Über eine Klasse von Mittelwerten

Von ZOLTÁN DARÓCZY (Debrecen)

1. *Definition. Existenzsatz.* Es sei I ein offenes Intervall und R die Menge der reellen Zahlen. Die Funktion $K: I \times I \to R$ wird eine *Abweichung* genannt, falls sie die folgenden Eigenschaften hat:

(a) $K(x, y)$ ist in y *stetig* und *streng monoton abnehmend;*

(b) $K(y, y) = 0$ für alle $y \in I$.

Sind x und y aus I, so nennen wir die Größe $K(x, y)$ die K-Abweichung der Zahl y von x. Die Menge aller Abweichungen wird mit $\mathcal{K}$ bezeichnet.

Definition. Es sei $K \in \mathcal{K}$ und $\underline{x} \in I^n$, wobei

$$I^n = \{\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in I, \; i = 1, 2, \dots, n\}$$

die Menge aller n-tupel der Zahlen aus I ist. Die Größe $\mathfrak{M}_K = \mathfrak{M}_K(\underline{x})$ wird der *K-Mittelwert* von $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ genannt, falls die der Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} K(x_i, \mathfrak{M}_K) = 0 \tag{1.1}$$

genügt.

Mit anderen Worten, der K-Mittelwert $\mathfrak{M}_K$ von $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ist eine solche Größe, welche die folgende Eigenschaft hat: Die Summe von K-Abweichungen der Größe $\mathfrak{M}_K$ von x_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ gibt Null. Es gilt der

Satz 1. *Es sei $K \in \mathcal{K}$. Dann existiert ein und nur ein K-Mittelwert $\mathfrak{M}_K: I^n \to I$, und es gilt*

$$\operatorname{Min}(\underline{x}) \leqq \mathfrak{M}_K(\underline{x}) \leqq \operatorname{Max}(\underline{x}) \tag{1.2}$$

für alle $\underline{x} \in I^n$ $(n = 2, 3, \dots)$.

Beweis. Es sei $\underline{x} \in I^n$ und

$$k(t) = \sum_{i=1}^{n} K(x_i, t) \qquad (t \in I).$$

Nach (a) ist $k(t)$ eine *stetige* und *streng monoton abnehmende* Funktion in I. Wegen (a) und (b) gilt $\operatorname{sgn} K(x, y) = \operatorname{sgn}(x - y)$, daher ist

$$k(m) \geqq 0 \quad \text{und} \quad k(M) \leqq 0,$$

wobei $m=\mathrm{Min}\,(\underline{x})$ und $M=\mathrm{Max}\,(\underline{x})$ ist. Aus dieser Behauptung folgt, daß es ein und nur ein $t_0\in[m, M]$ existiert, für das $k(t_0)=0$ gilt. Aber $t_0=\mathfrak{M}_K(\underline{x})$ ist nach der Definition. Damit ist der Satz bewiesen.

Aus der Definition folgt, daß $\mathfrak{M}_K(\underline{x})$ stets eine *symmetrische* Funktion auf I^n ist.

2. *Quasiarithmetische Mittelwerte.* Die folgenden Beispielen zeigen, daß die Klasse von K-Mittelwerten ($K\in\mathscr{K}$) eine Verallgemeinerung bekannter Klassen von symmetrischen Mittelwerten ist. Dazu führen wir die folgenden Funktionenklassen ein:

$D=\{\varphi|\varphi:I\to R,\ \varphi$ stetig und streng monoton$\}$,

$Q=\{f|f:I\to R_+,\ R_+$ ist die Menge der positiven Zahlen$\}$.

Es sei jetzt $\varphi\in D, f\in Q$ und

$$K(x, y) = K_{\varphi f}(x, y) = f(x)\varepsilon_\varphi[\varphi(x)-\varphi(y)] \qquad (x, y\in I), \tag{2.1}$$

wobei

$$\varepsilon_\varphi = \begin{cases} 1 \text{ falls } \varphi \text{ wachsend} \\ -1 \text{ falls } \varphi \text{ abnehmend} \end{cases}$$

ist. Es ist leicht einzusehen, daß $K_{\varphi f}$ ein Element von $\mathscr{K}$ ist, und es ist der zur Abweichung $K_{\varphi f}$ gehörige Mittelwert von $\underline{x}\in I^n$ die Größe

$$\mathfrak{M}_{K_{\varphi f}}(\underline{x}) = M_{\varphi f}(\underline{x}) = \varphi^{-1}\left[\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)\varphi(x_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)}\right], \tag{2.2}$$

