfrak{R}(L, p)$ in (L, ϱ) erklären.

Man kann leicht einsehen, daß aus $H \in \mathscr{H}(L, p)$ nicht die Beziehung $H \in \mathscr{H}(M, p)$ folgt. Es sei $\mathscr{H}(L, p; M)$ das System aller Teilmengen $H \subseteqq L$, für die $H \in \mathscr{H}(M, p)$ gelten.

Erklären wir die Richtungsgleichheit auf $\mathscr{H}(L, p; M)$, so bekommen wir eine Klasseneinteilung. Eine Klasse $\mathfrak{r}(L, p; M)$ heißt eine *Richtung in (M, ϱ) von der Menge L*. Die Menge aller Richtungen von L in (M, ϱ) werden wir mit $\mathfrak{R}(L, p; M)$ bezeichnen.

Seien $\lambda(L, p) \in \mathfrak{L}(L, p)$ und $L_1, L_2 \in \lambda(L, p)$, d.h. $B_p(L_1, L_2)$ gilt in (L, ϱ). Aus $(L, \varrho) \subseteqq (M, \varrho)$ folgt, daß $B_p(L_1, L_2)$ auch in (M, ϱ) gilt. Es gibt also immer ein $\lambda(M, p) \in \mathfrak{L}(M, p)$ derart, daß $L_1, L_2 \in \lambda(M, p)$ und folglich $\lambda(L, p) \subseteqq \lambda(M, p)$ ist. Zu $\lambda(L, p)$ werden wir die so gewählte verallgemeinerte Richtung $\lambda(M, p)$ zuordnen, und wir sagen: $\lambda(M, p)$ ist das „Bild" von $\lambda(L, p)$. Mann kan leicht einsehen, daß jede verallgemeinerte Richtung von $\mathfrak{L}(L, p)$ genau ein Bild in $\mathfrak{L}(M, p)$ hat: die Abbildung ist also eindeutig. Das Bild von $\mathfrak{L}(L, p)$ in $\mathfrak{L}(M, p)$ nennen wir das *verallgemeinerte Richtungsspektrum der Menge L in dem Punkt p* und bezeichnen es mit $\Psi(L, p)$.

Analog können wir die Abbildung von $\mathfrak{R}(L, p; M)$ in $\mathfrak{R}(M, p)$ erklären. So bekommen wir das *Richtungsspektrum von L in dem Punkt p*, das mit $\Phi(L, p)$ bezeichnet wird.

Nach einfachen Überlegungen ergeben sich die folgenden Eigenschaften:

a) Sind $L_1, L_2 \in \mathscr{L}(M, p)$, dann bestehen die Relationen

$$\Psi(L_1, p) \cup \Psi(L_2, p) \subseteqq \Psi[(L_1 \cup L_2), p]$$
$$\Phi(L_1, p) \cup \Phi(L_2, p) \subseteqq \Phi[(L_1 \cup L_2), p].$$

b) Sind $L_1, L_2 \in \mathscr{L}(M, p)$ und $L_1 \subseteqq L_2$, so gelten

$$\Psi(L_1, p) \subseteqq \Psi(L_2, p) \quad \text{und} \quad \Phi(L_1, p) \subseteqq \Phi(L_2, p).$$

c) Die Menge L_1 berührt die Menge L_2 in dem Punkt p dann und nur dann, wenn $\Psi(L_1, p) \subseteqq \Psi(L_2, p)$ gilt.

d) $B_p(L_1, L_2)$ besteht genau dann, falls $\Psi(L_1, p) = \Psi(L_2, p)$.

e) Sind $H_1, H_2 \in \mathscr{H}(M, p)$ und $B_p(H_1, H_2)$, dann besteht die Relation $\Phi(H_1, p) = \Phi(H_2, p)$.

f) Ist $H \in \mathscr{H}(M, p)$, so hat $\Phi(H, p)$ nur ein Element.

Bemerkung 1. Aus $B_p(L_1, L_2)$ folgt nicht die Relation $\Phi(L_1, p) = \Phi(L_2, p)$. Das geht auch aus dem Beispiel 2. hervor.

