Über die Charakterisierung orthogonaler Systeme von Haarschem Typ

Von M. MIKOLÁS (Budapest)

1. Die klassische *Haarsche Funktionenfolge:*

$$(1.1)\qquad \chi_0^{(0)}(t)\equiv 1,\quad \chi_\nu^{(\lambda)}(t)=\begin{cases} 2^{\nu/2} \text{ für } (\lambda-1)2^{-\nu}<t<(\lambda-\frac{1}{2})2^{-\nu},\\ -2^{\nu/2} \text{ für } (\lambda-\frac{1}{2})2^{-\nu}<t<\lambda\cdot 2^{-\nu},\\ 0 \text{ in übrigen Punkten } t\in(0,1)\end{cases}$$

($\nu\geqq 0$, $1\leqq\lambda\leqq 2^\nu$) liefert bekanntlich Beispiel eines vollständigen, orthonormierten Systems mit folgenden bemerkenswerten Eigenschaften:

1. jede Lebesgue-integrierbare Funktion $f(t)$ läßt sich fast überall in eine nach (1. 1) fortschreitende Fourierreihe entwickeln;
2. diese sogenannte Haarsche Reihe konvergiert an allen Stetigkeitsstellen gegen $f(t)$ und zwar in jedem abgeschlossenen Stetigkeitsintervall der Funktion gleichmäßig.[1])

Das erste Ziel dieser Arbeit ist nun zu zeigen: (1. 1) kann dadurch charakterisiert werden, daß es aus dem einfachsten vollständigen System zum Intervall [0, 1] gehöriger charakteristischer Funktionen

$$(1.2)\qquad \chi_{[0,1]};\quad \chi_{\left[0,\frac{1}{2}\right]},\chi_{\left[\frac{1}{2},1\right]};\quad \chi_{\left[0,\frac{1}{4}\right]},\chi_{\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]},\chi_{\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]},\chi_{\left[\frac{3}{4},1\right]};\ \cdots$$

nach Elimination linearer Beziehungen mittels Orthogonalisierung entsteht (Satz I.). Der Beweis basiert auf gewissen Eigenschaften der Haarschen Kernfunktion.

Des weiteren wird ein anderer Charakterisierungssatz für eine weitgehende Verallgemeinerung von (1. 1), nämlich für das System (3. 1) behandelt. Die betreffende Familie von Funktionenfolgen besteht ebenso aus leicht darstellbaren Treppenfunktionen, die mit Hilfe von immer feiner werdenden, nicht notwendigerweise äquidistanten Zerlegungen des Grundintervalls $[a, b]$ entspringen. (Vgl. Sätze II—III.) Auf den Zusammenhang dieser Resultate mit Konvergenzfragen der zugehörigen Fourierentwicklungen geht der Verfasser anderswo ein.[2])

---

[1]) Vgl. [1], 46—50. — Die trigonometrische Fourierreihe entbehrt, wie bekannt, beider Eigenschaften in Betracht.

[2]) Vgl. [4].

2. Es sei ν eine feste nicht-negative ganze Zahl und sei eine äquidistante Zerlegung von $[0, 1]$ in 2^ν Teile betrachtet. Wird der Kürze halber

$$\bar{\chi}_\nu^{(\lambda)}(t) = \chi_{\left[\frac{\lambda-1}{2^\nu}, \frac{\lambda}{2^\nu}\right]}(t) = \begin{cases} 1 \text{ für } t \in \left[\dfrac{\lambda-1}{2^\nu}, \dfrac{\lambda}{2^\nu}\right] \\ 0 \text{ für } t \notin \left[\dfrac{\lambda-1}{2^\nu}, \dfrac{\lambda}{2^\nu}\right] \end{cases} \tag{2. 1}$$

mit $0 \leqq \lambda \leqq 2^\nu$ gesetzt, so liefert $\{\bar{\chi}_\nu^{(\lambda)}(t)\}$ ein triviales Beispiel eines in $[0, 1]$ orthogonalen Funktionensystems, welches aber unvollständig in $L[0, 1]$ ist. Um hieraus ein vollständiges Orthogonalsystem zu gewinnen, ist ziemlich naheliegend, alle Systeme $\{\bar{\chi}_\nu^{(\lambda)}(t)\}$ $(\nu=0, 1, 2, \ldots)$ zu vereinigen und den Gram—Schmidtschen Orthogonalisierungsprozeß zu verwenden. Beachtet man noch die Relationen