wobei φ^{-1} die zu φ inverse Funktion bedeutet. Der Mittelwert $M_{\varphi f}(\underline{x})$ ($\varphi\in D, f\in Q$) wird einen *quasiarithmetischen Mittelwert mit Gewichtsfunktion* genannt. Diese Klasse von Mittelwerten wurde von M. BAJRAKTAREVIČ [2] eingeführt und von J. ACZÉL—Z. DARÓCZY [1], Z. DARÓCZY [3], Z. DARÓCZY—L. LOSONCZI [4], L. LOSONCZI [6] [7], [8], [9] eingehend untersucht. Der klassische quasiarithmetische Mittelwert mit der Abbildungsfunktion $\varphi\in D$

$$M_\varphi(\underline{x}) = \varphi^{-1}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i)\right] \tag{2.3}$$

läßt sich in (2. 2) mit $f(t)=c$ ($c>0$ Konstant) einreihen. Die Theorie dieser Klasse von Mittelwerten kann man im Buch von G. H. HARDY—J. E. LITTLEWOOD—G. PÓLYA [5] finden.

3. *Ein weiteres Beispiel.* Wir geben jetzt ein Beispiel für ein K-Mittelwert an, der kein quasiarithmetischer Mittelwert ist. Es sei $I=R_+$ und

$$K(x, y) = x(x-y)+x^2-y^2 \qquad (x, y\in R_+). \tag{3.1}$$

Offenbar ist $K(x, y)$ eine Abweichung mit dem K-Mittelwert

$$\mathfrak{M}_K(\underline{x}) = \frac{1}{2}\left\{\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2+\frac{8}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right]^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right\}. \tag{3.2}$$

Man kann sehen, daß der Mittelwert (3. 2) aus den quasiarithmetischen Mittelwerten aufgebaut werden kann. Wir bemerken, daß auch solche K-Mittelwerte existieren, die in expliziter Form nicht dargestellt werden können. Ein Beispiel dafür ist der mit der Abweichung

$$K(x, y) = x(x-y)+\ln x - \ln y \qquad (x, y \in R_+) \tag{3.3}$$

erklärte K-Mittelwert.

4. *Vergleich zweier K-Mittelwerte*. Bei vielen Untersuchungen spielt das Vergleichsproblem zweier Mittelwerte eine Rolle (S. [5], [3], [4], [6]). Das Problem ist das folgende: Wir suchen notwendige und hinreichende Bedingungen für die Abweichungen K und H, damit die Ungleichung

$$\mathfrak{M}_K(\underline{x}) \leqq \mathfrak{M}_H(\underline{x}) \tag{4.1}$$

für alle $\underline{x} \in I^n$ $(n=2, 3, \ldots)$ erfüllt wird. Die Lösung dieses Problems ist für die Klasse der quasiarithmetischen Mittelwerte mit Gewichtsfunktionen bekannt. (S. [4]).

Lemma 1. *Es sei $K \in \mathscr{K}$ und $F: I^n \to I$ eine beliebige Funktion. Für beliebiges $\underline{x} \in I^n$ gilt die Ungleichung*

$$\mathfrak{M}_K(\underline{x}) \leqq F(\underline{x}) \tag{4.2}$$

dann und nur dann, falls die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{n} K[x_i, F(\underline{x})] \leqq 0 \tag{4.3}$$

gilt für alle $\underline{x} \in I^n$.

Beweis. (i) Gilt (4. 1), so erhalten wir wegen (a)

$$K[x_i, F(\underline{x})] \leqq K[x_i, \mathfrak{M}_K(\underline{x})] \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

woraus sich mit der Addition (4. 3) ergibt.

(ii) Wir setzen jetzt voraus, daß die Ungleichung (4. 3) für alle $\underline{x} \in I^n$ erfüllt ist und ein Element $\underline{x}^0 \in I^n$ mit der Eigenschaft

$$\mathfrak{M}_K(\underline{x}^0) > F(\underline{x}^0) \qquad \underline{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$$

existiert.

Dann gilt

$$K[x_i^0, \mathfrak{M}_K(\underline{x}^0)] < K[x_i^0, F(\underline{x}^0)] \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

woraus sich

$$0 < \sum_{i=1}^{n} K[x_i^0, F(x^0)]$$

ergibt. Dieser ist aber ein Wiederspruch, damit haben wir das Lemma bewiesen.