2. Seien für $L_i^* \in \mathscr{L}(M, p)$ $(i=1, 2)$ die folgenden Bedingungen erfüllt:

I. Jede Teilmenge $L \subseteqq L_i^*$, für die $L \in \mathscr{L}(M, p)$ gilt, enthält eine in p tropogene Teilmenge.

II. Für jede in p tropogene Teilmenge $G \subset L_i^*$ existiert eine in p bzw. in (M, ϱ) total tropogene Teilmenge $H \subset L_i^*$ so, daß $R_p(H, G)$ gilt.

In diesem Fall kann man den folgende Satz beweisen: Die Beziehung $\Phi(L_1^*, p) = \Phi(L_2^*, p)$ besteht genau dann, falls $\Psi(L_1^*, p) = \Psi(L_2^*, p)$ ist.

§ 2. Der Begriff der Richtung von Kurven

2. 1. Richtungsbegriffe von A. D. Alexandrow und von S. Gołąb

Sei $\mathfrak{K}_p$ die Menge aller von p ausgehender Kurven in dem Raum (M, ϱ), die eine Parameterdarstellung $f(t)$, $(0 \leqq t \leqq 1)$ folgender Art zulassen: Es sei $f(t) \neq f(0) = p$, falls $0 < t \leqq 1$ ist. Sind $f_1, f_2 \in \mathfrak{K}_p$, dann heißt der Wert

$$\bar{\gamma}(f_1, f_2) = \lim_{t_1, t_2 \to p} \sup \gamma\big(p; f_1(t_1), f_2(t_2)\big)$$

der *obere Winkel* zwischen f_1 und f_2 in p.

Ist für eine Kurve $f \in \mathfrak{K}_p$ $\bar{\gamma}(f, f) = 0$, so sagt man, daß f eine *Ausgangsrichtung in p im Sinne von Alexandrow* hat. Die Menge aller Kurven, die eine Ausgagsrichtung in p im Sinne von Alexandrow haben, werde mit $\bar{\mathfrak{K}}_p$ bezeichnet.

Gilt für die Kurven $f_1, f_2 \in \bar{\mathfrak{K}}_p$ die Beziehung $\bar{\gamma}(f_1, f_2) = 0$, dann sagt man: Die Kurven f_1, f_2 *berühren sich in dem Punkt p*, oder sie haben *in p die gleiche Richtung* im Sinne von Alexandrow. Diese Berührungsrelation ist eine Äquivalenz auf $\bar{\mathfrak{K}}_p$. Die Äquivalenzklassen heißen *Richtungen* in dem Punkt p im Sinne von Alexandrow. Die Menge dieser Richtungen nennt man den *Richtungsraum* in p im Sinne von Alexandrow [3].

Es sei nun $f_1, f_2 \in \mathfrak{K}_p$. Der „Fußpunkt" $f_2(t^*)$ von $f_1(t)$ ist der Punkt, für den $\varrho\big(f_1(t), f_2(t^*)\big) \leqq \varrho\big(f_1(t), f_2(t')\big)$ und $\varrho\big(f_1(t), f_2(t^*)\big) < \varrho\big(f_1(t), f_2(\bar{t})\big)$ gelten, falls $0 \leqq t' \leqq 1$ und $\bar{t} < t^*$ sind.

Besteht die Beziehung

$$\lim_{t \to 0} \frac{\varrho\big(f_1(t), f_2(t^*)\big)}{\varrho\big(p, f_1(t)\big)} = 0,$$

so sagt man: *die Kurve f_1 berührt die Kurve f_2 in p im Sinne von Gołąb.*

Berühren die Kurven f_1 bzw. f_2 die Kurven f_2 bzw. f_1 in dem Punkt p im Sinne von Gołąb, dann sagt man: *f_1 und f_2 berühren sich in p* im Sinne von Gołąb. Diese Berührungsrelation ist eine Äquivalenz auf $\mathfrak{K}_p$. Die Äquivalenzklassen heißen *verallgemeinerte Richtungen* im Sinne von Gołąb. Die Menge dieser Richtungen ist der *verallgemeinerte Richtungsraum* in dem Punkt p im Sinne von Gołąb [1].