$$\bar{\chi}_\nu^{(\lambda)}(t) = \bar{\chi}_{\nu+1}^{(2\lambda-1)}(t) + \bar{\chi}_{\nu+1}^{(2\lambda)}(t) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots)$$

und läßt dementsprechend die Funktionen $\bar{\chi}_{\nu+1}^{(2\lambda)}(t)$ $(\nu \geqq 0, \lambda \geqq 1)$ fort, so hat man das System von linear unabhängigen Elementen:

$$1;\quad \bar{\chi}_1^{(1)};\quad \bar{\chi}_2^{(1)}, \bar{\chi}_2^{(3)};\quad \bar{\chi}_3^{(1)}, \bar{\chi}_3^{(3)}, \bar{\chi}_3^{(5)}, \bar{\chi}_3^{(7)};\ \ldots \tag{2. 2}$$

zugrunde zu legen.

Wir behaupten

Satz I. *Die aus* (2. 2) *durch Orthogonalisation erhaltene Funktionenfolge ist mit dem System* (1. 1) *identisch, abgesehen von eventuellen Diskontinuitäten der Haarschen Funktionen.*

Beweis. Es seien die Elemente von (2. 2) der Reihe nach mit $\bar{\chi}_0(t), \bar{\chi}_1(t), \bar{\chi}_2(t), \ldots$, diejenigen der orthogonalisierten Folge mit $\tilde{\chi}_0(t), \tilde{\chi}_1(t), \tilde{\chi}_2(t), \ldots$ bezeichnet und

$$\varphi_n(t) = \bar{\chi}_n(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \tilde{\chi}_j(t) \int_0^1 \bar{\chi}_n(u) \tilde{\chi}_j(u)\, du \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{2. 3}$$

gesetzt. Bekanntlich entspringt $\tilde{\chi}_0(t)$ aus $\bar{\chi}_0(t) = 1$, $\tilde{\chi}_n(t)$ $(n \geqq 1)$ aber aus $\varphi_n(t)$ durch Normierung.

Also ist

$$\tilde{\chi}_0(t) = \|\bar{\chi}_0\|^{-1} \bar{\chi}_0(t) = 1$$

und im allgemeinen

$$\tilde{\chi}_n(t) = \|\varphi_n\|^{-1} \varphi_n(t) \quad \text{mit} \quad \|\varphi_n\| = \Big[\int_0^1 \varphi_n(u)^2\, du\Big]^{\frac{1}{2}} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{2. 4}$$

Um den Satz mittels Induktion zu verifizieren, bemerken wir zunächst, daß

$$\tilde{\chi}_1(t) = \|\varphi_1\|^{-1} \varphi_1(t) = 2\bar{\chi}_1^{(1)}(t) - 1 = \begin{cases} 1 \text{ für } t \in (0, \frac{1}{2}), \\ -1 \text{ für } t \in (\frac{1}{2}, 1), \end{cases}$$

d.h. für $t \in (0, 1)$, $t \neq \frac{1}{2}$

$$\tilde{\chi}_1(t) = \chi_0^{(1)}(t)$$

gilt. Es bleibt noch zu zeigen: (A) für jedes feste $\nu \geqq 0$ impliziert die Gültigkeit von

$$\tilde{\chi}_1(t) = \chi_0^{(1)}(t), \ldots, \tilde{\chi}_{2^{\nu+1}-1}(t) = \chi_\nu^{(2^\nu)}(t) \tag{2.5}$$

diejenige von

$$\tilde{\chi}_{2^{\nu+1}}(t) = \chi_{\nu+1}^{(1)}(t); \tag{2.6}$$

(B) für jedes feste Wertepaar (ν, r) mit $\nu \geqq 1$ und $1 \leqq r \leqq 2^\nu - 1$ haben die Relationen

$$\tilde{\chi}_1(t) = \chi_0^{(1)}(t), \ \tilde{\chi}_2(t) = \chi_1^{(1)}(t), \ldots, \tilde{\chi}_{2^\nu+(r-1)} = \chi_\nu^{(r)}(t) \tag{2.7}$$

zugleich

$$\tilde{\chi}_{2^\nu+r}(t) = \chi_\nu^{(r+1)}(t) \tag{2.8}$$

zur Folge. Hierbei soll t eine Stetigkeitsstelle von $\chi_{\nu+1}^{(1)}$ bzw. $\chi_\nu^{(r+1)}$ bedeuten.

