Über die allgemeinen Lösungen der Funktionalgleichung $F(x)+F(y)-F(xy)=H(x+y-xy)$

Von K. LAJKÓ (Debrecen)

1. *Einleitung*

In dieser Arbeit werden die folgenden Probleme behandelt.

A. Es bezeichne R die Menge der reellen Zahlen. Wir betrachten die Funktionen $F, H: R \to R$, die der Funktionalgleichung

$$F(x)+F(y)-F(xy) = H(x+y-xy) \tag{1}$$

für alle $x, y \in R$ genügen. Gesucht sind die allgemeinen Lösungen von (1).

B. Es sei $R_0 = R \setminus \{0\}$. Gesucht sind die Funktionen $F: R_0 \to R$ und $H: R \to R$, die der Funktionalgleichung (1) für alle $x, y \in R_0$ genügen.

Das Problem A ist eine Verallgemeinerung einer bekannten Funktionalgleichung von M. HOSSZÚ (siehe H. SWIATAK [6], [7] und Z. DARÓCZY [2], [3]). Das Problem B ist ein Spezialfall der Funktionalgleichung

$$f[r_0+(r_1x+r_2)(r_3y+r_4)]+g[s_0+(s_1x+s_2)(s_3y+s_4)] = h(x)+k(y), \tag{2}$$

die in der Arbeit [4] von I. FENYŐ behandelt wurde. In der Funktionalgleichung (2) sind r_i und s_i $(i=0, 1, 2, 3, 4)$ gegebene Konstanten mit $r_1 r_3 s_1 s_3 \neq 0$ und die unbekannten Funktionen f, g, h und k sind nicht für alle $x \in R$ definiert. In einer anderen Arbeit [5] haben wir gezeigt, daß die Gleichung (2) auf die Gleichung (1) (als das Problem A oder B) oder auf die Pexidersche Funktionalgleichung (siehe J. ACZÉL [1]) mit einer rein algebraischen Methode zurückgeführt werden kann. Aus dieser Behauptung können wir die allgemeinen Lösungen von (2) mit Hilfe der Lösungen (1) (als das Problem A oder B) erhalten.

In dieser Arbeit werden wir zeigen, daß die allgemeine Lösungen des Problems A oder B mit Hilfe der Lösungen der Cauchyschen Funktionalgleichung dargestellt werden können.

2. *Über das Problem A*

Wir benutzen das folgende Ergebnis von Z. DARÓCZY [3]:

Satz 1. *Es sei $F: R \to R$ eine Funktion, die der Funktionalgleichung*

$$F(x)+F(y)-F(xy) = F(x+y-xy) \tag{3}$$

für alle $x, y \in R$ genügt. Dann gilt die Darstellung

$$F(x) = F^*(x-1)+F(1) \tag{4}$$

für alle $x \in R$, *wobei* $F^*: R \to R$ *eine beliebige Lösung der Cauchyschen Funktionalgleichung*

$$F^*(x+y) = F^*(x)+F^*(y) \qquad (x, y \in R) \tag{5}$$

ist.

Dieser Satz enthält die früheren Ergebnisse über die Gleichung (3) (siehe H. Swiatak [6], [7] und Z. Daróczy [2]).

Wir können jetzt den folgenden Satz leicht beweisen.

Satz *Es seien* $F, H: R \to R$ *solche Funktionen, die der Funktionalgleichung* (1) *für alle* $x, y \in R$ *genügen. Dann gilt die Darstellung*

$$F(x) = H(x) = F^*(x-1)+F(1) \tag{6}$$

für alle $x \in R$ *wobei* $F^*: R \to R$ *eine beliebige Lösung der Funktionalgleichung* (5) *ist.*

Beweis. Wir setzen in (1) $y=0$, dann erhalten wir $H(x)=F(x)$ für alle $x \in R$. Aus dem Satz 1 erhalten wir (6).

3. *Über das Problem B*

Es bezeichne $\mathfrak{M}$ die Menge der Paaren (F, H), wobei $F: R_0 \to R$ und $H: R \to R$ solche Funktionen sind, welche der Gleichung (1) für alle $x, y \in R_0$ genügen.

Lemma 1. *Es sei* $(F, H) \in \mathfrak{M}$. *Dann genügt die Funktion*

$$H^*(x) = H(x+1)-H(1) \qquad (x \in R) \tag{7}$$

der Funktionalgleichung

$$H^*(u+v) = H^*(u)+H^*(v) \tag{8}$$

für alle $(u, v) \in \Delta$, *wobei das Bereich* Δ *durch*

$$\Delta = \left\{(u, v) \,\middle|\, \begin{matrix} u+v > 0, \\ v+1 \neq \dfrac{1}{u+1}, \end{matrix} \quad \text{oder} \quad \begin{matrix} u+v \leqq 4, \\ v+1 \neq \dfrac{1}{u+1}, \end{matrix} \quad \text{oder} \quad u=v=0 \right\} \tag{10}$$

definiert wird.