2. 2. Der Zusammenhang des Richtungsspektrums und der Richtung von Alexandrow bzw. von Gołąb

Es sei $f \in \mathfrak{R}_p$, und betrachten wir die Menge $F=f([0, 1])$. Unter dem verallgemeinerten Richtungsspektrum $\Psi(f, p)$ von der Kurve f verstehen wir das verallgemeinerte Richtungsspektrum $\Psi(F, p)$. Daher ist $\Phi(f, p)=\Phi(F, p)$.

Aus den Definitionen der total tropogenen Menge und des Richtungsbegriffs von Alexandrow folgt mit Hilfe des Satzes 6:

Satz 7. *Die Kurve $f \in \mathfrak{R}_p$ hat eine Richtung im Sinne von Alexandrow in dem Punkt p genau dann, wenn die Menge $F=f([0, 1])$ im (M, ϱ) total tropogen in p ist.*

Auf Grund dieses Satzes gilt:

Satz 8. *Die Kurven $f_1, f_2 \in \bar{\mathfrak{R}}_p$ berühren sich in p im Sinne von Alexandrow dann und nur dann, wenn $\Phi(f_1, p)=\Phi(f_2, p)$ ist.*

Beweis. Berühren sich die Kurven f_1, f_2 in p im Sinne von Alexandrow, so ist

$$\lim_{t_1, t_2 \to 0} \gamma(p; f_1(t_1), f_2(t_2)) = 0. \tag{6}$$

Die Mengen $F_1=f_1([0, 1])$ und $F_2=f_2([0, 1])$ im (M, ϱ) sind in p total tropogen, und so folgt aus dieser Gleichung, daß $R_p(F_1, F_2)$ besteht. Im Satz 2. haben wir gesehen, daß in diesem Fall auch $B_p(F_1, F_2)$ gilt. Daher erhalten wir aus der Eigenschaft e) (in 1. 3.), daß $\Phi(f_1, p)=\Phi(f_2, p)$ ist.

Es sei jetzt $\Phi(f_1, p)=\Phi(f_2, p)$. Aus $f_1, f_2 \in \bar{\mathfrak{R}}_p$ folgt, daß $F_1=f_1([0, 1])$ und $F_2=f_2([0, 1])$ in (M, ϱ) total tropogen in p sind. Aus der Gleichung der Richtungsspektren ergibt sich $R_p(F_1, F_2)$, d.h. die Menge $\{F_1 \cup F_2\}$ ist in p tropogen. Daher gilt die Gleichung (6), was die Berührung im Sinne von Alexandrow bedeutet. Damit haben wir den Satz bewiesen.

Es sei $f \in \mathfrak{R}_p$, so ist $F=f([0, 1]) \in \mathscr{L}(M, p)$ und folglich $\Psi(F, p) \neq \theta$.

Satz 9. *Sind $f_1, f_2 \in \mathfrak{R}_p$, so berührt die Kurve f_1 die Kurve f_2 in p im Sinne von Gołąb dann und nur dann, wenn $\Psi(f_1, p) \subseteqq \Psi(f_2, p)$.*

Beweis. Berührt die Kurve f_1 die Kurve f_2 in p im Sinne von Gołąb, so gibt es nach Definition zu jedem $f_1(t)$ einen Punkt $f_2(t^*)$, für den

$$\lim_{t \to 0} \frac{\varrho(f_1(t), f_2(t^*))}{\varrho(p, f_1(t))} = 0 \tag{7}$$

ist. Betrachten wir die Mengen $F_1=f_1([0, 1])$, $F_2=f_2([0, 1])$ und die Punkte $x=f_1(t)$, $y_x=f_2(t^*)$. Dann hat die obige Gleichung die Form:

$$\lim_{x \to p} \frac{\varrho(x, y_x)}{\varrho(p, x)} = 0. \tag{8}$$

Also berührt die Menge F_1 die Menge F_2 in p, und aus der Eigenschaft c) (in 1. 3.) folgt, daß $\Psi(f_1, p) \subseteqq \Psi(f_2, p)$ ist.