Lemma 2. *Es sei $K \in \mathscr{K}$ und*

$$\underline{x}^n = (x, y, y, \ldots, y) \in I^n \qquad (n=2, 3, \ldots), \tag{4.4}$$

wobei $x, y \in I$ beliebig ist. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{M}_K(\underline{x}^n) = y. \tag{4.5}$$

Beweis. Mit der Bezeichnung

$$y_n = \mathfrak{M}_K(\underline{x}^n)$$

erhalten wir nach der Definition

$$K(x, y_n) + (n-1)K(y, y_n) = 0 \qquad (n=2, 3, \ldots). \tag{4. 6}$$

In (4. 6) ist $K(x, y_n)$ beschränkt, daher gilt

$$\lim_{n\to\infty} K(y, y_n) = 0.$$

Wegen der Eigenschaft $K(y, y)=0$ und der Stetigkeit kommt die Behauptung $y_n \to y$. Wir bemerken, daß es im Falle $x \neq y$ stets $y_n \neq y$ gilt.

Auf Grund dieser Lemmata können wir das Vergleichsproblem von K-Mittelwerten für die Klasse von Abweichungen aus $\mathcal{K}^*$ lösen, wobei

$$\mathcal{K}^* = \left\{K \mid K \in \mathcal{K},\ K_2(x, y) = \frac{\partial K(x, y)}{\partial y} \text{ existiert und } \neq 0\right\}$$

eine Untermenge von $\mathcal{K}$ ist. *Ist* $K \in \mathcal{K}^*$, so gilt nach dem Darbouxschen Satz $K_2(x, y) < 0$ für alle $x, y \in I$. Für beliebiges $K \in \mathcal{K}^*$ führen wir die Bezeichnung

$$K^*(x, y) = \frac{K(x, y)}{-K_2(y, y)} \qquad (x, y \in I)$$

ein.

Satz 2. *Es sei $K, H \in \mathcal{K}^*$. Für beliebiges $\underline{x} \in I^n$ $(n=2, 3, \ldots)$ gilt die Ungleichung* (4. 1) ***dann und nur dann**, falls die Ungleichung*

$$K^*(x, y) \leqq H^*(x, y) \tag{4. 7}$$

für alle $x, y \in I$ besteht.

Beweis. (i) *Die Voraussetzung ist notwendig.* Gilt die Ungleichung (4. 1) für alle $\underline{x} \in I^n$ $(n=2, 3, \ldots)$, so erhalten wir nach dem Lemma 1 die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{n} K[x_i, \mathfrak{M}_H(\underline{x})] \leqq 0 \tag{4. 8}$$

für alle $\underline{x} \in I^n$ $(n=2, 3, \ldots)$. Wir setzen in (4. 8)

$$\underline{x} = \underline{x}^n = (x, y, y, \ldots, y) \in I^n,$$

wobei $x, y \in I$ $(x \neq y)$ beliebig wählbar ist. Mit der Bezeichnung $y_n = \mathfrak{M}_K(\underline{x}^n)$ gilt dann

$$K(x, y_n) + (n-1)K(y, y_n) \leqq 0. \qquad (n=2, 3, \ldots) \tag{4. 9}$$

Dabei ist $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ $(y_n \neq y)$ nach dem Lemma 2. Mit der Berücksichtigung der Gleichung

$$H(x, y_n) + (n-1)H(y, y_n) = 0 \qquad (n=2, 3, \ldots)$$

bekommen wir aus (4. 9)

(4. 10)

$$K(x, y_n) \leqq -(n-1)K(y, y_n) = -(n-1)H(y, y_n)\frac{K(y, y_n)}{H(y, y_n)} = H(x, y_n)\frac{K(y, y_n)}{H(y, y_n)}.$$

Wegen $K, H \in \mathcal{K}^*$ gilt

$$\lim_{n\to\infty}\frac{K(y, y_n)}{H(y, y_n)} = \frac{K_2(y, y)}{H_2(y, y)}.$$

Mit $n\to\infty$ erhalten wir aus (4. 10) die Ungleichung (4. 7) für alle $x, y \in I$ $(x \neq y)$. Im Falle $x=y$ ist (4. 7) trivial.