Beweis. Wir definieren die Funktion $\bar{F}: R_0 \times R_0 \to R$ durch die Gleichung

$$\bar{F}(x, y) = F(x)+F(y)-F(xy). \tag{11}$$

Man kann leicht sehen, daß $\bar{F}$ der Gleichung

$$\bar{F}(xy, z)+\bar{F}(x, y) = \bar{F}(x, yz)+\bar{F}(y, z) \tag{12}$$

für alle $x, y, z \in R_0$ genügt. Wegen (1) erhalten wir

$$\bar{F}(x, y) = H(x+y-xy). \tag{13}$$

Wir setzen (13) in (12) und $z=1/y$ $(y \neq 0)$ dann ergibt sich

$$H\left(xy+\frac{1}{y}-x\right)+H(x+y-xy) = H(1)+H\left(y+\frac{1}{y}-1\right), \tag{14}$$

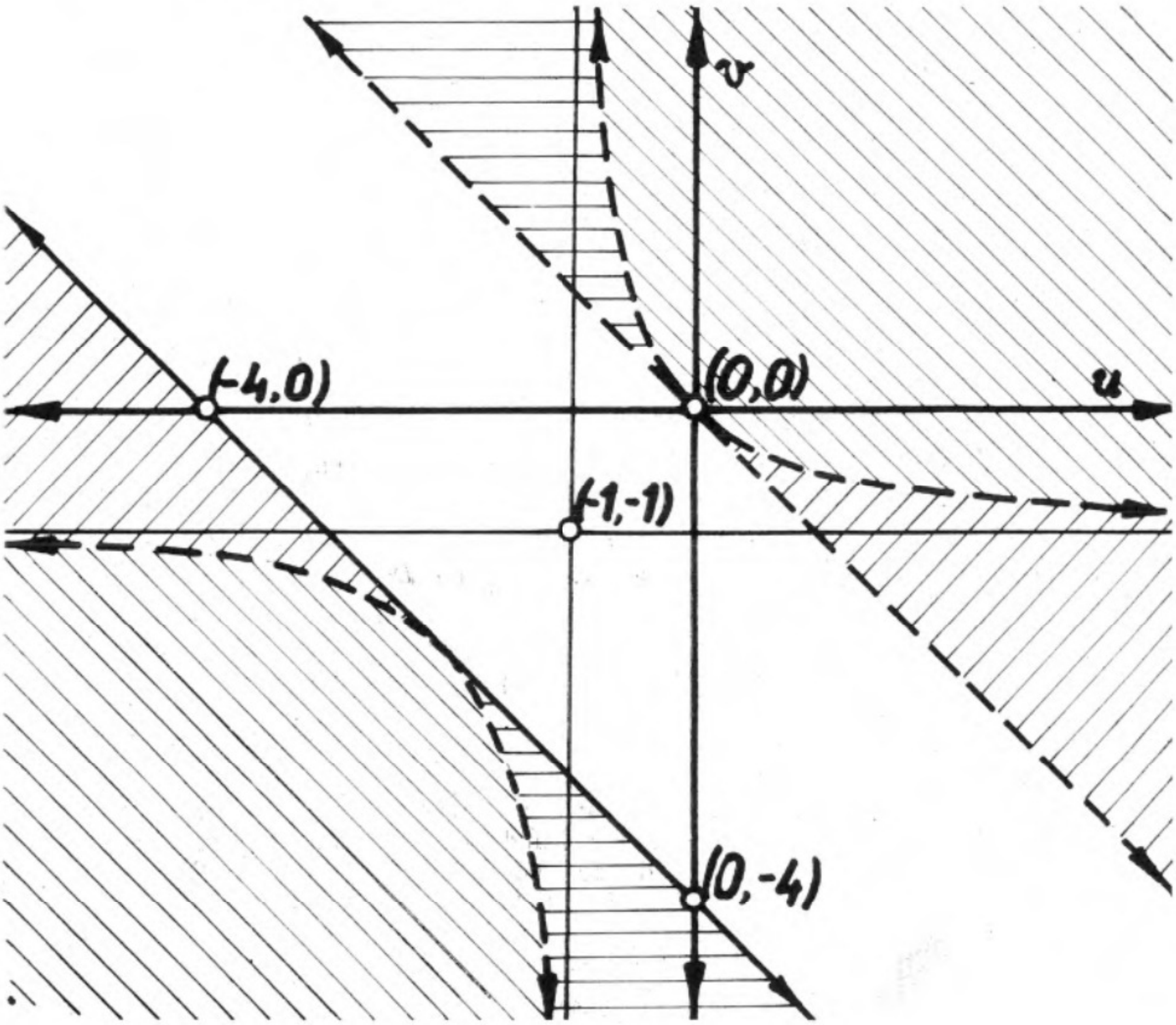
wobei $x, y \in R_0$ beliebig wählbar sind. Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein:

$$xy+\frac{1}{y}-x = u+1, \quad x+y-xy = v+1 \qquad (xy \neq 0). \tag{15}$$

Aus (14) folgt

$$H(u+1)+H(v+1) = H(1)+H(u+v+1) \tag{16}$$

für alle Zahlen u, v, für die das Gleichungssystem (15) lösbar ist. Mit der Bezeichnung (7) erhalten wir aus (16) die Gleichung (8). Man kann leicht zeigen, daß das System (15) dann und nur dann lösbar ist, falls $(u, v) \in \Delta$, wobei Δ durch (10) definiert wird (siehe Figur).