Besteht die Beziehung $\Psi(f_1, p) \subseteqq \Psi(f_2, p)$, dann ist nach Definition $\Psi(F_1, p) \subseteqq \Psi(F_2, p)$, wo $F_1=f_1([0, 1])$ und $F_2=f_2([0, 1])$ sind. So berührt auf Grund der

Eigenschaft c) (in 1. 3.) die Menge F_1 die Menge F_2 in p, d.h. zu jedem $x \in F_1$ gibt es einen Punkt $y_x \in F_2$ derart, daß die Gleichung (8) besteht. Es seien $x = f_1(t)$ und $y_x = f_2(t')$, dann heißt die Gleichung (8):

$$\lim_{t \to 0} \frac{\varrho(f_1(t), f_2(t'))}{\varrho(p, f_1(t))} = 0.$$

Es sei $f_2(t^*)$ der Fußpunkt von $f_1(t)$. Aus $\varrho(f_1(t), f_2(t^*)) \leqq \varrho(f_1(t), f_2(t'))$ folgt, daß auch die Gleichung (7) gilt. Die Kurve f_1 berührt also die Kurve f_2 in dem Punkt p im Sinne von Gołąb.

Aus diesem Satz folgt unmittelbar der

Satz 10. *Die Kurven $f_1, f_2 \in \mathfrak{K}_p$ berühren sich in dem Punkt p im Sinne von Gołąb genau dann, wenn $\Psi(f_1, p) = \Psi(f_2, p)$ ist.*

2. 3. Der Zusammenhang zwischen den Richtungsbegriffen von Alexandrow bzw. von Gołąb

Satz 11. *Berühren sich die Kurven $f_1, f_2 \in \mathfrak{K}_p$ in p im Sinne von Alexandrow, so berühren sie sich in p auch im Sinne von Gołąb.*

Beweis. Ist die Bedingung des Satzes erfüllt, so sind $F_1 = f_1([0, 1])$ und $F_2 = f_2([0, 1])$ im (M, ϱ) total tropogene Mengen in dem Punkt p. Im Satz 8. haben wir gesehen, daß aus der Berührung von f_1, f_2 im Sinne von Alexandrow die Relation $R_p(F_1, F_2)$ folgt. In diesem Falle besteht auch $B_p(F_1, F_2)$ (Satz 3.). Auf Grund der Eigenschaft d) (in 1. 3.) gilt die Gleichung $\Psi(f_1, p) = \Psi(f_2, p)$, und aus dem Satz 10. folgt, daß die Kurven f_1, f_2 sich in p im Sinne von Gołąb berühren.

Bemerkung. Der Satz 11. ist nicht umkehrbar. Aus der Berührung im Sinne von Gołąb folgt nicht, daß die Kurven sich auch im Sinne von Alexandrow berühren. (S: Beispiele 3., 4.)

Satz 12. *Es seien $f_1, f_2 \in \bar{\mathfrak{K}}_p$, und berühren sie sich in dem Punkt p im Sinne von Gołąb, so berühren sich f_1, f_2 in p auch auch im Sinne von Alexandrow.*

Beweis. Aus der Berührung im Sinne von Gołąb folgt, daß $\Psi(f_1, p) = \Psi(f_2, p)$ ist. Wegen der Eigenschaft d) (in 1. 3.) gilt die Beziehung $B_p(F_1, F_2)$, wo $F_1 = f_1([0, 1])$ und $F_2 = f_2([0, 1])$ sind. F_1 und F_2 sind in dem Raum (M, ϱ) total tropogene Mengen in p, so folgt die Gleichung $\Phi(F_1, p) = \Phi(F_2, p)$ aus der Eigenschaft e) (in 1. 3.). Nach dem Satz 8. berühren sich die Kurven f_1, f_2 in p auch im Sinne von Alexandrow.