Wir schicken einige Grundtatsachen über die Haarschen Kernfunktionen

$$H_\nu^{(\lambda)}(t, u) = \chi_0^{(0)}(t)\chi_0^{(0)}(u) + \cdots + \chi_\nu^{(\lambda)}(t)\chi_\nu^{(\lambda)}(u)$$

voraus: sie sind für alle ν und λ nicht negativ und zwar

$$H_\nu^{(2^\nu)}(t, u) = \begin{cases} 2^{\nu+1}, & \text{wenn } t \text{ und } u \text{ den Intervallen } \left(\dfrac{s-1}{2^{\nu+1}}, \dfrac{s}{2^{\nu+1}}\right) \\ & \quad (s = 1, 2, \ldots, 2^{\nu+1}) \text{ angehören;} \\ 0 & \text{übrigenfalls;} \end{cases}$$

ferner für $1 \leqq r \leqq 2^\nu - 1$

$$H_\nu^{(r)}(t, u) = \begin{cases} 2^{\nu+1}, & \text{wenn } t \text{ und } u \in \left(\dfrac{s-1}{2^{\nu+1}}, \dfrac{s}{2^{\nu+1}}\right) \quad (s = 1, 2, \ldots, 2r); \\ 2^\nu, & \text{wenn } t \text{ und } u \in \left(\dfrac{s-1}{2^\nu}, \dfrac{s}{2^\nu}\right) \quad (s = 2r+1, \ldots, 2^\nu); \\ 0 & \text{übrigenfalls.}^{3)} \end{cases}$$

Was nun (A) anbelangt, so erhält man unter Berücksichtigung von (2. 5):

$$\varphi_{2^{\nu+1}}(t) = \tilde{\chi}_{\nu+2}^{(1)}(t) - \int_0^{2^{-(\nu+2)}} H_\nu^{(2^\nu)}(t, u)\, du = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{für } t \in \left(0, \dfrac{1}{2^{\nu+2}}\right), \\ -\dfrac{1}{2} & \text{für } t \in \left(\dfrac{1}{2^{\nu+2}}, \dfrac{1}{2^{\nu+1}}\right), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$\tilde{\chi}_{2^{\nu+1}}(t) = \|\varphi_{2^{\nu+1}}\|^{-1} \varphi_{2^{\nu+1}}(t) = \begin{cases} 2^{(\nu+1)/2} & \text{für } t \in (0, 2^{-(\nu+2)}), \\ -2^{(\nu+1)/2} & \text{für } t \in (2^{-(\nu+2)}, 2^{-(\nu+1)}), \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

d.h. die Beziehung (2. 6).

[3]) Vgl. z. B. [1], 48—49; [2], 364—366.

Im Falle (B) gelangt man ähnlich zum Ziel: die Hypothese (2. 7) erlaubt die Darstellung

$$\varphi_{2^\nu+r}(t) = \bar{\chi}_{\nu+1}^{(2r+1)}(t) - \int\limits_{r\cdot 2^{-\nu}}^{r\cdot 2^{-\nu}+2^{-(\nu+1)}} H_\nu^{(r)}(t, u)\, du =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{für } t \in \left(\dfrac{r}{2^\nu}, \dfrac{r}{2^\nu} + \dfrac{1}{2^{\nu+1}}\right), \\ -\dfrac{1}{2} & \text{für } t \in \left(\dfrac{r}{2^\nu} + \dfrac{1}{2^{\nu+1}}, \dfrac{r+1}{2^\nu}\right), \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

woher

$$\tilde{\chi}_{2^\nu+r}(t) = \|\varphi_{2^\nu+r}\|^{-1}\varphi_{2^\nu+r}(t) = \begin{cases} 2^{\nu/2} & \text{für } t \in (r\cdot 2^{-\nu}, (r+\frac{1}{2})2^{-\nu}), \\ -2^{\nu/2} & \text{für } t \in ((r+\frac{1}{2})2^{-\nu}, (r+1)2^{-\nu}), \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

d.h. (2. 8) folgt.