(ii) *Die Voraussetzung ist hinreichend.* Gilt die Ungleichung (4. 7) für alle $x, y \in I$, so setzen wir in (4. 7) $x=x_i$ $(i=1, 2, \dots, n)$ und $y=\mathfrak{M}_H(\underline{x})$, wobei $\underline{x}=(x_1, x_2, \dots, x_n)\in$ $\in I^n$ beliebig ist. Dann gilt

$$K^*[x_i, \mathfrak{M}_H(\underline{x})] \leqq H^*[x_i, \mathfrak{M}_H(\underline{x})] \qquad (i=1, 2, \dots, n).$$

Addieren wir jetzt diese Ungleichungen für $i=1, 2, \dots, n$, so gilt

$$-\frac{1}{K_2[\mathfrak{M}_H(\underline{x}), \mathfrak{M}_H(\underline{x})]}\sum_{i=1}^{n} K[x_i, \mathfrak{M}_H(\underline{x})] \leqq 0,$$

woraus sich

$$\sum_{i=1}^{n} K[x_i, \mathfrak{M}_H(\underline{x})] \leqq 0$$

ergibt. Nach dem Lemma 1 erhalten wir (4. 1) aus der obigen Ungleichung, damit haben wir den Satz restlos bewiesen.

Aus Satz 2 ergibt sich das folgende

Korollar (Z. Daróczy—L. Losonczi [4]). *Es seien $\varphi, \psi \in D^*$, $f, g \in Q$. Die Ungleichung*

(4. 11) $$M_{\varphi f}(\underline{x}) \leqq M_{\psi g}(\underline{x})$$

gilt für alle $\underline{x} \in I^n$ $(n=2, 3, \dots)$ dann und nur dann, falls die Ungleichung

(4. 12) $$\frac{f(x)[\varphi(x)-\varphi(y)]}{f(y)\varphi'(y)} \leqq \frac{g(x)[\psi(x)-\psi(y)]}{g(y)\psi'(y)}$$

für alle $x, y \in I$ besteht. Dabei ist

$$D^* = \{\varphi | \varphi: I \to R, \ \ \varphi \text{ differenzierbar}, \ \ \varphi'(x) \neq 0 \ \ (x \in I)\}.$$

Beweis. Die Ungleichung (4. 11) lautet:

$$\mathfrak{M}_K(\underline{x}) \leqq \mathfrak{M}_H(\underline{x}) \qquad (\underline{x} \in I^n, \ n=2, 3, \dots)$$

mit den Bezeichnungen

$$K(x, y) = f(x)\varepsilon_\varphi[\varphi(x)-\varphi(y)], \quad H(x, y) = g(x)\varepsilon_\psi[\psi(x)-\psi(y)].$$

Die Ungleichung (4. 12) folgt aus (4. 7) wegen der Beziehungen

$$K^*(x, y) = \frac{f(x)[\varphi(x)-\varphi(y)]}{f(y)\varphi'(y)} \quad \text{und} \quad H^*(x, y) = \frac{g(x)[\psi(x)-\psi(y)]}{g(y)\psi'(y)}.$$

5. *Gleichheit zweier K-Mittelwerte. Homogene K-Mittelwerte.* Das Gleichheitsproblem von K-Mittelwerten ist das folgende: Es seien K und H Abweichungen und wir betrachten die Gleichung

$$\mathfrak{M}_K(\underline{x}) = \mathfrak{M}_H(\underline{x}) \tag{5. 1}$$

für alle $\underline{x} \in I^n$ $(n=2, 3, \ldots)$. Wir suchen notwendige und hinreichende Bedingungen für die Abweichungen K und H, damit (5. 1) für alle $\underline{x} \in I^n$ $(n=2, 3, \ldots)$ erfüllt wird. Die Lösung dieses Problems ist für die Klasse der quasiarithmetischen Mittelwerte mit Gewichtsfunktionen bekannt (S. [1] und vgl. [9]). Aus Satz 2 ergibt sich der

Satz 3. *Es sei* $K, H \in \mathscr{K}^*$. *Dann besteht die Gleichheit* (5. 1) *für alle* $\underline{x} \in I^n$ $(n=2, 3, \ldots)$ *dann und nur dann, falls*

$$K^*(x, y) = H^*(x, y) \tag{5. 2}$$

für alle $x, y \in I$ *erfüllt ist.*

Mit der Anwendung des Satzes 3 kann man das Gleichheitsproblem für die Mittelwerte $M_{\varphi f}$ $(\varphi \in D^*, f \in Q)$ — wie in der Arbeit [9] — lösen (vgl. [1]).