Aus den Sätzen 11. und 12. folgt offenbar:

Satz 13. *Auf der Menge der Kurven, die in einem Punkt eine Richtung im Sinne von Alexandrow haben, sind die Berührungsrelationen von Alexandrow und von Gołąb äquivalent miteinander.*

Auf Grund dieser Sätze können wir sagen:

Die Berührungsrelation von Gołąb ist auf eine derartige allgemeinere Klasse von Kurven erklärt, welche die Kurven enthält, die eine Richtung im Sinne von Alexandrow haben. (Beispiel 4.)

Berühren sich die Kurven f_1, f_2 in p im Sinne von Gołąb und habe die Kurve f_1 in p eine Richtung im Sinne von Alexandrow, so verlangt die Berührungsrelation nicht, daß die Kurve f_2 auch eine Richtung in p im Sinne von Alexandrow habe. (Beispiel 3.)

Die von Gołąb eingeführte Berührungsrelation ist im allgemeinen nicht symmetrisch [2]. Auf Grund des Satzes 10. gilt der folgende Satz:

Satz 14. *Es seien $f_1, f_2 \in \mathfrak{R}_p$, und berühre die Kurve f_1 die Kurve f_2 in p im Sinne von Gołąb. Die Berührungsrelation ist dann und nur dann symmetrisch, wenn*

$$\Psi(f_1, p) = \Psi(f_2, p)$$

ist.

Eine Folgerung dieses Satzes ist: Die Berührungsrelation im Sinne von Gołąb ist auf der Menge der Kurven, die eine Richtung im Sinne von Alexandrow haben, immer symmetrisch.

§ 3. Beispiele zur Berührung von Mengen und Kurven

Beispiel 1. Die Richtungsgleichheit ist keine Äquivalenz auf dem System der in einem Punkt tropogenen Mengen.

Betrachten wir in E^2 die Punkte:

$$a_i : \left(\frac{1}{2^{2i+1}}; \frac{1}{2^{2(2i+1)}}\right), \quad b_j : \left(\frac{1}{2^{2j}}; 0\right), \quad c_k : \left(\frac{1}{2^{2k+1}}; -\frac{1}{2^{2(2k+1)}}\right)$$

und $p:(0; 0)$, falls $i, j, k = 0, 1, 2, \ldots$ sind. Es seien $A = \{a_i\}_{i=0,1,\ldots}$, $B = \{b_j\}_{j=0,1,\ldots}$, $C = \{c_k\}_{k=0,1,\ldots}$ und $M = A \cup B \cup C \cup \{p\}$.

Auf der Menge M werden wir eine Metrik ϱ erklären: Im Falle $a_n, c_n \in M$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ ist $\varrho(a_n, c_n) = \frac{1}{2^{2n+1}}$, wenn es aber nicht der Fall ist, ist $\varrho(x, y) = xy$ $(x, y \in M)$, wo xy der Abstand der Punkte x, y in E^2 bedeutet.

Man kann leicht einsehen, daß (M, ϱ) ein metrischer Raum ist. Nach einfacher Rechnung ergibt sich auch, daß die Mengen A, B, C, $\{A \cup B\}$, $\{B \cup C\}$ tropogene Mengen in dem Punkt p sind. So gelten die Beziehungen $R_p(A, B)$, $R_p(B, C)$, nicht aber die Relation $R_p(A, C)$. Es ist nämlich $\lim_{n\to\infty} \gamma(p; a_n, c_n) = \frac{\pi}{3}$, und daher ist $\{A \cup C\}$ nicht eine in p tropogene Menge. Die Transitivität gilt also nicht, und so ist die Richtungsgleichheit keine Äquivalenz auf dem System der in einem Punkt tropogenen Mengen.

Beispiel 2. Ist A eine in p tropogene Menge, so folgt aus $B_p(A, B)$ im allgemeinen nicht, daß B auch eine in p tropogene Menge ist.

Betrachten wir die Strecken pa_0 und pb_0 in E^2 mit den folgenden Bedingungen: Es seien $pa_0 = 1$, $pb_0 = \frac{1}{2}$ und $a_0 p b_0 \sphericalangle = \pi/4$. Bezeichnen A bzw. B die Menge der Punkte der Strecken pa_0 bzw. pb_0. Ist $b \in B$ vorgegeben, so können wir die folgenden Bezeichnungen einführen: Sei $b^* \in A$ der Punkt, für den $pb^* = pb$ gilt, $b^2 \in A$ der Punkt, für den $pb^2 = (pb)^2$ ist und $b^1 \in A$ der Punkt, für den $pb^1 = pb^2 + b^2 b$ gilt.