Es ist übrigens leicht einzusehen: wenn man in (2. 2) die ersten zwei Elemente mit $\bar{\chi}_1^{(1)}, \bar{\chi}_1^{(2)}$ ersetzt, dann ergibt die Orthogonalisierung ein solches System, das vom dritten Glied an mit $\{\bar{\chi}_n(t)\}$ übereinstimmt. (Die ersten zwei Elemente der orthogonalisierten Folge sind dabei $\sqrt{2}\bar{\chi}_1^{(1)}(t)$ bzw. $\sqrt{2}\bar{\chi}_1^{(2)}(t)$.)

3. Wir wollen uns nun mit einer starken Verallgemeinerung von (1. 1) beschäftigen, welche sich anstatt des sukzessiven Halbierens auf eine beliebige Folge von unendlich feiner werdender Zerlegungen bezieht und doch — im Gegensatz zu den am Ende der Haarschen Habilitationschrift erwähnten Beispiele[4]) — eine einfache explizite Darstellung mittels charakteristischer Funktionen zuläßt.

Wir gehen von einem endlichen Grundintervall $I_0=[a, b]$ aus. Es sei

$$I_0 = \bigcup_{k=1}^{N} I_k$$

eine Zerlegung desselben in paarweise punktfremde Intervalle und seien sukzessiv weitere Zerlegungen in disjunkte Teilintervalle:

$$I_k = \bigcup_{l=1}^{N_k} I_{kl} \quad (1 \leqq k \leqq N), \qquad I_{kl} = \bigcup_{m=1}^{N_{kl}} I_{klm} \quad (1 \leqq k \leqq N,\ 1 \leqq l \leqq N_k),\ \ldots$$

betrachtet. Wir nehmen an, daß es von echten Zerlegungen handelt, d.h. die Anzahl der Teilintervalle immer >1 ist, ferner daß $\{I_k\}, \{I_{kl}\}, \{I_{klm}\}, \ldots$ ein sich unbeschränkt verfeinerndes Zerlegungssystem von I_0 liefert. Letzteres bedeutet, wie üblich, daß die Länge das größten Teilintervalls unter denjenigen mit ν Indizes für $\nu \to \infty$ gegen Null strebt.

Die fragliche Generalisation des Haarschen Orthogonalsystems entsteht da-

[4]) Vgl. [2], 369—371.

durch, daß man jeder benutzten Unterteilung eine wohldefinierte Gruppe von Treppenfunktionen mit höchstens drei Konstanzstrecken zuordnet. Wir schreiben:[5])

$$
(3.1)\qquad \begin{cases} \mu_0^{(0)}(t) = 1; \\ \mu_0^{(r)}(t) = \sum\limits_{p=r+1}^{N} [|I_p|\,\chi_{I_r}(t) - |I_r|\,\chi_{I_p}(t)] \quad (1 \leqq r \leqq N-1); \\ \mu_k^{(r)}(t) = \sum\limits_{p=r+1}^{N_k} [|I_{kp}|\,\chi_{I_{kr}}(t) - |I_{kr}|\,\chi_{I_{kp}}(t)] \quad \begin{pmatrix} 1 \leqq k \leqq N \\ 1 \leqq r \leqq N_k - 1 \end{pmatrix}; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}
$$

Im allgemeinen läßt man also einer Zerlegung der Form:

$$
(3.2)\qquad I_{k_1\dots k_\nu} = \bigcup_{k_{\nu+1}=1}^{N_{k_1\dots k_\nu}} I_{k_1\dots k_\nu k_{\nu+1}}
$$

die Funktionen

$$
(3.3)\qquad \mu_{k_1\dots k_\nu}^{(r)}(t) = \sum_{p=r+1}^{N_{k_1\dots k_\nu}} [|I_{k_1\dots k_\nu p}|\,\chi_{I_{k_1\dots k_\nu r}}(t) - |I_{k_1\dots k_\nu r}|\,I_{I_{k_1\dots k_\nu p}}(t)]
$$

entsprechen, wobei r die Zahlen $1, 2, \dots, N_{k_1\dots k_\nu} - 1$ durchläuft. Die Definition ergibt

$$
(3.4)\qquad \mu_{k_1\dots k_\nu}^{(r)}(t) = \begin{cases} \sum\limits_{p=r+1}^{N_{k_1\dots k_\nu}} |I_{k_1\dots k_\nu p}| & \text{für } t \in I_{k_1\dots k_\nu r}, \\ -|I_{k_1\dots k_\nu r}| & \text{für } t \in \bigcup\limits_{p=r+1}^{N_{k_1\dots k_\nu}} I_{k_1\dots k_\nu p}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}
$$