Damit haben wir das Lemma 1 bewiesen.

Lemma 2. *Die im Lemma 1 definierte Funktion $H^*: R \to R$ genügt der Cauchyschen Gleichung* (8) *für alle $u, v \in R$.*

BEWEIS. Wir betrachten ein beliebiges Paar $(u, v) \notin \Delta$. Dann gibt es immer ein Zahl $x \in R$, so daß die Paaren (x, u), $(x+u, v)$ und $(x, u+v)$ in Δ liegen. Aus dieser Behauptung erhalten wir die Gleichungen

$$H^*(u) = H^*(x+u) - H^*(x),$$
$$H^*(v) = H^*(x+u+v) - H^*(x+u),$$
$$H^*(u+v) = H^*(x+u+v) - H^*(x),$$

woraus sich (8) ergibt. Damit haben wir das Lemma 2 bewiesen.

Lemma 3. *Ist $(F, H) \in \mathfrak{M}$, so genügt die Funktion*

(17) $$\varphi(x) = F(x) - H(x) \qquad (x \in R_0)$$

der Funktionalgleichung

(18) $$\varphi(xy) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

für alle $x, y \in R_0$.

BEWEIS. Aus dem Lemma 1 folgt

(19) $$H(x) = H^*(x-1) + H(1) \qquad (x \in R),$$

wobei die Funktion $H^*: R \to R$ nach Lemma 2 eine Lösung der Cauchyschen Funktionalgleichung (8) ist. Wegen (1) und (19) erhalten wir

$$F(x) + F(y) - F(xy) = H(x+y-xy) = H^*(x+y-xy-1) + H(1) =$$
$$= H^*(x-1) + H^*(y-1) - H^*(xy-1) + H(1) = H(x) + H(y) - H(xy),$$

woraus sich die Gleichung (18) folgt. Damit haben wir das Lemma bewiesen.

Wir beweisen jetzt den

Satz 3. *Es seien $F: R_0 \to R$ und $H: R \to R$ solche Funktionen, die der Funktionalgleichung* (1) *für alle $x, y \in R_0$ genügen. Dann gilt die Darstellung*

(20) $$H(x) = H^*(x-1) + H(1) \qquad (x \in R)$$
$$F(x) = F^*[\log |x|] + H^*(x-1) + H(1) \qquad (x \in R_0)$$

wobei $H^*: R \to R$ und $F^*: R \to R$ beliebige Lösungen der Cauchyschen Funktionalgleichung (8) *sind.*

BEWEIS. Dieser Satz folgt unmittelbar aus dem Lemmata 1, 2 und 3. Wir bemerken, daß die Behauptungen der Sätzen 1 und 2 aus dem Satz 3 folgen.

Aus dem Satz 3 erhalten wir die folgende Behauptung: Ist $(F, H) \in \mathfrak{M}$ und sind $F: R_0 \to R$ und $H: R \to R$ meßbare Funktionen, dann gelten die folgenden Darstellungen

$$H(x) = Ax + B \qquad (x \in R)$$
$$F(x) = C \log |x| + Ax + B \qquad (x \in R_0)$$

wobei A, B und C konstante Werte sind. (Siehe J. ACZÉL [1].)

Literatur

[1] J. ACZÉL, Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen.
[2] Z. DARÓCZY, Über die Funktionalgleichung
$f(xy)+f(x+y-xy)=f(x)+f(y)$ *Publ. Math. (Debrecen)*, **16**, (1969), 129—132.
[3] Z. DARÓCZY, On the general solution of the funtional equation
$f(xy)+f(x+y-xy)=f(x)+f(y)$ *Aequationes Mathematicae* **6**, (1971). 130—132.
[4] I. FENYŐ, Über die Funktionalgleichung
$f[a_0+a_1x+a_2y+a_3xy]+g[b_0+b_1x+b_2y+b_3xy]=h(x)+k(y)$
Acta Mathematica Hungarica **21**, (1970), 35—46.
[5] K. LAJKÓ, Több ismeretlen függvényt tartalmazó függvényegyenletekről (*Manuskript*) *Universität von Debrecen* (*Ungarn*), (1969).
[6] H. SWIATAK, On the Functional Equation
$f(xy)+f(x+y-xy)=f(x)+f(y)$ *Mat. Vesnik*, **5**, (10), (1968), 177—182.
[7] H. SWIATAK, Remarks on the Functional Equation
$f(xy)+f(x+y-xy)=f(x)+f(y)$
Aequationes Mathematicae, **1**, (1968), 239—241.

(Eingegangen am 31. März 1970.)