Auf der Menge $M = \{A \cup B\}$ erklären wir eine Metrik ϱ in folgendermaßen:
a) Sind $a_1, a_2, \in A$, so ist $\varrho(a_1, a_2) = a_1 a_2$.
b) Es seien $a \in A$ und $b \in B$, dann ist

$$\varrho(a, b) = \begin{cases} ab & \text{falls} \quad pa \leqq pb^2 \ \text{ist}, \\ ab^1 & \text{falls} \ pb^2 < pa \leqq pb^* \ \text{ist}, \\ b^* b^1 & \text{falls} \ pb^* < pa \leqq pb^1 \ \text{ist}, \\ b^* a & \text{falls} \ pb^1 < pa \quad \text{ist}. \end{cases}$$

c) Im Falle $b_1, b_2 \in B$ besteht die eine der Relationen $pb_1 \leqq pb_2$ und $pb_2 \leqq pb_1$. Es bestehe $pb_2 \leqq pb_1$, dann ist

$$\varrho(b_1, b_2) = \begin{cases} b_1^1 b_2^1 & \text{falls} \ pb_1^2 \leqq pb_2^1 \ \text{ist}, \\ b_1 b_2^1 & \text{falls} \ pb_2^1 < pb_1^2 \ \text{ist}. \end{cases}$$

Es kann gezeigt werden, daß (M, ϱ) ein metrischer Raum ist.

Wir werden beweisen, daß die Mengen A und B sich in dem Punkt p berühren. Es sei nämlich dem Punkt $a \in A$ der Punkt $b_a \in B$ zugeordnet, für den $pb_a = pa$ gilt. Dann sind nach Definition $\varrho(a, b_a) = ab_a^1$ und $\varrho(p, a) = pa$. Nach einfacher Rechnung ergibt sich:

$$\lim_{a \to p} \frac{\varrho(a, b_a)}{\varrho(p, a)} = 0;$$

d.h. die Menge A berührt die Menge B in p.

Ist dem Punkt $b \in B$ der Punkt $b^* \in A$ zugeordnet, so sind $\varrho(b^*, b) = b^* b^1$ und $\varrho(p, b) = pb$. Man kann leicht einsehen, daß

$$\lim_{b \to p} \frac{\varrho(b, b^*)}{\varrho(p, b)} = 0$$

ist.

Die Mengen A und B berühren sich also im Punkt p.

Es ist offenbar, daß die Relation $\gamma(p; a_1, a_2) = 0$ $(p \neq a_1, a_2 \in A)$ immer besteht. Daraus folgt unmittelbar, daß A eine in p tropogene Menge ist.

Betrachten wir jetzt die Menge B, in der ein Punkt b vorgegeben ist. Wählt man den Punkt $b_1 \in B$ mit der Eigenschaft $pb_1^1 \leqq pb^2$, so läßt sich leicht zeigen, daß

$$\cos \gamma(p; b, b_1) < \frac{5\sqrt{2}}{8}$$

gilt. Es sei nun der Punkt $p \neq b_1$ so gewählt, daß $\varrho(p, b_1) < \varepsilon < \frac{(pb)^2}{2}$ ist. (Dann gilt auch $pb_1^1 < pb^2$, was uns notwendig ist.) Daher können wir sagen: Zu jedem $b \in B$ existiert ein $\varepsilon > 0$, so daß aus $b_1 \in (U(p, \varepsilon) \cap B)$ $(b_1 \neq p)$ stets $\gamma(p; b, b_1) > \alpha > 0$ folgt.

Die Menge B ist also nicht eine in p tropogene Menge. Aus dem Beispiel geht auch hervor, daß B keine in p tropogene Teilmenge enthält. Aus der Berührung der Mengen folgt also nicht, daß jede der Mengen in dem Berührungspunkt tropogen wäre.