Offensichtlich gilt

$$
(3.5)\qquad \int_{I_0} \mu_{k_1\dots k_\nu}^{(r)}(t)\,dt = 0,
$$

ferner

(3.6)

$$
\|\mu_{k_1\dots k_\nu}^{(r)}\|^2 = \int_{I_0} [\mu_{k_1\dots k_\nu}^{(r)}(t)]^2\,dt = \sum_{p=r+1}^{N_{k_1\dots k_\nu}} (|I_{k_1\dots k_\nu p}|\,|I_{k_1\dots k_\nu r}|^2 + |I_{k_1\dots k_\nu r}|\,|I_{k_1\dots k_\nu p}|^2).
$$
[6])

Man überzeugt sich sofort, daß die normierte Variante der Funktionenfolge (3. 1) im Falle $I_0 = [0, 1]$, $|I_{k_1\dots k_\nu}| = 2^{-\nu}$ eben in (1. 1) übergeht; wegen $N = N_1 = N_2 = \dots = 2$ hat man dabei immer $r = 1$ zu setzen.

Satz II. *Das System* (3. 1) *ist im Intervall* I_0 *orthogonal und in Bezug auf* $L(I_0)$ *vollständig.*

Beweis. Nach (3. 5) sind alle Elemente von (3. 1) orthogonal zu $\mu_0^{(0)}(t)$. Für $r < r'$ bleibt $\mu_0^{(r)}(t)$ konstant überall, wo $\mu_0^{(r')}(t)$ nicht verschwindet und mithin

$$
\int_{I_0} \mu_0^{(r)}(t)\,\mu_0^{(r')}(t)\,dt = 0.
$$

Gleichfalls ergibt sich die Orthogonalität einer beliebigen Funktion $\mu_{k_1\dots k_\nu}^{(r)}(t)$ $(\nu \geqq 1)$

[5]) Die Länge eines Intervalls I wird durchgehends mit |I| bezeichnet.

[6]) Die Formeln (3.5), (3.6) gelten auch für $\mu_0^{(r)}(t)(1 \leqq r \leqq N-1)$, indem man auf der rechten Seite von (3.6) einfach die Indizes $k_1, k_2, \dots, k_\nu$ wegstreicht.

zu einem anderen Element mit ebenso vielen unteren Indizes und zu allen vorangehenden Gliedern von (3. 1); das liefert schon durch Induktion die Orthogonalität des ganzen Systems.

Um die Vollständigkeit zu ermitteln, sei eine Funktion $f(t) \in L(I_0)$ betrachtet, deren alle Fourierkoeffizienten in Bezug auf (3. 1) verschwinden. Es sei $I_1 = [a, x_1]$ $I_N = (x_{N-1}, b)$, $I_k = (x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, 2, \dots, N-1)$ und

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt \qquad (x \in I_0)$$

gesetzt.

Zunächst gilt

$$F(b) - F(a) = \int_{I_0} f(t) \mu_0^{(0)}(t)\, dt = 0,$$

also

$$F(b) = F(a) = 0.$$

Deshalb entspringt aber

$$\int_{\lambda_0} f(t) \mu_0^{(1)}(t)\, dt = \left(\sum_{p=2}^{N} |I_p| \right) F(x_1) + |I_1|\, F(x_1) = |I_0|\, F(x_1)$$

und zugleich $F(x_1) = 0$; ähnlich folgert man sukzessiv aus dem Verschwinden von $(f, \mu_2^{(1)})$, $(f, \mu_1^{(2)})$, …, daß $F(x)$ an allen Stellen x_k und sogar in jedem bei der Definition von (3. 1) benutzten Zerlegungspunkt gleich Null ist.

Da aber die letzterwähnte Punktmenge in I_0 überall dicht ist, so muß die (stetige) Integralfunktion $F(x)$ identisch Null und ihre Ableitung $f(x)$ fast überall 0 sein.

4. Es liegt jetzt die Frage nahe, ob auch das Orthogonalsystem (3. 1) aus einem passenden System von charakteristischen Funktionen durch Orthogonalisation erzeugt werden kann, wie es bei dem Haarschen System (1. 1) der Fall ist.