Im folgenden sei $I=R_+$. Ein K-Mittelwert wird *homogen* genannt, wenn die Homogenitätsgleichung

$$\mathfrak{M}_K(t\underline{x}) = t\,\mathfrak{M}_K(\underline{x}) \tag{5. 3}$$

für alle $\underline{x} \in R_+^n$ $(n=2, 3, \ldots)$ $t \in R_+$ gilt, wobei $tx=(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n)$ ist. Die Bestimmung der homogenen Mittelwerte spielt in der Theorie der Mittelwerte eine grundlegende Rolle (S. [5], [1]).

Satz 4. *Es sei* $K \in \mathscr{K}^*$. *Ist* $\mathfrak{M}_K$ *ein homogener Mittelwert, so muß*

$$K^*(x, y) = yK^*\left(\frac{x}{y}, 1\right) \tag{5. 4}$$

für alle $x, y \in R_+$ *gelten. Andererseits, gilt* (5. 4) *für alle* $x, y \in R_+$ *mit* $K \in \mathscr{K}^*$, *so ist* $\mathfrak{M}_K$ *homogen.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{M}_K$ homogen $(K \in \mathscr{K}^*)$. Dann ist

$$K_t(x, y) = \frac{1}{t} K(tx, ty) \in \mathscr{K}^*$$

für alle $t \in R_+$, und wegen (5. 3) gilt

$$\mathfrak{M}_{K_t}(\underline{x}) = \mathfrak{M}_K(\underline{x})$$

für alle $\underline{x} \in R_+^n$ $(n=2, 3, \ldots)$. Daraus folgt nach dem Satz 3

$$K_t^*(x, y) = K^*(x, y)$$

d.h.

$$K^*(tx, ty) = tK^*(x, y).$$

Aus dieser Gleichung bekommen wir (5. 4) mit $t=1/y$. Gilt (5. 4) für eine $K\in\mathscr{K}^*$, so kann man leicht prüfen, daß $\mathfrak{M}_K$ homogen sein muß. Damit ist der Beweis beendet.

Auf Grund dieses Satzes kann man die homogenen quasiarithmetischen Mittelwerte mit Gewichtsfunktionen bestimmen. (S. [1], [9]). Wir bezeichnen mit $\mathscr{K}_h^*$ die Menge der Abweichungen aus $\mathscr{K}^*$, für die die K-Mittelwerte ($K\in\mathscr{K}_h^*$) homogen sind. Dann erhalten wir aus den Sätzen 2 und 4 das

Korollar. *Es sei $K, H\in\mathscr{K}_h^*$. Dann besteht die Ungleichung*

$$\mathfrak{M}_K(\underline{x}) \leqq \mathfrak{M}_H(\underline{x})$$

für alle $\underline{x}\in I^n$ $(n=2, 3, \dots)$ dann und nur dann, falls

$$K^*(t, 1) \leqq H^*(t, 1)$$

für alle $t\in R_+$ gilt.

Eine eingehende Untersuchung findet man in [4] über die homogenen quasiarithmetischen Mittelwerte, die mit Gewichtsfunktionen gebildet sind.

Literatur

[1] J. Aczél—Z. Daróczy, Über verallgemeinerte quasilineare Mittelwerte, die mit Gewichtsfunktionen gebildet sind. *Publ. Math. Debrecen,* **10**, (1963), 171—190.

[2] M. Bajraktarević, Sur une équation fonctionelle aux valeurs moyennes. *Glasnik Mat. Fiz. i Astr.,* **13**, (1958), 243—248.

[3] Z. Daróczy, Einige Ungleichungen über die mit Gewichtsfunktionen gebildeten Mittelwerte. *Monatshefte für Math.* **68**, (1964), 102—112.

[4] Z. Daróczy—L. Losonczi, Über den Vergleich von Mittelwerten. *Publ. Math. Debrecen,* **17**, (1970), 289—297.

[5] G. H. Hardy—J. E. Littlewood—G. Pólya, Inequalities, *Cambridge* 1952.

[6] L. Losonczi, Über den Vergleich von Mittelwerten, die mit Gewichtsfunktionen gebildet sind. *Publ. Math. Debrecen,* **17**, (1970), 203—208.

[7] L. Losonczi, Subhomogene Mittelwerte. *Acta Math. Hung.* **22**, (1971), 187—195.

[8] L. Losonczi, Subadditive Mittelwerte. *Archiv der Math.,* **22**, (1971), 168—174.

[9] L. Losonczi, Über eine neue Klasse von Mittelwerten. *Acta Sci. Math.,* **32**, (1971), 71—81.

(Eingegangen 13. März 1970.)