Beispiel 3. Die Berührung der Kurven im Sinne von Gołąb verlangt nicht, daß die Kurven gleichzeitig eine oder keine Richtung in dem Berührungspunkt im Sinne von Alexandrow haben.

Betrachten wir den im Beispiel 2. eingeführten metrischen Raum (M, ϱ). Es sei $f_1:[0, 1]\to A$ eine Abbildung in (M, ϱ) mit der Bedingung $\varrho(p, f_1(t))=t$, wo $0\leqq t\leqq 1$ und $f_1(t)\in A$ gelten. Es sei ferner $f_2:[0, \frac{1}{2}]\to B$ solch eine Abbildung in (M, ϱ), daß $\varrho(p, f_2(t))=t$ ist, falls $0\leqq t\leqq \frac{1}{2}$ und $f_2(t)\in B$ erfüllt sind. Man kann leicht beweisen, daß $f_1, f_2\in \mathfrak{K}_p$ (S.: 2. 1.).

Im Beispiel 2. haben wir gesehen, daß die Mengen A und B sich in p berühren. In diesem Fall gilt also die Gleichung $\Psi(A, p)=\Psi(B, p)$, d.h. $\Psi(f_1, p)=\Psi(f_2, p)$. Nach Satz 10. berühren sich f_1 und f_2 in p im Sinne von Gołąb.

Es wurde auch gezeigt, daß A eine in p tropogene Menge ist, folglich hat die Kurve f_1 eine Richtung im Sinne von Alexandrow in p. Die Kurve f_2 hat aber keine Richtung im Sinne von Alexandrow in p, weil die Menge B nicht eine in p tropogene Menge ist.

Beispiel 4. Kurven, die in einem Punkt keine Richtung im Sinne von Alexandrow haben, können sich in diesem Punkt im Sinne von Gołąb berühren.

Seien die Abbildungen $f_1, f_2:[0, 1]\to l^2$ so gegeben, daß der Punkt $f_1(t)$ die folgenden Koordinaten besitzt:

$$x_i = 0, \quad x_n = t(n+1)-1, \quad x_{n+1} = 1-tn,$$

und die Koordinaten des Punktes $f_2(t)$

$$x_i = 0, \quad x_n = tn-\frac{n}{n+1}, \quad x_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}(1-tn)$$

sind, wo $i = 1, 2, 3, \ldots, n-1, n+2, \ldots$ und $\frac{1}{n+1} < t \leqq \frac{1}{n}$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ ist. Es sei ferner $f_1(0)=f_2(0)=(0, 0, 0, \ldots)=p$.

Nach einfacher Rechnung ergibt sich, daß die Kurven f_1 und f_2 sich in p im Sinne von Gołąb berühren.

Die Punkte der Kurven f_1, f_2 sind offenbar in den Ebenen (x_i, x_{i+1}) enthalten. Betrachten wir nun die Kurve f_1, so ist klar, daß $\gamma(p; f_1(t), f_1(t'))=\pi/2$ gilt, wenn $f_1(t)\in(x_i, x_{i+1})$, $f_1(t')\in(x_j, x_{j+1})$ und $|i-j|\geqq 2$ vorausgesetzt ist. Das Gleiche gilt auch für die Kurve f_2. Die Kurven f_1, f_2 haben also keine Richtung in p im Sinne von Alexandrow. (Die Mengen $F_1=f_1([0, 1])$ und $F_2=f_2([0, 1])$ haben sogar keine in p tropogene Teilmenge.)

Literatur

[1] S. Gołąb, Über den Begriff der Richtung in allgemeinen metrischen Räumen, *S.-B. Math.-Nat. Kl. Bayer. Akad. Wiss.* 1963 (1964), 27—34.

[2] S. Gołąb—Z. Moszner, Sur le contact des courbes dans les espaces métriques généraux, *Colloq. Math.* **10**, (1963), 305—311.

[3] W. Rinow, Die innere Geometrie der metrischen Räumen, *Berlin—Göttingen—Heidelberg*, (1961), 289—296.

(Eingegangen am 5. März 1970.)