Wir werden zeigen, daß (3. 1) im wesentlichen (d.h. von konstanten Faktoren abgesehen) die einzige Funktionenfolge ist, die aus einer vollständigen Menge von gruppenweise linear unabhängigen, dem benutzten Zerlegungssystem angehörigen charakteristischen Funktionen:

$$(4.1) \qquad \chi_{I_0}; \quad (\chi_{I_0}, \chi_{I_1}, \dots, \chi_{I_{N-1}}); \quad (\chi_{I_1}, \chi_{I_{11}}, \dots, \chi_{I_{1,N_1-1}}); \quad \dots$$

mit Hilfe des Orthogonalisierungsprozesses entsteht. Dazu muß man hervorheben, daß der Aufbau der betreffenden Funktionen (3. 2) ziemlich *speziell* zu sein erscheint: es handelt sich vom einfachsten Typ solcher Treppenfunktionen, die nur zwei von Null verschiedene Werte annehmen und derer Integrale auf den zugehörigen Strecken verschwinden. Andererseits kann man durch (4. 1) offensichtlich den *allgemeinsten* Typus von unendlich feiner werdenden Intervallzerlegungen kennzeichnen, falls diese mittels wiederholte Unterteilungen zustande kommen. Es ist also von vornherein nicht zu erwarten, daß unser System (3. 1) eben auf die genannte einfache Weise charakterisiert werden kann.

Zunächst führen wir eine verkürzende Bezeichnung ein: das Symbol $(\underline{\tilde{f}_1|}, \tilde{f}_2, \dots$ $\dots, \tilde{f}_n)$ soll dasjenige Funktionensystem bedeuten, welches aus $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ durch Orthogonalisierung und nachfolgende Fortlassung von $\|f_1\|^{-1} f_1$ gewonnen wird.

Satz III. *Die Funktionenfolge*

$$\tilde{\chi}_{I_0};\quad (\tilde{\chi}_{I_0}\rfloor \tilde{\chi}_{I_1}, \ldots, \tilde{\chi}_{I_{N-1}});\quad (\tilde{\chi}_{I_k}\rfloor \tilde{\chi}_{I_{k1}}, \ldots, \tilde{\chi}_{I_{k,N_k-1}})\qquad (1 \leqq k \leqq N);\ \ldots \tag{4.2}$$

stimmt mit (3. 1) *bis auf Reihenfolge und konstante Faktoren überein; genauer:* (4. 2) *ist die normierte Variante von* (3. 1).

Die Behauptung impliziert die bekannte Tatsache, daß die zu einem beliebigen Teilintervallsystem $\{I_{k_1 \ldots k_{\nu+1}}\}$ adjungierten charakteristischen Funktionen — die wegen (3. 2) linear abhängig sind — nach Fortlassung mindestens eines Elements und Hinzunahme von $\chi_{I k_1 \ldots k_\nu}$ ein linear unabhängiges System bilden, daß also die zugehörige Gramsche Determinante positiv ist. Im folgenden brauchen wir aber mehr, nämlich den genauen Wert der genannten Determinante.

Lemma. *Ist $i_1, i_2, \ldots, i_n$ ein System von paarweise punktfremden Intervallen und wird ihre Vereinigung mit i_0 bezeichnet, so ist die Gramsche Determinante der charakteristischen Funktionen von i_0 und $i_1, i_2, \ldots, i_m$ $(1 \leqq m \leqq n-1)$:*

$$G(\chi_{i_0}, \chi_{i_1}, \ldots, \chi_{i_m}) = |i_1| \ldots |i_m| \,(|i_{m+1}| + \cdots + |i_n|). \tag{4.3}$$

Insbesondere gilt:

$$G(\chi_{i_0}, \chi_{i_1}, \ldots, \chi_{i_{n-1}}) = \prod_{p=1}^{m} |i_p| \qquad (n > 1). \tag{4.4}$$

Um dies zu verifizieren, bemerken wir zuerst, daß

$$\int_{i_0} \chi_{i_p}(t)\chi_{i_q}(t)\,dt = \begin{cases} |i_q| & \text{für } p=0 \text{ oder } p=q\neq 0,\\ 0 & \text{sonst}\end{cases} \tag{4.5}$$

und so

$$G_m = G(\chi_{i_0}, \chi_{i_1}, \ldots, \chi_{i_m}) = \begin{vmatrix} |i_0| & |i_1| \ldots |i_{m-1}| & |i_m| \\ |i_1| & |i_1| \ldots 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ |i_{m-1}| & 0 \ \ldots |i_{m-1}| & 0 \\ |i_m| & 0 \ \ldots 0 & |i_m| \end{vmatrix} \tag{4.6}$$

mit $|i_q|$ $(0 \leqq q \leqq m)$ in der Hauptdiagonale.

Für $m=1$ ist

$$G_1 - \begin{vmatrix} |i_0| & |i_1| \\ |i_1| & |i_1| \end{vmatrix} = |i_1|\,(|i_0| - |i_1|) = |i_1|\,(|i_2| + \cdots + |i_n|). \tag{4.7}$$

Für $m > 1$ ergibt die Entwicklung von G_m nach der letzten Zeile oder Spalte unmittelbar die Rekursionsformel:

$$G_m = |i_m| \left(G_{m-1} - \prod_{p=1}^{m} |i_p|\right),$$

deren wiederholte Anwendung zu

$$G_m = |i_m|\,|i_{m-1}| \ldots |i_2|\, G_1 - \left(\prod_{p=1}^{m} |i_p|\right)(|i_m| + |i_{m-1}| + \cdots + |i_2|),$$

und durch (4. 7) zu (4. 3) führt.

Der BEWEIS des Satzes III. verläuft nun folgendermaßen.

Auf Grund der expliziten Darstellung einer beliebigen orthogonalisierten Folge[7]) besteht $(\tilde{\chi}_{I_0} \rfloor \tilde{\chi}_{I_1}, \ldots, \tilde{\chi}_{I_{N-1}})$ aus folgenden Elementen:

$$X_r(t) = C_r \Delta_r(t) \qquad (r=1, 2, \ldots, N-1), \tag{4.8}$$

wobei

$$\Delta_r(t) = \begin{vmatrix} \chi_{I_0}(t) & \chi_{I_1}(t) & \ldots \chi_{I_r}(t) \\ (\chi_{I_0}, \chi_{I_0}) & (\chi_{I_0}, \chi_{I_1}) & \ldots (\chi_{I_0}, \chi_{I_r}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (\chi_{I_{r-1}}, \chi_{I_0}) & (\chi_{I_{r-1}}, \chi_{I_1}) & \ldots (\chi_{I_{r-1}}, \chi_{I_r}) \end{vmatrix} \tag{4.9}$$

und C_r durch die Normierungsbedingung $\int\limits_{I_0} [\chi_r(t)]^2 dt = 1$ bestimmt ist. Unsere nächste Aufgabe ist zu zeigen, daß $\Delta_r(t)$ bis auf einen konstanten Faktor mit $\mu_0^{(r)}(t)$ identisch ist.

Im Falle $r=1$ erhält man unmittelbar:

(4.10)
$$\Delta_1(t) = \begin{vmatrix} 1 & \chi_{I_1}(t) \\ |I_0| & |I_1| \end{vmatrix} = |I_1| - |I_0| \chi_{I_1}(t) = -\sum_{p=2}^{N} [|I_p| \chi_{I_1}(t) - |I_1| \chi_{I_p}(t)] = -\mu_0^{(1)}(t).$$

Für $2 \leqq r \leqq N-1$ berechnen wir $\Delta_r(t)$ in der Form:

$$\Delta_r(t) = A_0 + A_1 \chi_{I_1}(t) + A_2 \chi_{I_2}(t) + \cdots + A_r \chi_{I_r}(t), \tag{4.11}$$

wo A_s die zu $\chi_{I_s}(t)$ gehörige Adjunkte bezeichnet, also [vgl. (4. 5)]:

$$A_0 = \begin{vmatrix} |I_1| & |I_2| \ldots |I_{r-1}| & |I_r| \\ |I_1| & 0 \quad \ldots 0 & 0 \\ 0 & |I_2| \ldots 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ |I_{r-1}| & 0 \quad \ldots |I_{r-1}| & 0 \end{vmatrix},$$

$$A_1 = -\begin{vmatrix} |I_0| & |I_2| \ldots |I_{r-1}| & |I_r| \\ |I_1| & 0 \quad \ldots 0 & 0 \\ |I_2| & |I_2| \ldots 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ |I_{r-1}| & 0 \quad \ldots |I_{r-1}| & 0 \end{vmatrix},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_r = (-1)^r \begin{vmatrix} |I_0| & |I_1| \ldots |I_{r-2}| & |I_{r-1}| \\ |I_1| & |I_1| \ldots 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ |I_{r-2}| & 0 \quad \ldots |I_{r-2}| & 0 \\ |I_{r-1}| & 0 \quad \ldots 0 & |I_{r-1}| \end{vmatrix}.$$

[7]) Vgl. z. B. [3], 64—65.

Die beiden ersten Determinanten ergeben sich sofort durch Entwicklung nach der letzten Spalte und zwar

$$A_0 = -A_1 = (-1)^{r-1} \prod_{p=1}^{r} |I_p|; \tag{4.12}$$

im letzten Glied kommt aber die Gramsche Determinante von $\chi_{I_0}, \chi_{I_1}, \ldots, \chi_{I_{r-1}}$ vor, so daß (4. 3) liefert:

$$A_r = (-1)^r \left(\prod_{p=1}^{r-1} |I_p|\right)\left(\sum_{p=r}^{N} |I_p|\right). \tag{4.13}$$

Der Wert von A_s mit $2 \leqq s \leqq r-1$ wird am einfachsten so gewonnen, daß man die erste Spalte der betreffenden Determinante zwischen die s-te und $(s+1)$-te Spalte transponiert[8]) und die so entstehende Determinante nach der letzten Spalte entwickelt.

Somit folgt:

$$A_s = (-1)^r \prod_{p=1}^{r} |I_p| \qquad (s = 2, \ldots, r-1). \tag{4.14}$$

Unter Berücksichtigung von (4. 12)—(4. 14) erhalten wir aus (4. 11):

$$\begin{aligned} \Delta_r(t) &= (-1)^r \left(\prod_{p=1}^{r-1} |I_p|\right)\left\{\chi_{I_r}(t) \sum_{p=r}^{N} |I_p| - |I_r|\left[1 - \sum_{p=1}^{r-1} \chi_{I_p}(t)\right]\right\} = \\ &= (-1)^r \left(\prod_{p=1}^{r-1} |I_p|\right) \sum_{p=r+1}^{N} [|I_p|\, \chi_{I_r}(t) - |I_r|\, \chi_{I_p}(t)], \end{aligned}$$

d.h.

$$\Delta_r(t) = (-1)^r |I_1| \ldots |I_{r-1}|\, \mu_0^{(r)}(t).$$

Da die ganze bisherige Überlegung für eine beliebige Elementengruppe

$$(\underline{\tilde{\chi}_{I_{k_1 \ldots k_\nu}}} \big| \tilde{\chi}_{I_{k_1 \ldots k_\nu 1}}, \ldots \tilde{\chi}_{I_{k_1 \ldots k_\nu, N_{k_1 \ldots k_\nu} - 1}})$$

anwendbar ist und ergibt, daß diese bis auf konstante Faktoren aus den Funktionen

$$\mu^{(r)}_{k_1 \ldots k_\nu}(t) \qquad (r = 1, 2, \ldots, N_{k_1 \ldots k_\nu} - 1)$$

besteht, so haben wir Satz III. bewiesen.

5. Die Tatsache, daß sich Orthogonalsysteme vom Haarschen Typ mittels eines Orthogonalisationsprozesses als Linearkombinationen gewisser elementarer Systeme von charakteristischen Funktionen aufbauen lassen, bietet offenbar die Möglichkeit, die bemerkenswerten Eigenschaften der genannten Funktionen und der zugehörigen Fourierreihen einfacher und übersichtlicher abzuleiten bzw. ihre Theorie von einer neueren Seite zu begründen.

---

[8]) Diese Umformung hat ein Multiplizieren mit $(-1)^{s-1}$ zur Folge.

Diese Problematik wird in [4] ins Auge gefaßt und es wird insbesondere die zentrale Rolle hervorgehoben, welche ein vertiefter Rieszscher Satz über die Approximation durch Treppenfunktionen in der Konvergenztheorie der nach (3. 1) fortschreitenden Entwicklungen spielt.

Literatur

[1] G. ALEXITS, Convergence problems of orthogonal series London, 1961.
[2] A. HAAR, Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme. *Math. Ann.* **69** (1910), 331—371.
[3] S. KACZMARZ—H. STEINHAUS, Theorie der Orthogonalreihen (*Warszawa—Lwów*, 1935).
[4] M. MIKOLÁS, Über die Approximation durch Treppenfunktionen in L^p. *Proc. Conf. Constr. Theory of Funktions* (*Budapest*, 1969), 307—314.

(Eingegangen am 7. Mai 1970.)